数理解析研究所講究録
第1952巻 2015年 123-127

Local time penalizations with various clocks

Christophe Profeta (Université d'Evry-Val-d'Essonne)
矢野 孝次 (京都大学大学院理学研究科)
矢野 裕子 (京都産業大学理学部)

1 問題

$[0,\infty)$ を動く原点反射壁の一次元拡散過程に対し，局所時間処罰問題

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau)]}, \quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau);\tau>t]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau);\tau>t]} \tag{1.1}$$

を考察する．但し，t は固定時刻，F_t は試験汎関数 (有界 $\mathcal{F}_t$-可測汎関数)，f は非負可測関数，L_t は原点局所時間とする．極限において動かす τ は，無限大に向かうランダム時刻の特定の系に添うものとし，これを**時計 (clock)** と呼ぶこととする．

この問題のためには，極限

$$\lim_{\tau\to\infty}\rho(\tau)\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)], \quad \lim_{\tau\to\infty}\rho(\tau)\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau);\tau>t] \tag{1.2}$$

が自明でない量に収束するような関数 $\rho(\tau)$ を見つければよい．実際，$F_t=1$ としたものと比をとれば (1.1) が得られるからである．さらに，(1.2) が任意の試験汎関数に対して収束するためには，$\tau\to\infty$ のとき

$$\rho(\tau)\mathbb{P}_x[f(L_\tau)|\mathcal{F}_t], \quad \rho(\tau)\mathbb{P}_x[f(L_\tau)1_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t] \tag{1.3}$$

の ($\mathbb{P}_x$ に関する)L^1 収束が十分である．また逆に，もし (1.3) が概収束することが分かっているならば，(1.3) の L^1 収束は必要でもある (Scheffé の補題による)．

関数 f として原点の定義関数をとると $f(L_\tau)=1_{\{\tau\le T_0\}}$ となるから，処罰問題は原点回避条件付けの問題を含んでいる．原点回避条件付けの問題については，論文 [8] および報告 [9] を参照されたい．

もともとの局所時間処罰問題は，本稿の文脈では時計 τ として固定時刻を採用することに相当するが，Roynette–Vallois–Yor により詳しく調べられた問題で，ブラウン運動に対しては [4],[6]，ベッセル過程に対しては [5] で論ぜられている．また，一次元拡散過程に対しては，Salminen–Vallois [7] および Profeta [1],[2] により調べられている．

本稿では，論文 [3] より，時計 τ として指数時刻，到達時刻，逆局所時間を採用したときの結果をまとめる．

2 一次元拡散過程 (1)

一次元拡散過程であって，左端点がregular-reflectingなものを考える．さらに，議論の単純化のため，左端点が再帰的であり，右端点が ∞ であってentranceまたはnaturalの場合のみを考える．生成作用素のFeller標準形を D_mD_s とする．但し，関数 $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は狭義増加，右連続，$m(0)=0$ であるとし，$s(\infty)=\infty$ とする．右端点の状況により以下の3つの場合に分けられる:

(i) ∞ がtype-1-natural: $\int^{\infty} s(x)\mathrm{d}m(x)=\infty$ かつ $m\circ s^{-1}(\infty)=\infty$;

(ii) ∞ がtype-2-natural: $\int^{\infty} s(x)\mathrm{d}m(x)=\infty$ かつ $m\circ s^{-1}(\infty)<\infty$;

(iii) ∞ がentrance: $\int^{\infty} s(x)\mathrm{d}m(x)<\infty$ (必然的に $m\circ s^{-1}(\infty)<\infty$).

なお，$m(\infty)=\infty$ のとき (∞ がtype-1-naturalのとき)0は零再帰的，$m(\infty)<\infty$ のとき (∞ がtype-2-naturalまたはentranceのとき)0は正再帰的である．

スケール変換によって，natural scale，すなわち $s(x)=x$ とした過程を調べる．

典型的な例を挙げておく．
(i) $0<\alpha<1$ に対し，指数 $-\alpha$(あるいは次元 $2-2\alpha$) の片側反射壁ベッセル過程 $\widetilde{X}$ は，生成作用素が

$$\widetilde{L}f=\frac{1}{2}\left(f''-\frac{2\alpha-1}{x}f'\right)\quad \text{on } C_c((0,\infty)) \tag{2.1}$$

で特徴づけられる．そのspeed measureとscale functionはそれぞれ

$$\widetilde{m}(x)=\frac{2}{2-2\alpha}x^{2-2\alpha},\quad \widetilde{s}(x)=\frac{1}{2\alpha}x^{2\alpha} \tag{2.2}$$

で与えられる．このとき，$X=\widetilde{s}(\widetilde{X})$ はベッセル過程 $\widetilde{X}$ と本質的に同じであり，natural scaleかつspeed measureが $m=\widetilde{m}\circ\widetilde{s}^{-1}$ で与えられる．この場合，

$$\int^{\infty} x\mathrm{d}m(x)=\int^{\infty}\widetilde{s}(x)\mathrm{d}\widetilde{m}(x)=\infty \tag{2.3}$$

であるから，∞ はtype-1-naturalである．
(ii) 定数 $c>0$ と $0<\nu\leq 2$ に対し，生成作用素が

$$\widetilde{L}f=\frac{1}{2}(f''-c\nu x^{\nu-1}f')\quad \text{on } C_c((0,\infty)) \tag{2.4}$$

で特徴づけられる一次元拡散過程 $\widetilde{X}$ を考える．このとき

$$\widetilde{m}(x)=2\int_0^x \mathrm{e}^{-cy^{\nu}}\mathrm{d}y,\quad \widetilde{s}(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{cy^{\nu}}\mathrm{d}y \tag{2.5}$$

であり，$X=\widetilde{s}(\widetilde{X})$ はnatural scaleかつspeed measureが $m=\widetilde{m}\circ\widetilde{s}^{-1}$ で与えられる．この場合，簡単な計算により，∞ はtype-2-naturalであることがわかる．
(iii) 上で $\nu>2$ とすると，∞ はentranceである．

(1) この節の内容は報告 [9] と重複するが，本稿をself-containedにするためにそのままの形で述べる．

3 局所時間処罰問題

$q>0$に対し，$\phi_q(x)$と$\psi_q(x)$を次の積分方程式の解とする:

$$\phi_q(x) = 1 + q\int_0^x dy \int_{(0,y]} \phi_q(z)m(dz), \tag{3.1}$$

$$\psi_q(x) = x + q\int_0^x dy \int_{(0,y]} \phi_q(z)m(dz). \tag{3.2}$$

こうして

$$H(q) = \lim_{x\uparrow\ell} \frac{\psi_q(x)}{\phi_q(x)} \tag{3.3}$$

とおく．$H(q)$はスペクトル測度のStieltjes変換になっている．mに関するレゾルベント密度$r_q(x,y)$は次で与えられる:

$$r_q(x,y) = r_q(y,x) = H(q)\phi_q(x)\left(\phi_q(y) - \frac{\psi_q(y)}{H(q)}\right), \quad 0 \le x \le y < \infty. \tag{3.4}$$

また，修正0-レゾルベントが存在して次で与えられる:

$$h_0(x) := \lim_{q\downarrow 0}\{r_q(0,0) - r_q(0,x)\} = x - \frac{1}{m(\infty)}\int_0^x m(y)\mathrm{d}y. \tag{3.5}$$

また，点aにおける局所時間L_t^aは次の条件を満たすように選ぶ:

$$\mathbb{P}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}L_t^a\right] = \frac{r_q(x,a)}{r_q(a,a)}. \tag{3.6}$$

特に$a=0$のとき，L_t^0をL_tと表す．また，逆局所時間を次で表す:

$$\eta_u^a = \inf\{t \ge 0 : L_t^a > u\}. \tag{3.7}$$

以下では，fは非負かつ$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$とし，$x \ge 0$とする．

定理 3.1. $\boldsymbol{e}_q$を独立な平均$1/q$の指数時刻とするとき，a.s.かつin L^1で

$$H(q)\mathbb{P}_x[f(L_{\boldsymbol{e}_q})|\mathcal{F}_t] \underset{q\downarrow 0}{\longrightarrow} M_t^{h_0} \quad \text{and} \quad H(q)\mathbb{P}_x[f(L_{\boldsymbol{e}_q})1_{\{\boldsymbol{e}_q>t\}}|\mathcal{F}_t] \underset{q\downarrow 0}{\longrightarrow} N_t^{h_0} \tag{3.8}$$

が成り立つ．但し，

$$M_t^{h_0} = h_0(X_t)f(L_t) + \int_{L_t}^\infty f(u)\mathrm{d}u, \tag{3.9}$$

$$N_t^{h_0} = h_0(X_t)f(L_t) + \int_{L_t}^\infty f(u)\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{f(L_u)}{m(\infty)}\mathrm{d}u \tag{3.10}$$

とした．従って特に，$M_t^{h_0}$はmartingaleであり，(3.10)は$N_t^{h_0}$のDoob分解を与える．

定理 3.2. T_a を a への到達時刻とするとき，a.s. で

$$a\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})|\mathcal{F}_t] \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} M_t^s \quad \text{and} \quad a\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})1_{\{T_a>t\}}|\mathcal{F}_t] \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} M_t^s \tag{3.11}$$

が成り立ち，後者は L^1 収束の意味でも成立する．但し，

$$M_t^s = X_t f(L_t) + \int_{L_t}^{\infty} f(u)\mathrm{d}u \tag{3.12}$$

とした．さらに，∞ が type-1,2-natural のとき (3.11) の前者も L^1 収束の意味で成立し，M_t^s は martingale である．

注 3.3. ∞ が entrance のとき，M_t^s は local martingale であるが，一般に (例えば $f(0)>0$ のとき)martingale ではない．

時計 τ を逆局所時間 η_u^a にとるとき，(Clock 1) u を固定して $a\to\infty$ とする方法と，(Clock 2) a を固定して $u\to\infty$ とする方法 (2) がある．

定理 3.4 (Clock 1). a.s. で

$$a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})|\mathcal{F}_t] \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} M_t^s \quad \text{and} \quad a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})1_{\{\eta_u^a>t\}}|\mathcal{F}_t] \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} M_t^s \tag{3.13}$$

が成り立ち，後者は L^1 収束の意味でも成り立つ．さらに，∞ が type-1,2-natural のとき (3.13) の前者も L^1 収束の意味で成立する．

a を固定して $u\to\infty$ とする方法では，特別な f に対してのみ結果を得た．

定理 3.5 (Clock 2). $\beta>0$ を定数として $f(u)=\mathrm{e}^{-\beta u}$ とおく．このとき，$\rho(u)=\exp(\frac{\beta u}{1+\beta a})$ として，a.s. かつ in L^1 で

$$\rho(u)\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})|\mathcal{F}_t] \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} M_t^{\beta,a} \quad \text{and} \quad \rho(u)\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})1_{\{\eta_u^a>t\}}|\mathcal{F}_t] \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} M_t^{\beta,a} \tag{3.14}$$

が成り立つ．但し，

$$M_t^{\beta,a} = \frac{1+\beta(X_t\wedge a)}{1+\beta a}\exp\left(\frac{\beta}{1+\beta a}L_t^a - \beta L_t\right) \tag{3.15}$$

とした．また，$\beta=\infty$ に相当する場合として $f(u)=1_{\{u=0\}}$ のとき，$\rho(u)=\exp(\frac{u}{a})$ として，a.s. かつ in L^1 で (3.14) が成立する．但し，

$$M_t^{\infty,a} = \frac{X_t\wedge a}{a}\exp\left(\frac{1}{a}L_t^a\right)1_{\{T_0>t\}} \tag{3.16}$$

とした．

参考文献

[1] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 46(3):681–718, 2010.

[2] C. Profeta. Penalizing null recurrent diffusions. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 69, 23, 2012.

[3] C. Profeta, K. Yano, and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. In preparation.

[4] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.

[5] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Penalizing a BES(d) process ($0 < d < 2$) with a function of its local time. V. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 45(1):67–124, 2008.

[6] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[7] P. Salminen and P. Vallois. On subexponentiality of the Lévy measure of the diffusion inverse local time; with applications to penalizations. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 67, 1963–1991, 2009.

[8] K. Yano and Y. Yano. On h-transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero. To appear in Séminaire de Probabilités. arXiv:1409.3112.

[9] 矢野裕子 矢野孝次. 一次元拡散過程に対する原点回避条件付け. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (19), 統計数理研究所共同研究リポート 350, pages 16–20, 2015.

Christophe Profeta (Laboratoire d'Analyse et Probabilités, Université d'Evry-Val-d'Essonne)
Kouji Yano (Graduate School of Science, Kyoto University)
Yuko Yano (Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University)