数理解析研究所講究録
第 1952 巻 2015 年 157-164

Vasicek モデルのひとつの拡張

広島大学・大学院理学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

備前緑陽高校　森内 慎吾 (Shingo Moriuchi)
Bizen-Ryokuyou High School

広島大学・大学院理学研究科　仲村 勇祐 (Yusuke Nakamura)
Graduate School of Science, Hiroshima University

1 イントロダクション

Vasicek モデル ([6]) は古典的な短期金利モデルであり，短期金利過程 $\{r(t)\}$ を記述する次の確率微分方程式 (SDE) により定義される：

$$dr(t)=\{a-br(t)\}dt+\sigma dW^{*}(t) \qquad (t\geq 0). \tag{1.1}$$

ここで，a, b, σ は正の定数で，$\{W^{*}(t)\}$ は同値マルチンゲール測度の下でのブラウン運動である．我々は，記憶の効果を持つ Vasicek タイプの短期金利モデル $\mathcal{M}$ を導入する．このモデルはいくつかのよい性質を持つ．

上記の Vasicek タイプ・モデル $\mathcal{M}$ は，(1.1) のブラウン運動 $\{W^{*}(t)\}$ を，[1, 2, 3] によって研究された確率過程 $\{Z(t)\}$ に置き換えることにより定義される (下の定義 2.1 を見よ)．過程 $\{Z(t)\}$ はガウス・定常増分過程であり，記憶の効果を表すパラメータ p, q を持つ．過程 $\{Z(t)\}$ は，同じガウス・定常増分過程であるフラクショナル・ブラウン運動等とは異なり，伊藤過程でもある．このことは，モデル $\mathcal{M}$ に対しては，通常の確率解析 (伊藤解析) を適用できることを意味する．

我々は，モデル $\mathcal{M}$ と $0\leq t\leq T$ に対して，T-債券とよばれる満期が T のゼロ・クーポン債の，時刻 t における価格 $P(t,T)$ の明示的な表現を導く (下の定理 3.1)．この結果とフォワード測度を用いるよく知られた方法 (cf. [5], [4, 第 3.2.4 節]) により，ヨーロピアン・タイプの債券オプションに対する明示的な表現も導く (下の命題 3.4)．

$P(t,T)$ に対する明示的な表現式は，

$$Y(t,T)=-\frac{\log P(t,T)}{T-t} \qquad (t<T), \tag{1.2}$$

あるいは $P(t,T)=\exp[-(T-t)Y(t,T)]$，によって定義されるイールド $Y(t,T)$ に対する明示的な表現式も与える (下の定理 3.2)．他の短期金利モデルの場合と同様に，イールド曲線 $T\mapsto Y(0,T)$ を現実の市場データにフィットさせることにより，モデル $\mathcal{M}$ のパラメータの推定を行うことができる．新しく加わったパラメータ p と q により，モデル $\mathcal{M}$ では，古典的な Vasicek モデルよりも良いフィットを得ることができる (第 5 節)．

モデル $\mathcal{M}$ は記憶の効果を持つ．言い換えるならば，モデル $\mathcal{M}$ は非マルコフ・モデルである．一般に，非マルコフの金利モデルは，数値計算を実行することが難しいという欠点を持つ．幸いにして，モデル $\mathcal{M}$ はこの欠点を免れている．これは，ある付随する 2

次元マルコフ過程の存在による．この付随するマルコフ過程のおかげで，我々は通常の数値計算法を適用できることになる．実際，我々は，この付随するマルコフ過程を用いてモデル $\mathcal{M}$ に対するアフィン期間構造や期間構造方程式 (cf. [4, 第 3 章]) の類似物を導き (下の定理 4.1 と命題 4.2)，それらに基づくヨーロピアン・タイプの条件付き請求権の価格の数値計算法を示す (第 4 節)．

2 モデル

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は，完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上の標準ブラウン運動 $\{W^*(t)\}_{t\geq 0}$ から生成されるフィルトレーションの Q-augmentation とする．

定義 2.1. 条件

$$0 < q < \infty, \quad -q < p < \infty$$

を満たす実数 p, q に対し，確率過程 $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ を次で定義する：

$$Z(t) = W^*(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s pe^{-(p+q)(s-\tau)} l(\tau) dW^*(\tau) \right\} ds \qquad (t \geq 0).$$

ここで，正値関数 l は次で定義する：

$$l(\tau) := 1 - \frac{2qp}{(p+2q)^2 e^{2q\tau} - p^2} \qquad (\tau \geq 0).$$

すぐに分かるように，$\{Z(t)\}$ は連続ガウス過程かつ $\{\mathcal{F}_t\}$-発展的伊藤過程である．さらに，自明ではないが，$\{Z(t)\}$ は実は定常増分過程でもある．実際，$\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を別の確率空間 $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$ 上の標準ブラウン運動とするとき，

$$X(t) = \hat{W}(t) - \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^s pe^{-(p+q)(s-\tau)} d\hat{W}(\tau) \right\} ds \qquad (t \geq 0)$$

で定義される定常増分過程 $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ に対し，$\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ の Q 下での法則は，$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ の $\hat{Q}$ の下での法則に等しい ([2] の Theorem 5.2 と Example 5.3 および [3] の Section 2 を参照せよ)．もし $p = 0$ ならば，$\{Z(t)\}$ はブラウン運動 $\{W^*(t)\}$ に帰着する．

$a, b, \sigma \in (0, \infty)$ に対して，次の Vasicek タイプの SDE を考える：

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dZ(t), \quad t \geq 0, \qquad r(0) \in [0, \infty). \tag{2.1}$$

(2.1) の一意の強解は，次のように表される：

$$r(\tau) = e^{-b(\tau-t)} r(t) + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(\tau-t)}) + \sigma \int_t^\tau e^{-b(\tau-s)} dZ(s) \qquad (0 \leq t \leq \tau). \tag{2.2}$$

短期金利過程 $\{r(t)\}_{t\geq 0}$ が，(2.1) あるいは (2.2) に従う短期金利モデル $\mathcal{M}$ を考える．我々はマネー・マーケット・アカウント過程 $\{B(t)\}$ を次で定義する：

$$B(t) := e^{\int_0^t r(s)ds} \qquad (t \geq 0).$$

$T \in (0, \infty)$，$0 \leq t \leq T$ に対し，T-債券の時間 t における価格を $P(t, T)$ とする．Q は，

$$\tilde{P}(t, T) := \frac{P(t, T)}{B(t)} \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{2.3}$$

が $\{Q, \mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールになるという意味での，$\mathcal{M}$ の同値マルチンゲール測度であるとみなす．すると，次が成り立つ：

$$P(t,T) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \qquad (0 \le t \le T). \tag{2.4}$$

以上のような金利モデルの一般論については，[4, 第 3 章] を見よ．

注意 1. $p=0$ ならば，$Z(t) = W^*(t)$ より $\mathcal{M}$ は古典的な Vasicek モデルに帰着する．

3 債券と債券オプションの価格

(2.1) によって定義される短期金利過程 $\{r(t)\}$ は非マルコフであるが，モデル $\mathcal{M}$ において $P(t,T)$ は明示的な表現を持つ．この結果を述べるために，次の関数を定義する：

$$m(t) := \int_0^t pe^{-(p+q)s}\left\{1 - e^{-b(t-s)}\right\} ds.$$

定理 3.1. 次が成り立つ：

$$P(t,T) = \exp\{-A(t,T) - C(t,T)r(t) + U(t,T)\} \qquad (0 \le t \le T).$$

ここで，

$$\begin{aligned}
C(t,T) &:= \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}, \\
A(t,T) &:= \frac{a}{b}\{T - t - C(t,T)\} - \frac{\sigma^2}{2b^2}\int_0^{T-t}\left\{m(s) + e^{-bs} - 1\right\}^2 ds \\
&\qquad - \frac{\sigma^2 q m^2(T-t)}{b^2\{(p+2q)^2e^{2qt} - p^2\}}, \\
U(t,T) &:= \frac{\sigma(p+2q)^2e^{qt}m(T-t)}{b\{(p+2q)^2e^{2qt} - p^2\}}\int_0^t\left(e^{qs} - \frac{p}{p+2q}e^{-qs}\right) dZ(s).
\end{aligned}$$

定理 3.1 から，(1.2) で定義されるイールド $Y(t,T)$ に対する次の定理が得られる．

定理 3.2. 次が成り立つ：

$$Y(t,T) = \frac{A(t,T)}{T-t} + \frac{C(t,T)}{T-t}r(t) - \frac{U(t,T)}{T-t} \qquad (0 \le t < T).$$

特に，

$$Y(0,T) = \frac{A(0,T)}{T} + \frac{C(0,T)}{T}r(0) \qquad (T > 0). \tag{3.1}$$

$\tilde{P}(t,T)$ は (2.3) で定義されていたことを思い出そう．

命題 3.3. $\{\tilde{P}(t,T)\}_{0\le t\le T}$ は，*SDE*

$$d\tilde{P}(t,T) = v(t,T)\tilde{P}(t,T)dW^*(t) \qquad (0 \le t \le T) \tag{3.2}$$

を満たす．ここで $v(t,T)$ は次で定義される確定的な関数である：

$$v(t,T) := \frac{\sigma}{b}\left\{e^{-b(T-t)} - 1 + l(t)m(T-t)\right\} \qquad (0 \le t \le T).$$

T-債券の上に書かれた満期 $S \in (0,T)$，行使価格 $K \in (0,\infty)$ のヨーロピアン・コール・オプション C を考える．$\pi_C(0)$ を C の時間 0 における価格とする：

$$\pi_C(0) = E^Q\left[e^{-\int_0^S r(s)ds}(P(S,T)-K)_+\right].$$

ここで，$(x)_+ := \max(x,0)$ である．Φ を標準正規分布の分布関数とする:

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)y^2} dy.$$

命題 3.3 とフォワード測度を用いる方法 (cf. [5], [4, 第 3.2.4 節]) により，直ちに次が得られる．

命題 3.4. 次が成り立つ：

$$\pi_C(0) = P(0,T)\Phi(d_+) - KP(0,S)\Phi(d_-).$$

ここで，

$$\begin{aligned}
d_+ &:= \frac{1}{\sqrt{\Sigma^2(S)}}\left\{\log\left(\frac{P(0,T)}{KP(0,S)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2(S)\right\}, \\
d_- &:= d_+ - \sqrt{\Sigma^2(S)}, \qquad \Sigma^2(S) := \int_0^S v_{S,T}^2(t)dt, \\
v_{S,T}(t) &:= \frac{\sigma}{b}\left\{e^{-b(T-t)} - e^{-b(S-t)} + l(t)(m(T-t) - m(S-t))\right\}.
\end{aligned}$$

4 2次元マルコフ過程への埋め込み

確率過程 $\{u(t)\}$ を次で定義する:

$$u(t) := \int_0^t e^{(p+q)s} l(s) dW^*(s) \qquad (t \geq 0).$$

すると，2次元確率過程 $\{(r(t), u(t))^{\mathrm{T}}\}$ は次の SDE を満たすことがわかる：

$$d\begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & \sigma p e^{-(p+q)t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right\} dt + \begin{pmatrix} \sigma \\ e^{(p+q)t} l(t) \end{pmatrix} dW^*(t).$$

従って $\{(r(t), u(t))^{\mathrm{T}}\}$ は2次元マルコフ過程であるので，(2.4) によって定義される $P(t,T)$ は $P(t,T) = F(t, r(t), u(t); T)$ という形の表現を持つはずである．次の定理はそのような明示表現を与える．この表示は，モデル $\mathcal{M}$ に対する**アフィン期間構造** (cf. [4, 第 3.3.2 節]) の類似物とみなすことができる．

定理 4.1. 次が成り立つ：

$$P(t,T) = F(t, r(t), u(t); T) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

ここで，

$$\begin{aligned}
F(t,x,y;T) &:= e^{-A(t,T) - C(t,T)x + D(t,T)y} \qquad ((t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\
D(t,T) &:= \frac{\sigma}{b} e^{-(p+q)t} m(T-t).
\end{aligned}$$

モデル $\mathcal{M}$ におけるヨーロピアン・タイプの条件付き請求権については，次が**期間構造方程式** (cf. [4, 第3.3.1節]) の役割を果たす．

命題 4.2. $S \in (0, \infty)$ とし，$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $G : [0, S] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続とする．G は $C^{1,2,2}([0, S) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に属し，次を満たすと仮定する：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) + \mathcal{L}G(t, x, y) = 0 \qquad ((t, x, y) \in [0, S) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ G(S, x, y) = g(x, y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}). \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，

$$\mathcal{L}G := \frac{\sigma^2}{2} G_{xx} + \sigma e^{(p+q)t} l(t) G_{xy} + \frac{\{e^{(p+q)t} l(t)\}^2}{2} G_{yy} + \left\{a - bx - p\sigma e^{-(p+q)t} y\right\} G_x - xG.$$

さらに，

$$\int_0^S E^Q \left[e^{-2\int_0^t r(s)ds} \{\Delta G(t, r(t), u(t))\}^2 \right] dt < \infty$$

が成り立つと仮定する．但し，

$$\Delta G := \sigma G_x + e^{(p+q)t} l(t) G_y$$

とする．この時，次が成り立つ：

$$E^Q \left[e^{-\int_t^S r(s)ds} g(r(S), u(S)) \middle| \mathcal{F}_t \right] = G(t, r(t), u(t)) \qquad (0 \le t \le S). \tag{4.2}$$

$0 < S \le T$ と連続関数 $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ に対して，満期が S でペイオフが $h(P(S, T))$ のヨーロピアン・タイプの条件付き請求権を考える．$h(P(S, T)) = h(F(S, r(S), u(S); T))$ より，時刻 $t \in [0, S]$ におけるその価格は，$g(x, y) := h(F(S, x, y; T))$ のときの (4.2) の左辺により与えられる．従って，命題 4.2 より，その価格評価は PDE (4.1) を数値的に解くことに帰着される．

例. ヨーロピアン・コール・オプション $(P(S, T) - K)_+$ を考える．Figure 1 は，

$$T = 5, \ \ K = 0.6, \ \ r(0) = 0.025, \ \ a = 0.047, \ \ b = 0.94, \ \ \sigma = 0.16, \ \ p = 0.1, \ \ q = 0.02$$

で $g(x, y) = (F(S, x, y; T) - K)_+$ の場合の PDE (4.1) を有限差分法により数値的に解いた結果 $G(0, r(0), 0)$ を，命題 3.4 のコール・オプション価格の厳密解と比較したものである．多少のずれは，有限差分法の改良の余地を示唆しているものと考えている．

5 パラメータの推定

市場のイールドのデータから，モデル $\mathcal{M}$ のパラメータの推定を，最小二乗法

$$\sum_{i=1}^n \{y(0, T_i) - Y(0, T_i)\}^2,$$

を用いて行う．ここで，$y(0, T)$ は市場で観測された T-債券のイールド，$Y(0, T)$ は，(3.1) で与えられるイールドの理論式である．

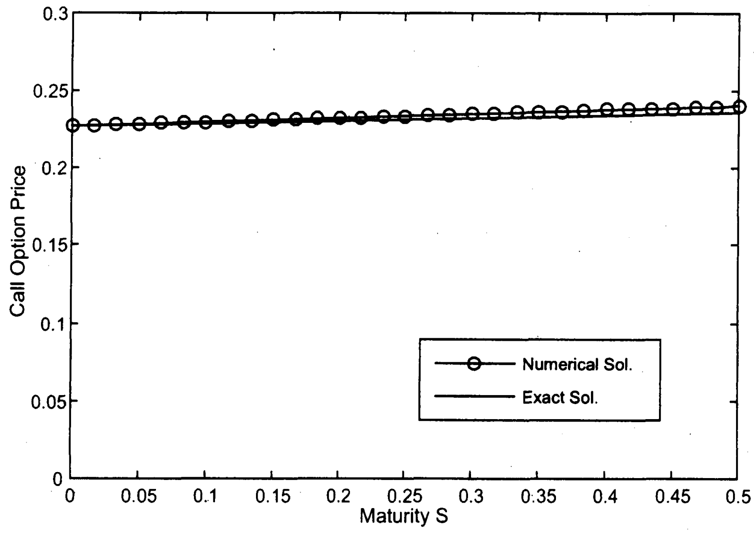

Figure 1: コール・オプション価格

$y(0,T)$ の例として，米財務省の HP にある 2005 年 12 月 19 日時点の米国債のイールドを用いる．$n=10$ で

$$T_1=\frac{1}{12},\ T_2=\frac{3}{12},\ T_3=\frac{6}{12},\ T_4=1,\ T_5=2,\ T_6=3, T_7=5,\ T_8=7,\ T_9=10,\ T_{10}=20$$

(単位は年) とする．この場合のパラメータの推定値は，以下の通りである：

$$a=0.1198,\quad b=1.5451,\quad \sigma=0.4215,\quad p=0.0144,\quad q=0.0465,\quad r(0)=0.0335.$$

Figure 2 では，この市場のデータと，それらに (3.1) および古典的な Vasicek モデルのイールド曲線をそれぞれフィットさせた結果を，図示している．

次に，$y(0,T)$ として 2013 年 11 月 27 日時点の米国債のイールドを用いる．この場合のパラメータの推定値は，

$$a=0.0193,\quad b=0.4299,\quad \sigma=0.3175,\quad p=0.8447,\quad q=0.0600,\quad r(0)=1.0000\times 10^{-5}$$

となり，結果は Figure 3 に図示されている．

最後に，$y(0,T)$ として 2006 年 12 月 1 日時点の米国債のイールドを用いる．この場合のパラメータの推定値は，

$$a=0.1019,\quad b=1.7839,\quad \sigma=0.3407,\quad p=0.0468,\quad q=0.1011,\quad r(0)=0.0510$$

となり，結果は Figure 4 に図示されている．

参考文献

[1] Anh, V., and A. Inoue. 2005. Financial markets with memory I: Dynamic models. *Stochastic Anal. Appl.* 23:275–300.

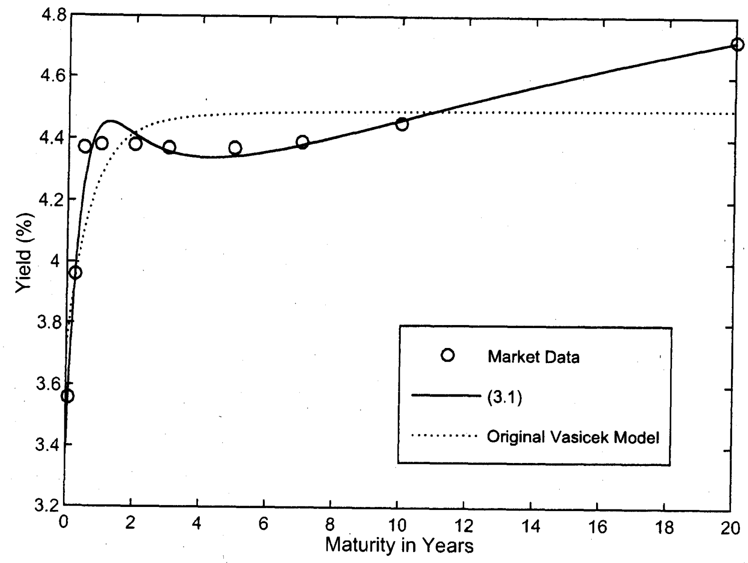

Figure 2: 2005 年 12 月 19 日のイールド曲線

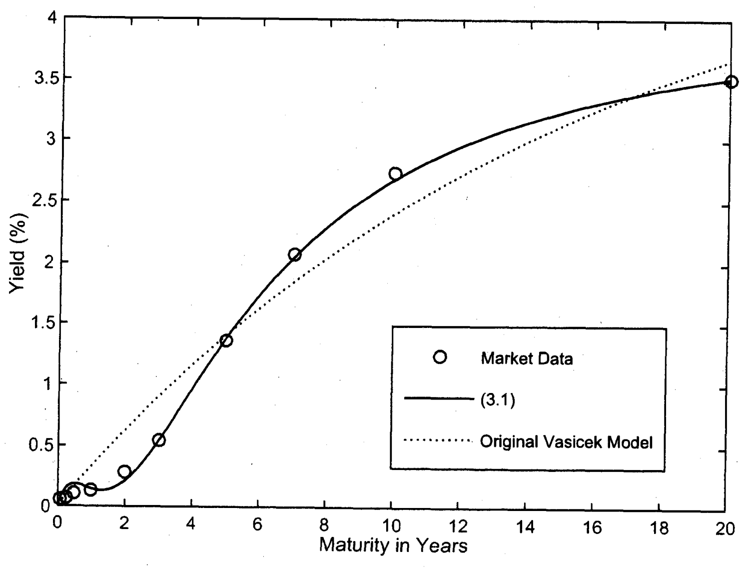

Figure 3: 2013 年 11 月 27 日のイールド曲線

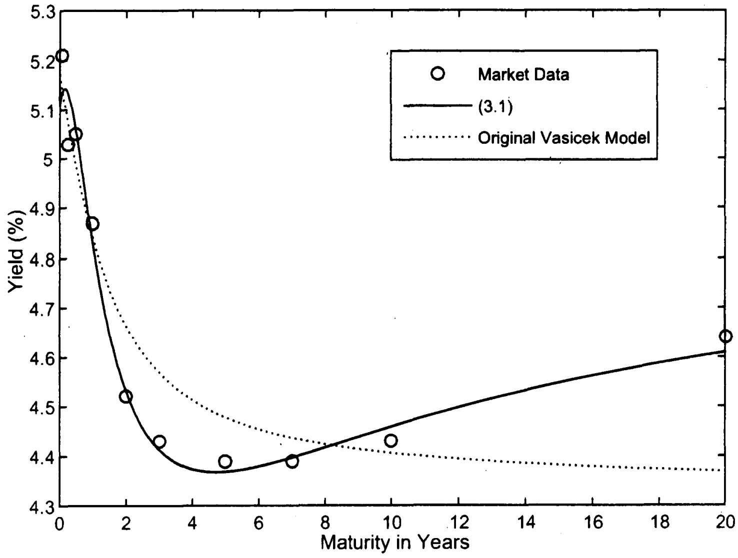

Figure 4: 2006 年 12 月 1 日のイールド曲線

[2] Anh, V., A. Inoue and Y. Kasahara. 2005. Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization. *Stochastic Anal. Appl.* 23:301–328.

[3] Inoue, A., Y. Nakano and V. Anh. 2006. Linear filtering of systems with memory and application to finance. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* Art. ID 53104, 26 pp.

[4] 井上昭彦, 中野張, 福田敬, ファイナンスと保険の数理, 岩波書店, 2014.

[5] Jamshidian, F. 1989. An exact bond option pricing formula. *J. Finance.* 44:205–209.

[6] Vasicek, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *J. Finan. Econom.* 5:177–188.