数理解析研究所講究録
第 1948 巻 2015 年 153-159

陰的な Hamilton 系の smooth solvability と アファイン制御系の特異制御の存在性について

北海道大学大学院理学院　土田　旭
Asahi Tsuchida
Graduate School of Science, Department of Mathematics,
Hokkaido University

1　はじめに

制御系の理論の目的は, 力学系を制御して望みの力学系を作ることである. 特異制御は, Pontryagin の最大原理から, 最適時間制御の候補となることがわかり, 制御理論において重要な役割を果たす. この最適性のルーツは古典的変分問題 (Eular–Lagrange) にある.

本稿では, はじめに制御系および特異制御の定義を与え, 特異制御の特徴付けを与える. 次に, 陰的な微分方程式系の smooth solvability について説明し, 陰的な Hamilton 系に関する結果を用いて, 特異制御の存在性の十分条件を与える. 滑らかさは C^2 級以上と仮定する.

2　制御系

本節は主に [1], [2] を参考にしている.

一般に, 有限次元多様体 M 上の制御系とは, ファイブレーション $\alpha\colon X\to M$ と, 写像 $f\colon X\to TM$ の組 (α,f) で, 接束の自然な射影 $\pi\colon TM\to M$ と可換になるようなもののことをいう. 本稿では, 局所的な問題を対象とするので, ファイブレーション $\alpha\colon X\to M$ は自明なものであると仮定する. すなわち, α はファイバーをユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ の開集合 U にもつファイブレーション $\alpha: M\times U\to M$ であるとする.

定義 2.1 (制御系). M 上の制御系 (**control systems**) とは, 自明なファイブレーション $\alpha: M\times U\to M$ と滑らかな写像 $f: M\times U\to TM$ で $\alpha=\pi\circ f$ を満たすものの組 (α,f) のことをいう. U の元 $u=(u_1,\ldots,u_k)$ を**制御パラメータ**と呼ぶ.

f が M 上の独立なベクトル場 $g_0,\ldots,g_k$ を用いて, $f(x,u)=g_0(x)+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}u_ig_i(x)$ で与えられている時, 対応する制御系は**アファイン制御系**と呼ばれる.

定義 2.2 (許容制御). 制御系に対する**許容制御**とは, 有界で可測な写像 $u\colon[0,T(u)]\to\mathbb{R}^k$ である. ただし, $T(u)>0$ である. 許容制御全体の集合を $\mathcal{U}$ と書く. また, 正の数 T を固定した時の許容制御の集合を $\mathcal{U}_T$ と書くことにする.

許容制御 $u(t)$ を一つ決めると, 対応する微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

を考えることができる. 初期条件 $x(0) = x_0$ を決めておけば, この微分方程式の解曲線 $x(t, x_0, u)$ が得られる.

定義 2.3 (終点写像). 許容制御 $u(t)$ を, $u(t)$ によってきまる微分方程式 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ の解曲線の終点 $x(T, x_0, u)$ に写す写像 $End_{x_0,T} : \mathcal{U}_T \to M$ を**終点写像 (end-point mapping)** とよぶ.

$\mathcal{U}_T$ は Banach 開多様体であり, 終点写像には Fréchet 微分が定義できる. 終点写像の Fréchet 微分が全射でないような点を**特異制御 (singular control)** と呼ぶ.

Fréchet 微分の計算方法を与えよう.

$$A(t) := \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), u(t)), \quad B(t) := \frac{\partial F}{\partial u}(x(t), u(t))$$

とおく.

補題 2.4. 終点写像 $End_{x_0,T}$ に対する $u(t)$ における Fréchet 微分は

$$d_{u(t)} End_{x_0}(v) = M(T) \int_0^T M^{-1}(t) B(t) v(t) dt$$

で与えられる. ただし, $M(t)$ は

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(0) = E,$$

を満たす正則行列である.

備考 2.5. 終点写像は無限次元多様体から有限次元多様体への写像であるため, また, Fréchet 微分の定義からもわかるように, 特異制御を定義から直接に調べることは難しい.

さて, 与えられた制御系に対して $T^*M \times U$ 上の関数 $H : T^*M \times U \to \mathbb{R}$ を $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$ で定義する. ただし $\langle , \rangle$ はベクトル場とコベクトル場の自然なペアリングである. 特異制御は, 以下のような拘束 Hamilton 系で特徴付けられることが知られている.

命題 2.6 ([1],[2]). 許容制御 $u(t)$: $[0, T] \to U$ が特異制御であることの必要十分条件は, $T^*M \setminus \{0\}$ 上の曲線 $p(t)$ が存在して, $(T^*M \setminus \{0\}) \times U$ 上の曲線 $(x(t), p(t), u(t))$ が次をみたすことである;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)), \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_i}(x(t), p(t), u(t)) = 0 \ (1 \leq i \leq k). \end{cases}$$

制御系に対する拘束 Hamilton 系はいつでも与えることができるが, その解の存在は保証されない. 次節でアファイン制御系の拘束 Hamilton 系を陰的な微分方程式系の立場から考察する.

3 陰的な微分方程式系 (implicit differential systems)

本節は主に [4],[5] を参考にしている.

滑らかな多様体 $\mathcal{M}$ に対する**陰的な微分方程式系 (implicit Hamiltonian systems)** とは, 接束 $T\mathcal{M}$ の部分集合のことをさす. 陰的な微分方程式系 $S \subset T\mathcal{M}$ に対する解とは, 滑らかな曲線 $\gamma\colon (a,b) \to \mathcal{M}$ で, 任意の $t \in (a,b)$ について $(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) \in S$ を満たすもののことをいう.

定義 3.1. $\mathcal{M}$ 上の陰的な微分方程式系 S に対して, 点 $(x_0, \dot{x}_0) \in S$ が **solvable point** であるとは, $(x_0, \dot{x}_0)$ を初期状態とするような解 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ が存在するときにいう.

定義 3.2. S が **solvable** であるとは, S の各点 $(x_0, \dot{x}_0)$ に対して, solvable point からなる近傍 U が存在するときにいう. さらに, S が **smoothly solvable** であるとは, 初期条件に関しても滑らかなときをいう. すなわち, x_0 の近傍 V が存在して, 写像

$$\bar{\gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to \mathcal{M}$$

が滑らかになるときをいう. ただし, $\bar{\gamma}(t, x_0) = \gamma(t)$, $\gamma(0, x_0) = x_0$ である.

陰的な微分方程式系の smooth solvability は局所的な問題なので, 多様体 $\mathcal{M}$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と考えることとし, S は $T\mathcal{M}$ の部分多様体とする.

$\mathcal{M}$ 上の陰的な微分方程式系 S が埋め込み $(\varphi, \psi)\colon \mathbb{R}^m \to T\mathcal{M}$ の像として与えられているとき, S が smoothly solvable であることの十分条件は次のように与えられる.

定理 3.3 ([4],[5]). S に対して, 滑らかな関数 $a_1, \dots, a_m\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_n(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(\alpha) \\ \vdots \\ a_m(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m,$$

が成り立つとき, S は smoothly solvable である.

3.1 陰的な Hamilton 系

$\mathbb{R}^{2n}$ をスタンダードなシンプレクティック多様体としよう. すなわち $\mathbb{R}^{2n}$ には, 座標系を $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ として, Darboux-2 形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i$$

が備わっているとする.

$\mathbb{R}^{2n}$ の接束 $T\mathbb{R}^{2n}$ には, ω の非退化性によって, 自然にシンプレクティック形式が誘導される : θ を $T^*\mathbb{R}^{2n}$ の Liouville 形式とし, ω に対する内部積から得られる同型を $\flat\colon T\mathbb{R}^{2n} \to T^*\mathbb{R}^{2n}$, $v \mapsto \iota_v \omega$ とするとき,

$$\dot{\omega} := \flat^* d\theta = \sum_{i=1}^{n} d\dot{p}_i \wedge dx_i - d\dot{x}_i \wedge dp_i$$

は $T\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式になる.

定義 3.4. $T\mathbb{R}^{2n}$ の Lagrange 部分多様体 L, すなわち, $\omega|_L = 0$ となるような $2n$ 次元部分多様体を, **陰的な Hamilton 系**と呼ぶ.

接束から底空間への射影 $\pi\colon T\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ の陰的な Hamilton 系への制限 $\pi|_L$ が特異点を持たないとき, L は smoothly solvable となるので, $\pi|_L$ が特異点を持つときが重要になる.

次の補題によって, Lagrange 部分多様体は, 局所的に Morse 関数族で生成されることが知られている.

補題 3.5. $L \subset T\mathbb{R}^{2n}$ を Lagrange 部分多様体とし, $(x_0, p_0, \dot{x}_0, \dot{p}_0)$ を L の点とする. いま

$$\operatorname{corank} d(\pi|_L)(x_0, p_0, \dot{x}_0, \dot{p}_0) = k$$

であると仮定すると, $(x_0, p_0, \dot{x}_0, \dot{p}_0)$ の開近傍 $O \subset T\mathbb{R}^{2n}$ と, $(x_0, p_0, 0)$ の近傍 $W \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^k$ で定義された Morse 関数族 $G\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$L \cap O = \{(x, p, \dot{x}, \dot{p}) \in O \mid \text{there exists}\, \lambda \in \mathbb{R}^k \,\text{such that}\, (x, p, \lambda) \in W,\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_l}(x, p, \lambda),$$
$$\dot{x}_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}(x, p, \lambda),\ \dot{p}_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, p, \lambda),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq l \leq k\},$$

となる.

Morse 関数族 G で生成される Lagrange 部分多様体を L_G とかく. L_G の smooth solvability については次の定理がある.

定理 3.6 ([4],[5]). L_G が smoothly solvable であるための必要十分条件は, 線型方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_1}(x, p, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_k \partial \lambda_1}(x, p, \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_k}(x, p, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda_k \partial \lambda_k}(x, p, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\frac{\partial G}{\partial \lambda_1}, G\}(x, p, \lambda) \\ \vdots \\ \{\frac{\partial G}{\partial \lambda_k}, G\}(x, p, \lambda) \end{pmatrix}$$

が, カタストロフ集合 $C_G = \{(x, p, \lambda) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^k \mid \frac{\partial G}{\partial \lambda_i}(x, p, \lambda) = 0,\, 1 \leq i \leq k\}$ 上に滑らかな解 $(\mu_1(x, p, \lambda), \ldots, \mu_k(x, p, \lambda))$ をもつことである.

今後, Lagrange 部分多様体を生成する Morse 関数族は

$$F\colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad F(x, p, \lambda) = \sum_{j=1}^{k} a(x, p)\lambda_j + b(x, p)$$

であるとする.

L_F の smooth solvability については, 定理 3.6 を基に, 次の結果が知られている.

定理 3.7 ([4],[5]). L_F が smoothly solvable であるための必要十分条件は, 任意の i, j に対して

$$\{a_i, a_j\}(x, p) = 0, \quad \{b, a_j\}(x, p) = 0,$$

が $K = \{(x, p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid a_l(x, p) = 0,\, l = 1, \ldots, k\}$ 上で成り立つことである.

定理 3.6 の線型方程式が重要であることに注目して, 集合

$$\widetilde{S_F} := \{(x,p,\lambda) \in C_F \mid \sum_{j=1}^{k} \{a_i, a_j\}(x,p)\lambda_j = \{b, a_i\}(x,p), 1 \leq i \leq k\}$$

$$S_F := \phi_F(\widetilde{S_F})$$

と定義する. ただし, $\phi_F \colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^k \to T\mathbb{R}^{2n}$, $\phi_F(x,p,\lambda) = \left(x, p, \frac{\partial F}{\partial p}(x,p,\lambda), -\frac{\partial F}{\partial x}(x,p,\lambda)\right)$ である. S_F に関する smooth solvability については, 次の定理がある.

定理 3.8 ([5]). S_F は smoothly solvable な L_F の部分多様体となる; K 上で $\mathrm{rank}\{a_i, a_j\}(x,p) = r$ (一定) かつ

$$\begin{pmatrix} \{b, a_1\}(x,p) \\ \vdots \\ \{b, a_k\}(x,p) \end{pmatrix} \in (\{a_i, a_j\}(x,p))(\mathbb{R}^k),$$

が成り立つと仮定すると, S_F は smoothly solvable な L_F の部分多様体となる.

4 特異制御の存在性

ここで, 制御系の特異性の話題に戻ろう. 特異制御は命題 2.6 によって特徴付けられていた. これによって, 特異制御の存在の問題は, $H \colon T^*M \times U \to \mathbb{R}$ で定義される Morse 関数族で生成される, $T(T^*M)$ の Lagrange 部分多様体の solvable point の存在性の問題となる.

H で生成される Lagrange 部分多様体 L_H に smoothly solvable な部分多様体が存在すれば, L_H は solvable point を持つ. 定理 3.7 に対応して, 次の定理を得る.

定理 4.1. M 上のアファイン制御系 (α, f), $f(x,u) = g_0(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x)$ が特異制御を持つための十分条件は, 任意の i, j に対して

$$\left(\langle p, [g_i, g_j](x)\rangle\right)_{i,j} = 0, \quad \left(\langle p, [g_0, g_j](x)\rangle\right)_{j} = 0,$$

が $K \cap \{p \neq 0\} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \neq 0, \langle p, g_l(x)\rangle = 0, l = 1, \ldots, k\}$ 上で成り立つことである. ただし, $[\cdot,\cdot]$ はベクトル場の Lie 括弧積である.

備考 4.2. 定理の 4.1 に現れた行列 $\left(\langle p, [g_i, g_j](x)\rangle\right)_{i,j}$ は Goh 行列と呼ばれ, 特異制御の性質を表すのによく用いられている.

制御系の具体例を提示して, 定理 4.1 を適用してみよう.

例 4.3 ([3][6]). 転がるコインは, 最も簡単な非ホロノミック系として知られている. そのモデルは, **port-Hamilton** 系と呼ばれるアファイン制御系を使って次のようにかける ([3]); M は $x = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2)$ を座標に持つ, 5 次元多様体とする. M 上の関数を

$$h(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right),$$

で定義すると, 転がるコインの制御系は, ベクトル場 ${}^t g_1 = (0,0,0,1,0)$ と ${}^t g_2 = (0,0,0,0,1)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin q_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_1}(x) \\ \frac{\partial h}{\partial q_2}(x) \\ \frac{\partial h}{\partial q_3}(x) \\ \frac{\partial h}{\partial p_1}(x) \\ \frac{\partial h}{\partial p_2}(x) \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表される.

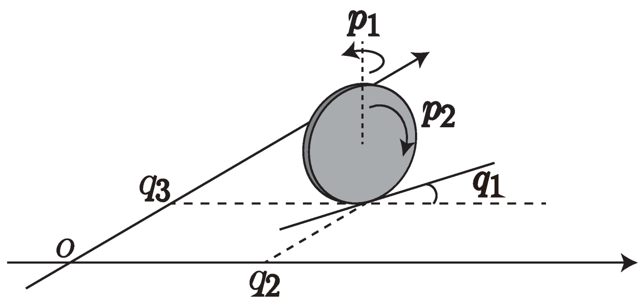

図 1　転がるコイン

q_1 は q_2-軸からコインの転がる方向への角度, (q_2, q_3) は平面の座標である. また, p_1 はスピンの角運動量を表し, p_2 は転がりの角運動量を表す.

この系の特異制御は, 拘束 Hamilton 系を解くことによって得られる ([6]) が, 定理??を用いて確かめることもできる.

転がるコインのモデルの, 制御パラメータに関係のないベクトル場を X_h とおく. $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \pi_1, \pi_2)$ を $T_x^* M$ の局所座標とすると, Goh 行列 $\Big(\langle \Psi, [g_i, g_j](x) \rangle\Big)_{i,j}$ と $\langle \Psi, [X_h, g_1](x) \rangle$, $\langle \Psi, [X_h, g_2](x) \rangle$ は

$$\Big(\langle \Psi, [g_i, g_j](x) \rangle\Big)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Psi, [X_h, g_1](x) \rangle = \psi_1, \quad \langle \Psi, [X_h, g_2](x) \rangle = \psi_2 + \psi_3$$

となるため, $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv -\psi_3$ のとき, 特異制御が存在する.

制御理論において, 特異制御に関する主な結果は, 特異制御の性質を表すものばかりであった. 定理 4.1 はほぼ定理 3.7 の言い換えに過ぎないが, 特異制御の存在の十分条件を示していることから, 制御理論の特異点の研究に意味のあるものであると言えよう.

参考文献

[1] Agrachev. A, Andrei. and Sachkov.L, Yuri., *Control theory from the geometric viewpoint*, Springer, (2004).

[2] Bonnard. B, Chyba. M., *Singular trajectories and their role in control theory*, Springer, (2003)

[3] Fujimoto. K, Sakurama. K and Sugie. T, Trajectory tracking of nonholonomic Hamiltonian systems via generalized canonical transformations, *European Journal of Control*, **10** (2004) 421-431.

[4] Fukuda. T, Janeczko. S, Singularities of implicit differential systems and their integrability, *Banach center publications*, **65** (2004), 23-47

[5] Fukuda. T, *A résumé on Workshop on singularities, geometry, topology and related topics (2014, September 1st - 3rd)*, unpublished.

[6] Tsuchida. A, Singular controls for port-Hamiltonian systems, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, to appear.