

結晶格子上的非対称ランダムウォークの 中心極限定理

山形大学理学部数理科学科 石渡 聡

Satoshi Ishiwata

Department of Mathematical Sciences

Yamagata University

岡山大学理学部数学科 河備 浩司

Hiroshi Kawabi

Department of Mathematics, Faculty of Science

Okayama University

東北大学大学院理学研究科数学専攻 小谷 元子

Motoko Kotani

Mathematical Institute

Tohoku University

1 研究の背景

グラフ上のランダムウォークの長時間挙動は数学のさまざまな分野で現在でも盛んに研究されている研究対象である. 特に d -次元標準格子 \mathbb{Z}^d 上のランダムウォークを考えると, グラフの適切なスケーリングのもとで推移確率がユークリッド空間上の Gauss 関数に収束させることができることを主張する中心極限定理は, 欠かすことのできない重要な結果である. Spitzer [13] が指摘しているように, このタイプの収束定理にはグラフの周期性が重要な役割をもっている. この観点から小谷, 白井, 砂田は, 離散調和解析 ([15]) を用いて結晶格子上のランダムウォークの長時間挙動を研究し, 数多くの結果を得た ([5, 6, 7, 8, 9, 10]). ここで向き付けられた局所有限連結グラフ $X = (V, E)$ が結晶格子であるとは, アーベル群 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$ が X に自由に作用し, 商グラフ $X_0 = \Gamma \backslash X$ が有限であるときをいう. 言い換えると, X はある有限グラフ X_0 のアーベル被覆グラフとなっているということである (Figure 1 参照). X_0 を有限の被覆に取り替えるなどすれば Γ はねじれがないと仮定しても一般性を失わないので今後 Γ は \mathbb{Z}^d と同型であると仮定する.

E 上の関数 $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で

$$\sum_{e \in E_x} p(e) = 1 \quad (x \in V), \quad p(e) + p(\bar{e}) > 0 \quad (e \in E), \quad p(\sigma e) = p(e) \quad (\sigma \in \Gamma)$$

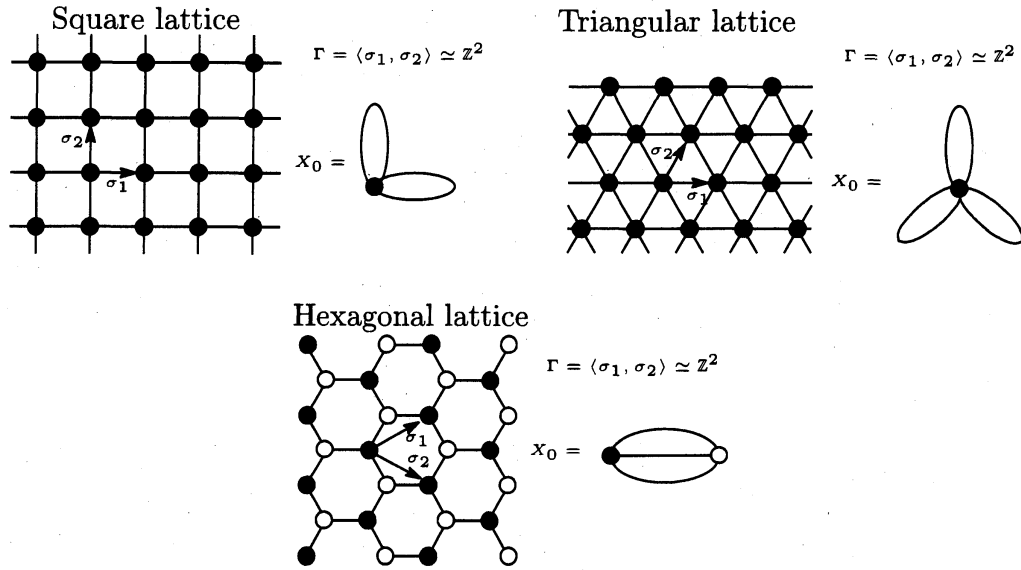


Figure 1: 結晶格子

を満たすものを考える. ただし \bar{e} は $e \in E$ の逆向きの辺, E_x は始点が $x \in V$ である辺全体を表す. また $e \in E$ の始点を $o(e)$, 終点を $t(e)$ と書く.

この p を 1 ステップの推移確率にもつ (X 上の) Markov 連鎖 $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ を考える. このとき $x \in V$ から出発した粒子が n ステップで $y \in V$ に到達する確率は

$$p(n, x, y) = \mathbb{P}_x(x_n = y) := \sum_{(e_1, \dots, e_n)} p(e_1) \cdots p(e_n)$$

で与えられる. ただし (e_1, \dots, e_n) は X 上の長さ n の路で, $o(e_1) = x, t(e_n) = y$ となるものである. この Markov 連鎖の推移作用素 L を

$$Lf(x) := \sum_{e \in E_x} p(e)f(t(e)) \quad (x \in V, f: V \rightarrow \mathbb{R})$$

で定めると, $\{L^n\}_{n=0}^\infty$ は離散半群となり,

$$L^n f(x) = \sum_{y \in V} p(n, x, y)f(y) \quad (x \in V)$$

が成立する.

V 上の Γ -不変な正值関数 m が存在し,

$$p(e)m(o(e)) = p(\bar{e})m(t(e)) \quad (e \in E)$$

を満たすとき, ランダムウォークは (m -) 対称であるという. 結晶格子上的対称ランダムウォークの長時間挙動に関しては推移確率の長時間漸近挙動を表す局所中心極限定理およ

び漸近展開 ([7])

$$p(n, x, y)m^{-1}(y) \sim a_0 n^{-d/2} \exp\left(-\frac{d_\Gamma^2(x, y)}{2n}\right) (1 + a_1(x, y)n^{-1} + a_2(x, y)n^{-2} + \dots)$$

も得られている. ここで $d_\Gamma(x, y)$ はグラフの標準埋め込み $\Phi_0 : X \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ を用いて得られる擬距離である. この漸近挙動から中心極限定理

$$L^{[nt]} P_{n^{-1/2}} f(x_n) = \sum_{y \in V} p([nt], x_n, y) f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \Phi_0(y)\right) \rightarrow e^{-t\Delta/2} f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

が成り立つ. ただし, f は無限遠で 0 となる $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の連続関数, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は $n^{-1/2} \Phi_0(x_n) \rightarrow \mathbf{x}$ を満たす V 上の点列, Δ は $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の (正值) ラプラシアン, $e^{-t\Delta/2}$ は $\Delta/2$ を生成作用素とする $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の熱半群である. この収束は Trotter の近似理論 [16] を用いた半群の収束定理 [5, 2] の特別な場合としても得られる. 確率論の言葉を用いれば, この収束はプロセス $\frac{1}{\sqrt{n}} \Phi_0(w_{[nt]})$ が $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の標準ブラウン運動に法則収束することを主張している.

2 主結果

本稿では上記の (1.1) を非対称ランダムウォークの場合に拡張した 2 種類の中心極限定理を [3] に沿って述べる. これらはいずれも対称ランダムウォークの場合は上記の主張と一致する. 以下では商グラフ X_0 に落としたランダムウォークの既約性を仮定する. (これはもとの X 上のランダムウォークの既約性よりも弱い仮定であることに注意せよ.) なお風見-内山 [4] や砂田 [14] では, X 上のランダムウォークの既約性条件の下で局所中心極限定理が得られており, この場合 1 種類目の中心極限定理はこれらの結果を経由しても得ることができる. (2 種類目の中心極限定理は不明である.)

定理の主張を述べるためにいくつかの記号を用意する. $H_1(X_0, \mathbb{R})$, $H^1(X_0, \mathbb{R})$ をそれぞれ X_0 上の 1 次ホモロジー群, 1 次コホモロジー群とする. 1-chain $C_1(X_0)$ の元 γ_p を,

$$\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m(o(e))e$$

で定めると $\partial\gamma_p = 0$ であるから 1 次ホモロジー群の元を定める. これを *homological direction* という. ここで m は L に関する正規化された不変測度 (${}^t L m = m$ を満たす X_0 上の関数で $\sum_{x \in V_0} m(x) = 1$ をみたすもの) である. ランダムウォークが対称であることと $\gamma_p = 0$ は同値であることに注意する. 位相空間 \mathcal{T} に対し, $C_\infty(\mathcal{T})$ を \mathcal{T} 上の無限遠で 0 となる \mathbb{R} 値連続関数全体とする.

1 つ目の中心極限定理を述べるために, $C_\infty(\Gamma \otimes \mathbb{R})$ に作用する推移-シフト作用素 \mathcal{L}_{γ_p} を

$$\mathcal{L}_{\gamma_p} f(x, \mathbf{z}) := \sum_{e \in E_x} p(e) f(t(e), \mathbf{z} + \gamma_p) \quad (x \in V, \mathbf{z} \in H_1(X_0, \mathbb{R}))$$

を導入する. $0 \leq \varepsilon \leq 1$ に対し, 関数の近似作用素 $P_\varepsilon : C_\infty(\Gamma \otimes \mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(X \times H_1(X_0, \mathbb{R}))$ を

$$P_\varepsilon f(x, \mathbf{z}) := f(\varepsilon(\Phi_0(x) - \rho_{\mathbb{R}}(\mathbf{z})))$$

で定める. ここで $\Phi_0: X \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ は

$$\sum_{e \in E_x} p(e) \{ \Phi_0(o(e)) - \Phi_0(t(e)) \} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad (x \in V)$$

を満たす変形された調和埋め込み, $\rho_{\mathbb{R}}: H_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ は Γ が結晶格子 X の被覆変換群であることから定まる自然な全射である. Φ_0 は平行移動を除いて一意的に定まることに注意する ([9]).

X_0 上の 1-形式 $C^1(X_0)$ の元 $\omega: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$-\sum_{e \in E_x} p(e)\omega(e) + \langle \gamma_p, \omega \rangle = 0 \quad (x \in V_0)$$

をみたすものを変形された調和 1-形式という. ここで $\langle \gamma_p, \omega \rangle$ は, $\gamma_p \in C_1(X_0)$ と $\omega \in C^1(X_0)$ の自然なカップリングである. 変形された調和 1-形式全体を $\mathcal{H}^1(X_0)$ とすると, $\mathcal{H}^1(X_0)$ には内積

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \sum_{e \in E_0} p(e)\omega_1(e)\omega_2(e)m(o(e)) - \langle \gamma_p, \omega_1 \rangle \langle \gamma_p, \omega_2 \rangle$$

が自然に定義される. (なお対称の場合を扱った [10, 7] では, 右辺に 1/2 をかけたものを内積としており, この影響で中心極限定理の主張に定数倍のずれが出ることに注意.) また, 離散版 Hodge-Kodaira の定理の非対称版により, $\mathcal{H}^1(X_0)$ は 1 次コホモロジー群 $H^1(X_0, \mathbb{R})$ と同一視される. 自然な全射 $\rho_{\mathbb{R}}: H_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ と合わせると, 次のような図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes \mathbb{R} & \xleftarrow{\rho_{\mathbb{R}}} & H_1(X_0, \mathbb{R}) \\ \uparrow \text{dual} & & \uparrow \text{dual} \\ \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) & \xrightarrow{t\rho_{\mathbb{R}}} & H^1(X_0, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^1(X_0) \subset C^1(X_0) \end{array}$$

これを通して $\mathcal{H}^1(X_0)$ 上の計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ に誘導した計量を Albanese 計量という. 我々はまず次の結果を得た.

Theorem 2.1 $0 \leq s < t$ と $f \in C_{\infty}(\Gamma \otimes \mathbb{R})$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{L}_{\gamma_p}^{[nt]-[ns]} P_{n-1/2} f - P_{n-1/2} e^{-\frac{t-s}{2}\Delta} f \right\|_{\infty} = 0$$

が成り立つ. ここで Δ は $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の Albanese 計量に関する正値ラプラシアンである. 特に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\Phi_0(x_n) - \rho_{\mathbb{R}}(\mathbf{z}_n)) = \mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R}$$

を満たす点列 $(x_n, \mathbf{z}_n) \in X \times H_1(X_0, \mathbb{R})$ と $f \in C_{\infty}(\Gamma \otimes \mathbb{R})$, $t > 0$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{\gamma_p}^{[nt]} P_{n-1/2} f(x_n, \mathbf{z}_n) = e^{-t\Delta/2} f(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \otimes \mathbb{R}} G_t(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.1)$$

が成立する. ここで

$$G_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|_{g_0}^2}{2t}\right) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R})$$

は熱方程式

$$\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2} \Delta u(t, x)$$

の基本解である.

つぎに $o_V \in V$ を $\Phi_0(o_V) = 0$ を満たすように固定し, $\Omega_{o_V}(X)$ を o_V を始点とする X 上の路のなす空間とする.

$$\xi_n(c) := \Phi_0(o(c(n+1))) \quad (n = 0, 1, \dots, c \in \Omega_{o_V}(X))$$

と置くと, $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上のランダムウォーク $(\Omega_{o_V}(X), \mathbb{P}_x, \{\xi_n\}_{n=0}^\infty)$ が得られる. また $t \geq 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し, 写像 $\mathbb{X}_t^{(n)} : \Omega_{o_V}(X) \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ を

$$\mathbb{X}_t^{(n)}(c) := \frac{1}{\sqrt{n}} (\xi_{[nt]}(c) - [nt] \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)) \quad (c \in \Omega_{o_V}(X))$$

で定めると, (2.1) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c \in \Omega_{o_V}(X)} f(\mathbb{X}_t^{(n)}(c)) \mathbb{P}_{o_V}(\{c\}) = \int_{\mathcal{W}} f(w_t) \mathcal{P}(dw)$$

と表すことができる. ここで \mathcal{P} は $\mathcal{W} := C_0([0, \infty), \Gamma \otimes \mathbb{R})$ 上の通常の Wiener 測度である. このとき $(\mathbb{X}_t^{(n)})_{t \geq 0}$ の線形補間として写像 $\mathcal{X}^{(n)} : \Omega_{o_V}(X) \rightarrow \mathcal{W}$ を

$$\mathcal{X}_t^{(n)}(c) := \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \xi_{[nt]}(c) + (nt - [nt]) (\xi_{[nt]+1}(c) - \xi_{[nt]}(c)) - nt \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \right\}, \quad t \geq 0$$

で定義する. $\mathcal{P}^{(n)}$ を, $\Omega_{o_V}(X)$ 上の測度 \mathbb{P}_{o_V} の $\mathcal{X}^{(n)}$ による押し出し測度とするとき, 以下の汎関数中心極限定理 (Donsker の不変原理) が成り立つ.

Theorem 2.2 $\mathcal{X}^{(n)}$ は $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上の原点を出発する標準ブラウン運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ に法則収束する. すなわち確率測度の列 $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は Wiener 測度 \mathcal{P} に $n \rightarrow \infty$ で弱収束する.

証明の方法は, Theorem 2.1 により有限次元分布の収束が得られるので, 確率測度の列 $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ がタイトであることを標準的手法で示すというものである.

つぎに2つ目の結果を述べる. (これに関連する結果は [1, 16] にある.) 結晶格子 X 上のランダムウォークを一つとり, その推移確率を p とする. 推移確率の族 $p_\varepsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) を

$$p_\varepsilon(e) := p_0(e) + \varepsilon q(e)$$

で定める. ここで

$$p_0(e) := \frac{1}{2} \left(p(e) + \frac{m(t(e))}{m(o(e))} p(\bar{e}) \right), \quad q(e) := \frac{1}{2} \left(p(e) - \frac{m(t(e))}{m(o(e))} p(\bar{e}) \right)$$

である. p_ε は, $p = p_1$ と m -対称な推移確率 p_0 を homological direction γ_{p_ε} が $\varepsilon \gamma_p$ と等しくなるように補間したものである. また p_ε に関する n ステップ推移確率を $p_\varepsilon(n, x, y)$, 推移作用素を L_ε と書く. 変形された調和実現 $\Phi_0^{(\varepsilon)}$ に対し, 近似写像 $P_\varepsilon : C_\infty(\Gamma \otimes \mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(X)$ を

$$P_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon \Phi_0^{(\varepsilon)}(x)),$$

で定める. このとき以下のタイプの中心極限定理が成り立つ.

Theorem 2.3 任意の $0 \leq s < t$ および $f \in C_\infty(\Gamma \otimes \mathbb{R})$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_{n^{-1/2}}^{[nt]-[ns]} P_{n^{-1/2}} f - P_{n^{-1/2}} e^{-(t-s)(\frac{1}{2}\Delta_0 - \langle \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p), \nabla_0 \rangle_{g_0^{(0)}})} f \right\|_\infty = 0$$

が成り立つ. ここで Δ_0 は m -対称な確率 p_0 に関する Albanese 計量 $g_0^{(0)}$ の正值ラプラシアンである. 特に, $n^{-1/2} \Phi_0^{(n^{-1/2})}(x_n) = \mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R}$ を満たす V 上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ に対し,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in V} p_{n^{-1/2}}([nt], x_n, y) f(n^{-1/2} \Phi_0^{(n^{-1/2})}(y)) &= e^{-t(\frac{1}{2}\Delta_0 - \langle \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p), \nabla_0 \rangle_{g_0^{(0)}})} f(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Gamma \otimes \mathbb{R}} H_t(\mathbf{x} - y) f(y) dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

が成り立つ. ここで

$$H_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)t|_{g_0^{(0)}}^2}{2t}\right) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R})$$

はドリフトのついた熱方程式

$$\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2} \Delta_0 u(t, x) + \langle \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p), \nabla_0 u(t, x) \rangle_{g_0^{(0)}}$$

の基本解である.

この定理からも先の汎関数中心極限定理と同様な極限定理が得られる. $o_V \in V$ を, 任意の $0 \leq \varepsilon \leq 1$ に対して $\Phi_0^{(\varepsilon)}(o_V) = 0$ を満たす頂点とする.

$$\xi_n^{(\varepsilon)}(c) := \Phi_0^{(\varepsilon)}(o(c(n+1))) \quad (n = 0, 1, \dots, c \in \Omega_{o_V}(X))$$

とすると, p_ε に関する $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ 上のランダムウォーク $(\Omega_{o_V}(X), \mathbb{P}_{o_V}^{(\varepsilon)}, \{\xi_n^{(\varepsilon)}\}_{n=0}^\infty)$ が得られる. また $t \geq 0, n \in \mathbb{N}, 0 \leq \varepsilon \leq 1$ に対し, 写像 $Y_t^{(\varepsilon, n)} : \Omega_{o_V}(X) \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{R}$ を

$$Y_t^{(\varepsilon, n)}(c) := \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{[nt]}^{(\varepsilon)}(c) \quad (c \in \Omega_{o_V}(X))$$

で定めると, (2.2) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c \in \Omega_{ov}(X)} f(\mathbb{Y}_t^{(n^{-1/2}, n)}(c)) \mathbb{P}_{ov}^{(n^{-1/2})}(\{c\}) = \int_{\mathcal{W}_{(0)}} f(w_t) \mathcal{Q}(dw)$$

と表すことができる. ここで \mathcal{Q} はドリフト付き Brown 運動 $(B_t + \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)t)_{t \geq 0}$ により得られる経路空間 $\mathcal{W}_{(0)} := C_0([0, \infty), (\Gamma \otimes \mathbb{R})_{(0)})$ 上の確率測度である.

このとき, $(\mathbb{Y}_t^{(\varepsilon, n)})_{t \geq 0}$ の線形補間として写像 $\mathcal{Y}^{(\varepsilon, n)} : \Omega_{ov}(X) \rightarrow \mathcal{W}_{(0)}$ を

$$\mathcal{Y}_t^{(\varepsilon, n)}(c) := \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \xi_{[nt]}^{(\varepsilon)}(c) + (nt - [nt]) (\xi_{[nt]+1}^{(\varepsilon)}(c) - \xi_{[nt]}^{(\varepsilon)}(c)) \right\}, \quad t \geq 0, c \in \Omega_{ov}(X)$$

で定める. $\mathcal{Q}^{(\varepsilon, n)}$ を測度 \mathbb{P}_{ov} の $\mathcal{Y}^{(\varepsilon, n)}$ による押し出し測度とすると, 次のような汎関数中心極限定理も成り立つ.

Theorem 2.4 $\mathcal{Y}^{(n^{-1/2}, n)}$ は $(\Gamma \otimes \mathbb{R})_{(0)}$ 上の原点を出発するドリフト付き Brown 運動 $(B_t + \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)t)_{t \geq 0}$ に法則収束する. すなわち確率測度の列 $\{\mathcal{Q}^{(n^{-1/2}, n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathcal{Q} に $n \rightarrow \infty$ で弱収束する.

Theorem 2.3 と同様の議論により有限次元分布の収束が得られるので, 確率測度の列 $\{\mathcal{Q}^{(n^{-1/2}, n)}\}_{n=1}^{\infty}$ がタイトであることを (Albanese 計量 $g_0^{(\varepsilon)}$ の ε に関する連続性に気を配りながら) 示すというのが証明の大まかな手順である. なお推移作用素 L_{ε} に摂動理論 ([11]) を適用することで計量の連続性は示される.

References

- [1] R. Durrett: Stochastic Calculus. A Partial Introduction. CRC Press, 1996.
- [2] S. Ishiwata, *A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), pp.837–853.
- [3] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: *Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices*, In preparation.
- [4] T. Kazami and K. Uchiyama, *Random walks on periodic graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), pp. 6065–6087.
- [5] M. Kotani: *A central limit theorem for magnetic transition operators on a crystal lattice*, J. London Math. Soc. **65** (2002), pp. 464–482.
- [6] M. Kotani: *An asymptotic of the large deviation for random walks on a crystal lattice*, Contemp. Math. **347**(2004), pp. 141–152.
- [7] M. Kotani and T. Sunada: *Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel*, Comm. Math. Phys. **209** (2000), pp. 633–670.

- [8] M. Kotani and T. Sunada: *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2000), pp. 1–20.
- [9] M. Kotani and T. Sunada: *Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice*, Math. Z. **254** (2006), pp. 837–870.
- [10] M. Kotani, T. Shirai and T. Sunada: *Asymptotic behavior of the transition probability of a random walk on an infinite graph*, J. Funct. Anal. **159** (1998), pp. 664–689.
- [11] W. Parry and M. Pollicott: *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187-188** (1990).
- [12] T. Shirai: *Long time behavior of the transition probability of a random walk with drift on an abelian covering graph*, Tohoku Math. J. **55** (2003), pp. 255–269.
- [13] F. Spitzer: *Principles of Random Walk*, Princeton, NJ: D. Van. Nostrand, 1964.
- [14] T. Sunada: *Discrete Geometric Analysis*, Lecture Note at Institut Henri Poincaré (2002), Humbolt University (2006), Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (2007).
- [15] T. Sunada: *Topological Crystallography with a View Towards Discrete Geometric Analysis*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences **6**, Springer Japan, 2013.
- [16] H. F. Trotter: *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math. **8** (1958), pp. 887–919.