数理解析研究所講究録
第 1953 巻 2015 年 12-25

量子論理に基づく Hilbert 空間形式の量子力学の再構成とその応用

名古屋大学大学院 情報科学研究科 古賀 実*
Minoru Koga
Graduate School of Information Science
Nagoya University

概 要

Mackey が定式化した物理系の論理 [Mac63] を議論の出発点とした Hilbert 空間形式の量子力学の再構成について考える.

1 序論

物理系を論理の観点から再定式化するという考え方は, 1936 年の Birkhoff と von Neumann の論文 [BvN36] に始まる. 大雑把に言えば, 物理系の論理とは実験命題の集まりに含意で順序を定めた順序集合を指す. ここで, 実験命題とは「ある物理量がある値を持つ」という形の文であり, 実験の際に記録される典型的なデータを表していると想定される.

Birkhoff と von Neumann の論文 [BvN36] では, 量子系の論理は有限次元既約可補的モジュラー束と呼ばれる束として規定された. [BvN36] の数学的結果を端的に述べるならば, 有限次元既約直可補的モジュラー束は「内積」の入った有限次元ベクトル空間の部分空間の成す射影幾何として表現できる, となる. 論文 [BvN36] では, 量子系の論理が有限次元既約直可補的モジュラー束である事の物理的な理由付けは十分為されていないが, 論文末 ([BvN36], p. 837) において, 論理がモジュラー束であることの物理的正当化を, 実りある問題として挙げている.

本稿では 1963 年に Mackey が [Mac63] で定式化した物理系の論理を扱う. [Mac63] では物理系には物理量と状態の集合が付随するとし, 物理量の特別なクラスとして実験命題の数学的表現である「質問」が定義される. そして, 質問全体を物理系の論理として規定する. 状態からは論理に統計的優位性によって順序構造が誘導され,「物理的に自然な条件」によって物理系の論理は σ-完備なオーソモジュラー半順序集合と呼ばれるものとなることが示された. この事実により, Birkhoff と von Neumann によって導入されたモジュラー束よりも, σ-完備なオーソモジュラー半順序集合の研究が注目を集めた. さらに, Mackey は [Mac63] の中で, 論理はある可分な無限次元複素 Hilbert 空間の閉部分空間全体に包含関係で順序を定めた半順序集合と順序同型であるという公理を設けた. この公理によって, 物理系の物理量と状態はそれぞれ, 自己共役作用素と密度作用素で表現されることが導かれ, Hilbert 空間形式の量子力学が再構成される事を示した. しかし, Mackey 自身によって, この公理は物理的正当性を欠くアドホックな公理であるため, この公理を導く物理的に自然な条件の探求が問題として掲げられた. 本稿でこの Mackey の問題に対する一つの解決案を提案する.

尚, 量子論理に関する包括的な詳しい解説として Beltrametti と Cassinelli の [BC81] がある.

*koga.minoru@d.mbox.nagoya-u.ac.jp

本稿での術語の使い方を幾つか固定する.「物理系」,「物理量」,「状態」そして「時間発展」を無定義術語として用いる.

定義 1.1 (Hilbert 空間形式の量子力学) 物理系 $\mathfrak{S}$ が **Hilbert 空間形式の量子力学**で記述されるとは，物理系 $\mathfrak{S}$ が次を満たすこととする：

(i) 物理系 $\mathfrak{S}$ に対応する可分な複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が存在する；

(ii) 物理系 $\mathfrak{S}$ の物理量は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素で表現される；

(iii) 物理系 $\mathfrak{S}$ の状態は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素で表現される；

(iv) 状態 α において物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ確率は $\mathrm{tr}[\rho_\alpha Q_A(E)]$ で与えられる. ここで，ρ_α は状態 α を表現する密度作用素であり，$Q_A(E)$ は物理量 A を表現する自己共役作用素のスペクトル測度の E での値である；

(v) 物理系 $\mathfrak{S}$ の時間発展は，ハミルトニアンと呼ばれる物理量 H で生成される，$\mathbb{R}$ 上強連続な 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ で与えられる. ◇

2 Mackey の論理

本節で，Mackey によって導入された物理系の公理系を [Mac63] に基づいて紹介する.

公理 2.0 (物理系を記述する体系の定義) 物理系 $\mathfrak{S}$ に対して，物理量全体という集合 $\mathscr{O}$，状態全体という集合 $\mathscr{S}$ と実区間 $[0,1]$ に値を持つ $\mathscr{O}\times\mathscr{S}\times\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の関数 p が存在する. ここで，$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の Borel 集合体である. □

公理 2.1 (p は確率測度を定める) 任意の物理量 A と任意の状態 α に対して，関数

$$p(A,\alpha,\cdot):\mathscr{B}(\mathbb{R})\ni E\mapsto p(A,\alpha,E)\in[0,1]$$

は $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の確率測度である. □

$p(A,\alpha,E)$ を「状態 α において物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ確率」と呼ぶ.

公理 2.2 ($\mathscr{O}$ と $\mathscr{S}$ の最小条項条件) 物理量 A,B が任意の状態 α と任意の実数の Borel 集合 E に対して $p(A,\alpha,E)=p(B,\alpha,E)$ を満たすならば，$A=B$ である.

状態 α,β が任意の物理量 A と任意の実数の Borel 集合 E に対して $p(A,\alpha,E)=p(A,\beta,E)$ を満たすならば，$\alpha=\beta$ である. □

公理 2.3 (物理量の Borel 関数による変換) 任意の物理量 A と任意の Borel 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して物理量 B が存在して，任意の状態 α と任意の実数の Borel 集合 E に対して

$$p(B,\alpha,E)=p(A,\alpha,f^{-1}(E))$$

が成立する. □

公理 2.2 より，物理量 B は唯一つに定まる. これを $f(A)$ と表す.

公理 2.4 (状態集合 $\mathscr{S}$ の σ-凸性) 任意の状態列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と和が 1 である非負の実数列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}(t_n \geq 0, \sum_n t_n = 1)$ に対して，状態 α が存在して任意の物理量 A と任意の実数の Borel 集合 E に対して

$$p(A,\alpha,E) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n p(A,\alpha_n,E)$$

が成立する． □

公理 2.2 より，状態 α は唯一つに定まる．これを $\sum_{n=1}^{\infty} t_n\alpha_n$ と表す．

定義 2.1 (純粋状態) 状態 α が**純粋状態**である，とは実数 $t \in (0,1)$ と状態 α_1, α_2 が存在して

$$\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$$

が成立するならば，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ であることをいう．すなわち，純粋状態とは $\mathscr{S}$ の端点である． ◇

物理系 $\mathfrak{S}$ の論理を与える物理量である「質問」を導入する．

定義 2.2 (質問) 物理量 Q が**質問**であるとは，任意の状態 α に対して $p(Q,\alpha,\{0,1\}) = 1$ が成立することをいう． ◇

任意の質問 Q，状態 α と実数の Borel 集合 E に対して

$$p(Q,\alpha,E) = \begin{cases} 1 & (0,1 \in E) \\ p(Q,\alpha,\{1\}) & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ p(Q,\alpha,\{0\}) & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ 0 & (0,1 \notin E) \end{cases}$$

が成立する．ここで，1 点集合 $\{1\}$ が「はい」という文を表現し，1 点集合 $\{0\}$ が「いいえ」という文を表現していると考えると，質問は「はい」または「いいえ」という 2 択の「質問」を表現している物理量であると考えられる．

定義 2.3 (論理) 集合 $\mathscr{L} := \{Q \in \mathscr{O} \mid Q \text{ は質問 }\}$ を物理系 $\mathfrak{S}$ の**論理**と呼ぶ． ◇

例 2.1 (質問の構成) 任意の物理量 A と実数の Borel 集合 E 上の特性関数 χ_E $(\chi_E(x) = 0\ (x \notin E), \chi_E(x) = 1\ (x \in E))$ に対して $\chi_E(A)$ は質問である．この形の質問を $Q(A,E)$ と書く．すなわち，$Q(A,E) = \chi_E(A)$ とする．質問 $Q(A,E)$ は「物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ」または「物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持たない」という 2 択の「質問」を表現していると考えられる． ◇

物理量 A に対して，$O := Q(A,\emptyset), I := Q(A,\mathbb{R})$ とおく．I, O は物理量 A のとり方に依らずに定まる．

状態から論理上の関数が誘導される．

定義 2.4 状態 α に対して写像

$$m_\alpha : \mathscr{L} \to [0,1]$$

を $m_\alpha(Q) := p(Q,\alpha,\{1\})\ (Q \in \mathscr{L})$ によって定める． ◇

$m_\alpha(Q)$ を「状態 α において質問 Q が『はい』である確率」と呼ぶ．

事実 2.1 状態 α から m_α への対応は単射である．すなわち，$\mathscr{S}$ は $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{S}}$ に集合同型[1]． □

$\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{S}}$ から「統計的優位性」によって $\mathscr{L}$ に順序構造を誘導する．

定義 2.5 質問 Q_1, Q_2 に対して，

$$Q_1 \le Q_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha \in \mathscr{S},\ m_\alpha(Q_1) \le m_\alpha(Q_2)$$

と定める． ◇

事実 2.2 $(\mathscr{L}, \le)$ は半順序集合． □

事実 2.3 任意の質問 Q に対して $1 - Q \in \mathscr{L}$． □

$Q^\perp := 1 - Q$ とおく．
事実 2.2，事実 2.3 を用いると論理に「直交性」が定まる．

定義 2.6 (直交性) 2 つの質問 Q_1, Q_2 が**直交する**とは

$$Q_1 \le 1 - Q_2$$

であることをいう．このとき $Q_1 \perp Q_2$ と表す． ◇

$Q_1 \perp Q_2$ は，任意の状態 α に対して $m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) \le 1$ であることと同値であり，Q_1 と Q_2 がある意味で排反であることを表す．
物理量 A と $E_1, E_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ をとる．$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ のとき，任意の状態 α に対して，

$$\begin{aligned} m_\alpha(Q(A, E_1)) + m_\alpha(Q(A, E_2)) &= p(A, \alpha, E_1) + p(A, \alpha, E_2) \\ &= p(A, \alpha, E_1 \sqcup E_2) \le 1. \end{aligned}$$

よって，$Q_1 \perp Q_2$ である．互いに素な実数の Borel 集合の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．このとき，$\{Q(A, E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は互いに直交する質問の列であり，任意の状態 α に対して

$$m_\alpha(Q(A, \sqcup_{n=1}^\infty E_n)) = \sum_{n=1}^\infty p(A, \alpha, E_n) = \sum_{n=1}^\infty m_\alpha(Q(A, E_n))$$

が成立する．そこで

$$\sum_{n=1}^\infty Q(A, E_n) := Q(A, \sqcup_{n=1}^\infty E_n)$$

とおく．これを $Q(A, E)$ の形の質問に限らず，一般の質問に対して一般化して，次の定義を設ける：

定義 2.7 互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，任意の状態 α に対して $m_\alpha(Q) = \sum_{n=1}^\infty m_\alpha(Q_n)$ を満たす質問 Q を $\sum_{n=1}^\infty Q_n$ と表す． ◇

注意 2.1 任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，定義 2.7 の質問 Q は存在すれば唯一つに定まるが，存在するとは限らない．しかし，互いに直交する質問に対してその「和」が定義できることは物理的には自然な要請であると考えられる． ◇

公理 2.5 任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，質問 $\sum_{n=1}^\infty Q_n$ が存在する． □

---

[1]本稿では 2 つの集合 X, Y に対して，全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき X と Y は集合同型であるということにする．

任意の状態 α に対して，m_α は確率測度の一般化と見做せる．

定義 2.8 論理 $\mathscr{L}$ 上の写像 $m:\mathscr{L}\to[0,1]$ は次を満たすとき**確率測度**と呼ばれる：

(i) （規格化条件）$m(I)=1$；

(ii) （一般化 σ-加法性）任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$m(\sum_{n=1}^{\infty}Q_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(Q_n). \qquad \diamond$$

任意の状態 α に対して，m_α は論理 $\mathscr{L}$ 上の確率測度である．

補題 2.1 任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty}Q_n$ は $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の上限である．すなわち，質問 R が存在して任意の番号 $n\in\mathbb{N}$ に対して $Q_n\le R$ を満たすとすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\le R$$

が成立する． □

次に，物理量を論理を用いて表現することを考える．

定義 2.9 (論理値測度) 写像 $q:\mathscr{B}(\mathbb{R})\to\mathscr{L}$ は次を満たすとき**論理値測度**と呼ばれる：

(i) $q(\emptyset)=O,\quad q(\mathbb{R})=I$;

(ii) 任意の $E,F\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して，$E\cap F=\emptyset$ ならば $q(E)\perp q(F)$;

(iii) 任意の互いに素な実数の Borel 集合の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$q\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}q(E_n). \qquad \diamond$$

事実 2.4 任意の物理量から論理値測度が誘導される：

$$Q(A,\cdot):\mathscr{B}(\mathbb{R})\ni E\mapsto Q(A,E)\in\mathscr{L}$$

とおくと，$Q(A,\cdot)$ は論理値測度である． □

事実 2.5 物理量 A,B に対して，誘導される二つの論理値測度が等しい：$Q(A,\cdot)=Q(B,\cdot)$ ならば，$A=B$ である．すなわち，$\mathscr{O}$ は $\{Q(A,\cdot)\}_{A\in\mathscr{O}}$ に集合同型． □

逆に，任意の論理値測度は適当な物理量によって誘導される論理値測度であると要請する：

公理 2.6 任意の論理値測度 q に対して物理量 A が存在して $q=Q(A,\cdot)$ が成立する． □

補題 2.2 $\perp:\mathscr{L}\ni Q\mapsto Q^\perp\in\mathscr{L}$ は orthocomplementation である．すなわち，次が成立する：

(i) $\forall Q\in\mathscr{L},\ (Q^\perp)^\perp=Q$;

(ii) $\forall Q\in\mathscr{L},\ Q+Q^\perp=I$;

(iii) $\forall Q_1,\forall Q_2\in\mathscr{L},\ Q_1\le Q_2\Rightarrow Q_2^\perp\le Q_1^\perp$. □

補題 2.2 より次が従う：

補題 2.3 $\mathscr{L}$ は σ-直完備である．すなわち，任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，上限 $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ と下限 $\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n$ が存在する．さらに，De Morgan の法則を満たす：

$$(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n)^{\perp} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n^{\perp}, \quad (\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n)^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\perp}. \qquad \Box$$

補題 2.4 $\mathscr{L}$ はオーソモジュラー律を満たす：

$$\forall Q_1, \forall Q_2 \in \mathscr{L}, \quad Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_1 + (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp} (= Q_1 + (Q_1^{\perp} \wedge Q_2)). \qquad \Box$$

以上をまとめると，次の定理を得る：

定理 2.1 ([Mac63]) 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 を満たすとする．このとき，物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は σ-直完備なオーソモジュラー半順序集合である． □

物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 を満たすとして得られる物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ を **Mackey の論理**と呼ぶことにする．Mackey は以上の公理系に加えて，通常の Hilbert 空間を用いた量子力学を得るために次の公理を設けた：

公理 2.7 物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は，ある可分な無限次元複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の閉部分空間全体に包含関係で順序を定めた半順序集合 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ と順序同型． □

$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ は完備束[2] である（例えば，[BC81] 参照）．

公理 2.7 によって，Mackey の公理系から Hilbert 空間形式の量子力学がほぼ得られる：

定理 2.2 ([Mac63]) 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.7 を満たすとする．このとき，

(i) 物理系 $\mathfrak{S}$ に対応する可分な複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が存在する；

(ii) 物理量全体の集合は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素全体の集合に集合同型；

(iii) 状態は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素で表現される；

(iv) 状態 α において物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ確率は $\mathrm{tr}[\rho_\alpha Q_A(E)]$ で与えられる．ここで，ρ_α は状態 α に対応する密度作用素，$Q_A(E)$ は物理量 A に対応する自己共役作用素のスペクトル測度の E での値である． □

物理量の対応は，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素のスペクトル分解定理から得られる．状態の対応には，次の Gleason の定理が使える：

定理 2.3 (Gleason (1957) [Gle57]) $\mathscr{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間であって $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ とする．任意の $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 上の確率測度 $m : \mathscr{L}(\mathscr{H}) \to [0,1]$ に対して，$\mathscr{H}$ 上の密度作用素 ρ_m で

$$m(M) = \mathrm{tr}[\rho_m P^M] \qquad (M \in \mathscr{L}(\mathscr{H}))$$

を満たすものが唯一つ存在する．ここで，P^M は閉部分空間 M を値域とする射影作用素である． □

[2] 半順序集合 $\mathscr{L}$ が束であるとは，任意の $a, b \in \mathscr{L}$ に対して上限 $a \vee b$ と下限 $a \wedge b$ が存在することをいう．束 $\mathscr{L}$ が完備であるとは，任意の空でない $\mathscr{L}$ の部分集合 S に対して，その上限 $\bigvee S$ と下限 $\bigwedge S$ が存在することをいう．

特に，物理量 A，状態 α と実数の Borel 集合 E に対して，

$$p(A, \alpha, E) = m_\alpha(Q(A, E)) = \mathrm{tr}[\rho_{m_\alpha} Q_A(E)]$$

が成立する．逆に，任意の密度作用素 ρ は (2.3) の対応によって $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 上の確率測度を与えることが確かめられる．

しかし，公理 2.7 は他の公理系に比べて物理的な動機付けに乏しく，Mackey 自身公理 2.7 について，より物理的に自然で満足のいく公理を探す必要がある，と述べている ([Mac63], pp. 71-72)．次節で，Mackey の提示したこの問題に対する一つの解決案を，主に先行研究 [Zie61], [Jau68], [Var68], [GP71], [BC81], [Sol95], [Hol95] を基にして述べる．

3 Hilbert 空間形式の量子力学の再構成

物理系 $\mathfrak{S}$ は公理 2.0 から公理 2.6 を満たすとし，$\mathscr{L}$ を物理系 $\mathfrak{S}$ の論理とする．

公理 3.1 (論理の可分性と状態の正則性条件) (i) 論理 $\mathscr{L}$ の互いに直交する質問は高々可算個．

(ii) 状態 α と質問 Q_1, Q_2 が $m_\alpha(Q_1) = m_\alpha(Q_2) = 0$ を満たすならば，質問 R で $Q_1, Q_2 \leq R$ と $m_\alpha(R) = 0$ を満たすものが存在する． □

公理 3.1 の条件 (i) は，実験的に検証可能な排反事象は有限であることから自然に課せられる条件である．公理 3.1 の条件 (ii)（の類似形）は，Zierler [Zie61] や Jauch と Piron [JP63] によって導入された．この条件を満たす状態は Jauch-Piron 状態と呼ばれ，測度論に於いて測度が満たすべき条件の類比と考えられる [Ham03]．

公理 3.1 から次が従う：

事実 3.1 任意の状態 α と任意の質問 Q に対して，

$$m_\alpha(Q) = 1 \Leftrightarrow S \leq Q \tag{3.1}$$

を満たす質問 S が唯一つ存在する．この質問 S を $\mathrm{supp}(\alpha)$ と書く．すなわち，$\mathrm{supp}(\alpha)$ は $\{Q \in \mathscr{L} \mid m_\alpha(Q) = 1\}$ の最小元である． □

次に，[BC81] に倣って純粋状態に関する次の公理を導入する：

公理 3.2 (純粋状態の存在と一意性) (i) O でない任意の質問 Q に対して，純粋状態 α が存在して，$m_\alpha(Q) = 1$ が成立する．

(ii) α を純粋状態とすると，α は $m_\alpha(\mathrm{supp}(\alpha)) = 1$ を満たす，唯一つの（純粋）状態である． □

公理 3.1 と公理 3.2 から次が従う：

事実 3.2 (i) 純粋状態 α に対して $\mathrm{supp}(\alpha)$ は $\mathscr{L}$ の原子元[3]である．逆に，任意の $\mathscr{L}$ の原子元 P に対して（純粋）状態 α が一意的に存在して $P = \mathrm{supp}(\alpha)$ が成立する．特に，純粋状態全体の集合は $\mathscr{L}$ の原子元全体の集合に集合同型；.

(ii) 論理 $\mathscr{L}$ は完備原子的束[4] である． □

---

[3] 最小元 0 を持つ半順序集合 $\mathscr{L}$ の原子元とは $\mathscr{L} \setminus \{0\}$ の極小元のこと．

[4] 任意の 0 でない元 $x \in \mathscr{L}$ に対して原子元 $p \in \mathscr{L}$ が存在して $p \leq x$ が成立するとき，$\mathscr{L}$ は原子的 (atomic) であるという [Grä03]（類似の概念として，任意の 0 でない元 $x \in \mathscr{L}$ に対して，原子元の族 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $x = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ が成立するとき $\mathscr{L}$ は atomistic と呼ばれる [Grä03]．本稿ではこのことを $\mathscr{L}$ は原子論的であると呼ぶことにする）．

事実 3.2 (i) における原子元と純粋状態の一対一対応は，Hilbert 空間形式の量子力学における Hilbert 空間の一次元部分空間と純粋状態との一対一対応，と対応する．量子力学の理論を得るためには，量子力学特有の現象を言い表した公理系を導入する必要がある．Dirac [Dir58] によれば，それは純粋状態の重ね合わせの原理である．純粋状態の重ね合わせを原子元を用いて述べる．

定義 3.1 (重ね合わせ) $\mathscr{L}$ の原子元 R が 2 つの相異なる原子元 P, Q の**重ね合わせ**であるとは，$R \neq P, Q$ と $R \leq P \vee Q$ が成立することをいう． ◇

定義 3.1 は，2 つの相異なる純粋状態から，新しい純粋状態が得られることを表している．これは古典力学には存在しない性質である．ここでは [Jau68] に倣って，重ね合わせの原理を述べる：

公理 3.3 (重ね合わせの原理) (i) 任意の 2 つの相異なる原子元 P, Q に対して，P, Q の重ね合わせが少なくとも一つ存在する．

(ii) 原子元 R が 2 つの相異なる原子元 P, Q の重ね合わせであるとき，P は Q, R の重ね合わせでもあり，Q は P, R の重ね合わせでもある． □

論理には「次元」の概念が定まる：

定義 3.2 (次元) $\{Q_i\}_{i=1}^n$ を $\mathscr{L}$ の上昇列：$Q_1 \neq 0, Q_i < Q_j (i < j)$ とするとき番号 $n \in \mathbb{N}$ を $\{Q_i\}_{i=1}^n$ の長さという．上昇列全体に対して，長さの上限を $\mathscr{L}$ の**次元**といい，$\dim(\mathscr{L})$ と表す． ◇

論理から次の定理を得るために，物理的には正当化が難しい技術的な条件を課す：

公理 3.4 (次元が十分高いこと) $\dim(\mathscr{L}) \geq 4$. □

定理 3.1 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 と公理 3.1 から公理 3.4 を満たすとする．このとき，対合 θ を持つ可除環 $\mathbb{D}$，$\mathbb{D}$ 上の（左）ベクトル空間 V と $V \times V$ 上の非退化な対称 θ-双線形形式[5]$\langle\cdot,\cdot\rangle$ が存在して，物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は V の $\langle\cdot,\cdot\rangle$-閉部分空間[6] 全体に包含関係で順序を定めた完備なオーソモジュラー束 $\mathscr{L}(V, \mathbb{D}, \theta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に同型[7] である． □

注意 3.1 論理の次元に関する公理 3.4 は，論理をベクトル空間の部分空間として表現するために用いる条件で，Desargues の命題[8]の成立が重要である．特に，Desargues の命題はベクトル空間の係数環 $\mathbb{D}$ を構成するために何度も用いる．論理が 4 次元以上であれば Desargues の命題は自動的に成立するが，3 次元の場合には独立な命題であることが知られている [Hey63]．定理 3.1 を得るためには，次の公理を公理 3.4 の代わりとすることができる：

公理 $\dim(\mathscr{L}) \geq 3$ かつ $\mathscr{L}$ で Desargues の命題が成立する． □

---

[5] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が $V \times V$ 上の θ-双線形形式であるとは $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{D}$ であって $\forall x_1, \forall x_2, \forall x, \forall y \in V, \forall c, \forall d \in \mathbb{D}, \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$，$\langle y, x_1 + x_2\rangle = \langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle$，$\langle cx, dy\rangle = c\langle x, y\rangle\theta(d)$ を満たすことをいう．θ-双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が非退化であるとは $y \in V$ に対して $\forall x \in V, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$ かつ，$x \in V$ に対して $\forall y \in V, \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ を満たすことをいう．また，θ-双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が対称であるとは $\forall x, \forall y \in V,\ \theta(\langle x, y\rangle) = \langle y, x\rangle$ を満たすことをいう．

[6] $M \subseteq V$ が $\langle\cdot,\cdot\rangle$-閉部分空間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(M^\perp)^\perp = M$ $(M^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in M,\ \langle x, y\rangle = 0\})$.

[7] 完備なオーソモジュラー束 $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ に対して，$\varphi : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ が $\mathscr{L}_1$ から $\mathscr{L}_2$ への同型写像であるとは

(i) φ は全単射；

(ii) 任意の $\mathscr{L}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して，$\varphi(\bigvee \mathcal{S}) = \bigvee \varphi[\mathcal{S}]$；

(iii) $\forall a \in \mathscr{L},\ \varphi(a^\perp) = \varphi(a)^\perp$.

を満たすことをいい，このとき $\mathscr{L}_1$ と $\mathscr{L}_2$ は同型であるという．同型写像 $\varphi : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_1$ を $\mathscr{L}_1$ 上の自己同型写像という．

[8] Desargues の命題を射影幾何の言葉を借りて述べると以下の通り：2 つの共線でない（一直線上にない）3 点（原子元）$\{p_1, p_2, p_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}$ に対して，3 直線 $p_1 \vee q_1, p_2 \vee q_2, p_3 \vee q_3$ が共点である（1 点で交わる）ことと 3 点 $(p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee q_2), (p_2 \vee p_3) \wedge (q_2 \vee q_3), (p_3 \vee p_1) \wedge (q_3 \vee q_1)$ が共線である（一直線上にある）ことは同値である．

以下では物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 と公理 3.1 から公理 3.4 を満たすとし，物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は定理 3.1 における $\mathscr{L}(V,\mathbb{D},\theta,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ で表現されているとする：$\mathscr{L}=\mathscr{L}(V,\mathbb{D},\theta,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Mackey の公理 2.7 を導くためには，$\mathbb{D}=\mathbb{C}$ と θ が複素共役となることを示す必要がある．係数環の決定に関しては，Gudder と Piron の論文 [GP71] や Wilbur の論文 [Wil77] など多くの研究がある．[Wil77] では，$\mathscr{L}(V,\mathbb{D},\theta,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ において V が無限次元ベクトル空間の場合について考察しており，θ-双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が Hilbert 空間形式の量子力学において確率解釈を与えることから，「probabilistic な論理」という概念を定義して，$\mathbb{D}$ を実数体，複素数体または四元数体にまで絞り込む条件を調べている．一方，[GP71] では，物理系に「配位空間」と「位置」の概念を導入し，その対称性を論理上の自己同型写像で表現する事を考えている．ここでは，[GP71] に倣い，粒子が「配位空間」上を運動する事の記述可能性を考え，「対称性」が表現空間であるベクトル空間 V 上の「ユニタリ作用素」によって誘導される事を要求する事で，係数環 $\mathbb{D}$ を絞り込む．そこで，新たに無定義術語「配位空間」と「位置」を付け加える．

定義 3.3 (配位空間と位置) 位相空間 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ 上の Borel 集合体 $\mathscr{B}(\mathscr{M})$ から論理 $\mathscr{L}$ への写像 $X:\mathscr{B}(\mathscr{M})\to\mathscr{L}$ は，次の条件を満たすとき，それぞれ**配位空間**[9]と**位置**と呼ばれる：

(i) $X(\emptyset)=O,\quad X(\mathscr{M})=I$；

(ii) 任意の $E,F\in\mathscr{B}(\mathscr{M})$ に対して $E\cap F=\emptyset$ ならば $X(E)\perp X(F)$；

(iii) 任意の互いの素な Borel 集合の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{B}(\mathscr{M})^{\mathbb{N}}$ に対して，
$$X(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}E_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}X(E_n).$$

ここでは，配位空間の「対称性」を [GP71] や [Gud73] に倣って論理の言葉で記述する．

定義 3.4 (対称群) 群 G が配位空間 $\mathscr{M}$ 上の**変換群**であるとは，写像 $t:G\times\mathscr{M}\ni(g,x)\mapsto gx\in\mathscr{M}$ であって
$$\forall g_1,\forall g_2\in G,\forall x\in\mathscr{M},\quad t(g_1\cdot g_2,x)=t(g_1,g_2x)$$
を満たすものが存在することとする[10]．配位空間 $\mathscr{M}$ 上の変換群 G が**対称群**であるとは，写像 $W:\mathbb{R}\ni g\mapsto W_g\in\mathrm{Aut}(\mathscr{L})$ [11] であって

(i) 任意の $g_1,g_2\in G$ に対して，$W_{g_1g_2}=W_{g_1}W_{g_2}$;

(ii) 任意の $g\in G$ と $E\in\mathscr{B}(\mathscr{M})$ に対して，$W_g(X(E))=X(g[E])$.

を満たすものが存在することとする[12]． ◇

[9] 配位空間には付加的な位相的条件が課される事がある．例えば [GP71] では局所コンパクトで第二可算公理を満たすハウスドルフ空間としている．

[10] さらに連続性などの位相的・付加的条件が課されることがある．例えば，[Gud73] では G は局所コンパクトで第二可算公理を満たすハウスドルフ位相群であり，次を満たすとしている：

(i) 写像 $t:G\times\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ は連続；

(ii) 任意の $g\in G$ に対して $t(g,\cdot):\mathscr{M}\ni x\mapsto gx\in\mathscr{M}$ は $\mathscr{M}$ 上の同相写像：

(iii) （推移的）任意の $x_1,x_2\in\mathscr{M}$ に対して $g\in G$ が存在して $x_2=gx_1$ が成立する：

(iv) （効果的）任意の $x\in\mathscr{M}$ に対して $gx=x$ であるならば，g は G の単位元．

[11] $\mathrm{Aut}(\mathscr{L})$ は $\mathscr{L}$ 上の自己同型写像全体．

[12] 対称群には適当な付加的な条件が課される事がある．例えば，[GP71] では上の 2 条件に加えて次の「連続性」を課す：任意の状態 α と質問 Q に対して，写像 $G\ni g\mapsto m_\alpha(W_g(Q))\in[0,1]$ は連続．

以下では簡単のために，配位空間として実数直線 $\mathbb{R}$ をとり，並進対称性について考える．すなわち，$\mathscr{M}=\mathbb{R}$ と $G=\mathbb{R}$ とし，各 $g\in\mathbb{R}$ に対して，変換 $t(g,\cdot):\mathbb{R}\ni x\mapsto x+g\in\mathbb{R}$ を考える．これは，実数直線 $\mathbb{R}$ 上を運動する粒子について考える事に対応すると考えられる．このとき，$\mathbb{R}$ の並進対称性の一つを表す性質として，以下の公理を設ける：

公理 3.5 (位置の対称性を表現するユニタリ作用素の存在) 位置 $X:\mathscr{B}(\mathbb{R})\to\mathscr{L}$，Borel 集合 $E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$，対称群の元 $g\in\mathbb{R}$ と V 上のユニタリ作用素 U_g[13] であって，次を満たすものが存在する：

(i) $X(E)\neq O$；

(ii) 任意の番号 $n,m\in\mathbb{N}\,(n\neq m)$ に対して，$g^n[E]\cap g^m[E]=\emptyset$；

(iii) $U_g[X(E)]=W_g(X(E))$. □

定理 3.2 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 と公理 3.1 から公理 3.5 を満たすとする．このとき，可分な $\mathbb{D}$ 上の無限次元 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が存在して $\mathscr{L}$ は $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ に同型．但し，$\mathbb{D}$ は実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ または四元数体 $\mathbb{H}$ である[14]. □

論理 $\mathscr{L}$ を表現する $\mathscr{H}$ をとり $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\mathscr{H})$ とする．

最後に，物理系の時間発展について考える．ここでは [Jau68] に倣って，時間発展を時間並進の対称性として捉えて論理上の自己同型写像として表現する．

定義 3.5 (時間発展) 物理系 $\mathfrak{S}$ の**時間発展**とは，写像 $\tau:\mathbb{R}\ni t\mapsto\tau_t\in\mathrm{Aut}(\mathscr{L})$ であって

(i) $\tau_0=\mathrm{id}_{\mathscr{L}}$;

(ii) 任意の $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ に対して $\tau_{t_1+t_2}=\tau_{t_1}\circ\tau_{t_2}$

を満たすことをいう． ◇

事実 3.3 ([Var68]) 自己同型写像 $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathscr{L})$ に対して，$\mathscr{H}$ 上の対称性 S[15] であって

$$S[M]=\phi(M)\quad(M\in\mathscr{L})$$

を満たすものが存在する． □

このとき，S は ϕ を誘導するという [Var68]．同様にして，写像 $\tau:\mathbb{R}\ni t\mapsto\tau_t\in\mathrm{Aut}(\mathscr{L})$ と $\mathscr{H}$ 上の対称性の族 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して S_t が τ_t を誘導するとき，$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は τ を誘導すると呼ぶことにする．

公理 3.6 物理系 $\mathfrak{S}$ の時間発展を誘導する対称性の族は $\mathbb{R}$ 上強連続な 1 パラメータユニタリ群 $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，

(i) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，U_t は $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素；

(ii) $U_0=\mathrm{id}_{\mathscr{H}}$；

(iii) 任意の $s,t\in\mathbb{R}$ に対して，$U_{s+t}=U_s\circ U_t$；

[13] 写像 $U:V\to V$ が V 上のユニタリ作用素であるとは，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を保存する線形作用素をいう：
$\forall c,\forall d\in\mathbb{D},\ \forall x,\forall y\in V,\ U(cx+dy)=cU(x)+dU(y);\ \langle U(x),U(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.

[14] 四元数体 $\mathbb{H}$ 上の Hilbert 空間については [FJSS62] や [Var68] を参照されたい．

[15] 写像 $S:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ が $\mathscr{H}$ 上の対称性 (symmetry) であるとは，全単射かつ加法的:$\forall x,\forall y\in\mathscr{H}$, $S(x+y)=S(x)+S(y)$ であり，$\mathbb{D}$ 上の連続な自己同型写像 θ が存在して $\forall d\in\mathbb{D},\forall x,\forall y\in\mathscr{H}$, $\langle S(x),S(y)\rangle=\theta(\langle x,y\rangle)$; $S(dx)=\theta(d)S(x)$ を満たすことをいう．特に，$\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素は $\mathscr{H}$ 上の対称性である．

(iv) 任意の $s \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{t \to s} \langle U_t(x) - U_s(x), U_t(x) - U_s(x) \rangle = 0$[16],

であって，$\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ はある物理量 H で生成される：

$$\exists d \in \mathbb{D}, \exists H \in \mathscr{O}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad U_t = e^{dtH}. \qquad \square$$

定義 3.6 1パラメータユニタリ群 $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を生成する物理量 H を**ハミルトニアン**と呼ぶ. ◇

定理 3.3 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 と公理 3.1 から公理 3.6 を満たすとする．このとき，

(i) 可分な無限次元複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が存在して，物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ に同型；

(ii) 物理系 $\mathfrak{S}$ の物理量全体の集合は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素全体の集合に集合同型；

(iii) 物理系 $\mathfrak{S}$ の状態全体の集合は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素全体の集合に凸集合同型[17]；

(iv) 状態 α において物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ確率は $\mathrm{tr}[\rho_\alpha Q_A(E)]$ で与えられる．ここで，ρ_α は状態 α に対応する密度作用素，$Q_A(E)$ は物理量 A に対応する自己共役作用素のスペクトル測度の E での値である；

(v) 物理系 $\mathfrak{S}$ の時間発展は，ハミルトニアンと呼ばれる物理量 H で生成される，$\mathbb{R}$ 上強連続な 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ で与えられる. □

4 量子論理の応用

Hilbert 空間形式の量子力学がよく物理現象を記述することは，これまでの実験によって確かめられていることである．従って，論理に基づく Hilbert 空間形式の量子力学の再構成は，量子論の論理に基づく公理化と考えられる．以下で，Hilbert 空間形式の量子力学と論理に基づく物理系の記述について幾つか比較検討する．

第 1 節の定義 1.1 で述べた Hilbert 空間形式の量子力学と論理に基づいて定理 3.3 で再構成された物理系の記述には幾つかの差異がある．まず，定理 3.3 で構成された Hilbert 空間の次元は無限次元となっている．形式的な理由は，Mackey の公理 2.7 では無限次元の Hilbert 空間での表現を要求していることが挙げられる．物理的な理由は，$\mathbb{R}$ 上を運動する粒子の位置を表現するためには可算無限個の排他的な質問が必要となるため，論理が無限次元となると述べられる．技術的な理由は，論理上の自己同型写像と可除環や Hilbert 空間上の作用素との関連を調べるために，無限次元性が必要となる事があるという背景がある．これらを考慮した結果，公理 3.5 と公理 3.6 を提案した．

Mackey の論理 $\mathscr{L}$ と複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ をとり $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ と仮定しても，$\mathscr{H}$ の次元が低次元の場合，Hilbert 空間形式の量子力学と論理に基づく物理系の状態の記述には差異が生じ得る．Hilbert 空間の次元が 3 次元以上の場合，Gleason の定理により，論理上の確率測度としての状態は密度作用素で表現される．また，物理系が公理 3.2 の条件 (i) を満たすとき，全ての論理上の確率測度は状態から誘導され，状態全体の集合と密度作用素全体の集合は凸集合同型となる．一方，Hilbert 空間の次元が 2 次元の場合，論理上の確率測度全体の集合は密度作用素全体の集合よりも真に「大きい」．実際，分散ゼロの論理上の確率測度が存在する [Var85]．この事実は，ある種の隠れた変数理論の存在を示唆するが，特に，「2 準位の量子系」に対しては次の「古典モデル」が存在する [KS67].

---

[16] 収束は $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の自然な位相で定める．
[17] 凸構造を保つ集合同型対応が存在すること．

$\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積とする複素 2 次元の Hilbert 空間とする．H_2 を 2×2 の Hermite 行列全体の集合，U_2 を $\mathbb{C}^2$ の単位ベクトル全体の集合とし，それぞれ，物理量，純粋状態の集合を表すとする．$\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$ で記述される Hilbert 空間形式の量子力学を，**2 準位の量子系**と呼ぶことにする．

定義 4.1 (古典モデル [KS67]) 2 準位の量子系が**古典モデル**をもつとは，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ が存在し，任意の $A \in H_2$ と $\psi \in U_2$ に対してそれぞれ実数値関数 $f_A : \Omega \to \mathbb{R}$ と $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mu_\psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が存在して，次を満たすことをいう：

(関数関係の保存) 任意の Borel 関数 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$f_{u(A)} = u(f_A);$$

(期待値の再現性)

$$\langle A\psi, \psi\rangle = \int_\Omega f_A(\omega) d\mu_\psi(\omega). \qquad \diamond$$

定理 4.1 ([KS67]) 2 準位の量子系は古典モデルをもつ． □

次に，物理量の表現について考える．Mackey の公理系で考える物理量全体の集合は Hilbert 空間上の自己共役作用素全体の集合と集合同型となる．一方，定義 1.1 では，Hilbert 空間上の全ての自己共役作用素が物理量に対応するとは主張していない．物理量に対応しないとされる自己共役作用素の存在は「超選択則」と呼ばれる [BC81]．論理の枠組みでの超選択則は，論理 $\mathscr{L}$ が中心元[18]をもつことによって表現される．詳しくは，[Var68] や [BC81] を参照されたい．

最後に，物理系の論理の枠組みを用いて，「古典系」と「量子系」の違いについて考える．代数的量子論の枠組みにおいて，古典系と量子系の違いは物理系に付随する「物理量代数」の可換性によって言い表されることがある．論理の観点からは，古典系と量子系を別つ性質は重ね合わせの原理，公理 3.3 に求めることが出来る．物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6，公理 3.1 と公理 3.2 を満たすとする．重ね合わせの原理の代わりに，純粋状態の重ねあわせが存在しない条件を考える：

公理 4.1 (重ね合わせの非存在) 任意の 2 つの相異なる原子元 P, Q に対して，P, Q の重ね合わせは存在しない． □

定理 4.2 物理系 $\mathfrak{S}$ が公理 2.0 から公理 2.6 と公理 3.1，公理 3.2 と公理 4.1 を満たすとする．このとき，

(i) Stonean 空間[19]Ω が存在して，論理 $\mathscr{L}$ は Ω の regular open 集合[20] 全体に包含関係で順序を定めてできる完備オーソモジュラー束[21]に同型；

(ii) 物理量は Ω 上の実数値関数で表現される[22]；

(iii) 純粋状態全体の集合は Ω と集合同型． □

---

[18] c が $\mathscr{L}$ の中心元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in \mathscr{L}$, $a = (a \wedge c) \vee (a \wedge c^\perp)$．特に，$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ のとき，中心元の存在は $\mathscr{H}$ 上の全ての射影作用素と可換な射影作用素の存在と同値である．

[19] コンパクトハウスドルフかつ extremely disconnected な位相空間．

[20] 開集合はその閉包の内部が自身に一致する時 regular open と呼ばれる．

[21] 実際は，完備原子論的 Boole 代数となる．

[22] 正確に述べると次のようになる．Ω の開かつ閉部分集合全体を含む最小の σ-集合体 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ から $\mathscr{L}$ 上への σ-準同型写像 $\varphi : \mathscr{F} \twoheadrightarrow \mathscr{L}$ が存在し，任意の物理量 A に対して $\mathscr{F}$-可測な実数値関数 $f_A : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して $Q(A, E) = \varphi(f_A^{-1}(E)) \quad (E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ が成立する．さらに，$g_A : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{F}$-可測な実数値関数であって，$Q(A, E) = \varphi(g_A^{-1}(E)) \quad (E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ を満たすものであるとすると，$\{\omega \in \Omega \mid f_A(\omega) \neq g_A(\omega)\} \in \ker(\varphi) := \{F \in \mathscr{F} \mid \varphi(F) = O\}$ が成立する．

5 まとめと展望

本稿では Mackey によって定式化された論理に基づく Hilbert 空間形式の量子力学の再構成について述べた．再構成に用いられた公理系は，論理に基づく量子論の公理化と考えられる．この他の量子論の公理論的取扱いと比較検討は，[Hoo79] 中の Gudder による「A Survey of Axiomatic Quantum Mechanics」が参考になる．また，第 2 節で紹介した Mackey の公理系と Segal による代数的量子論の公理系 [Seg47] を比較検討したものに [GB70] がある．

今後の研究として，Hilbert 空間形式の量子力学に限らず，より広範囲の量子現象を記述する数学的枠組みについて，論理の観点から考えたい．特に，代数的量子論との関連を調べるために，物理系の論理が von Neumann 代数の射影子束と同型であるための条件や状態の構造，対称性の表現を調べることを，今後の研究課題としたい．

参考文献

[BC81] E. G. Beltrametti and G. Cassinelli, *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1981.

[BvN36] G. Birkhoff and J. von Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics*, Ann. Math. **37** (1936), no. 4, 823–843.

[Dir58] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed., Oxford University Press, 1958.

[FJSS62] D. Finkelstein, J. M. Jauch, S. Schiminovich, and D. Speiser, *Foundations of quaternion quantum mechanics*, J. Math. Phys. **3** (1962), no. 2, 207–220.

[GB70] S. P. Gudder and S. Boyce, *A comparison of the mackey and segal medels for qunatum mechanics*, Int. J. Theor. Phys. **3** (1970), 7–21.

[Gle57] A. M. Gleason, *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, J. Math. Mech. **6** (1957), 885–893.

[GP71] S. P. Gudder and C. Piron, *Observables and the field in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **12** (1971), 1583–1588.

[Grä03] G. Grätzer, *General lattice theory*, 2nd ed., Birkhäuser, 2003.

[Gud73] S. P. Gudder, *Quantum logics, physical space, position observables and symmetry*, Reports on Math. Phys. **4** (1973), 193–202.

[Ham03] J. Hamhalter, *Quantum measure theory*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[Hey63] A. Heyting, *Axiomatic Projective Geometry*, Interscience Publishers, Inc., 1963.

[Hol95] S. S. Holland, *Orthomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr*, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1995), 205–234.

[Hoo79] C. A. Hooker (ed.), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, vol. II: Contemporary Consolidation, D. Reidel Publishing Company, 1979.

[Jau68] J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1968.

[JP63] J. M. Jauch and C. Piron, *Can hidden variables be excluded in quantum mechanics?*, Helv. Phys. Acta **36** (1963), 827–837.

[KS67] S. Kochen and E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. **17** (1967), 331–348.

[Mac63] G. W. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., 1963.

[Seg47] I. E. Segal, *Postulates for General Quantum Mechanics*, Ann. Math. **48** (1947), 930–948.

[Sol95] M. P. Solèr, *Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces*, Comm. Algebra **23** (1995), 219–243.

[Var68] V. S. Varadarajan, *Geometry of quantum theory*, vol. I, van Nostrand, 1968.

[Var85] ———, *Geometry of quantum theory*, 2nd ed., Springer, 1985.

[Wil77] W. J Wilbur, *On characterizing the standard quantum logics*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **233** (1977), 265–282.

[Zie61] N. Zierler, *Axioms for non-relativistic quantum mechanics*, Pacific J. Math. **11** (1961), 1151–1169.