数理解析研究所講究録
第 1953 巻 2015 年 106-113

LOCC変換の漸近的可逆性
Asymptotic Reversibility of LOCC Conversions

名古屋大学　多元数理科学研究科 D1　伊藤康介 *
Kosuke Ito
Graduate School of Mathematics D1,
Nagoya University

1　はじめに

本稿では、[5] で発表した、純粋エンタングル状態の漸近的変換の可逆性についての理論を解説する。２つの系の間の量子エンタングル状態を量子情報処理に用いる場合、系が遠隔地で共有されていることを想定するため、２つの系にまたがる操作は現実的でない。そこで、状態の変換を局所操作と古典情報通信 (LOCC) に制限した場合、どのような状態間の変換が可能か、という問題が量子情報理論で研究されてきた。今回は、共有する独立同一なペアの数 n を大きくしていったときのLOCC 変換の漸近的可逆性を考える。特に、最大エンタングル状態は、多くの場合重要なリソースとなると信じられてきたため、一般の純粋エンタングル状態から最大エンタングル状態への変換（エンタングルメント濃縮）は、典型的な問題として、よく研究されてきた。しかし近年、最大エンタングル状態が、必ずしもリソースとして適切とは限らないケースが、例えば量子計算 [3]、量子通信路推定 [4]、等で報告されており、一般の状態間の変換も重要性を増している。一般に、ϕ の最適変換個数 m は、漸近的に $m=(S_{\psi}/S_{\phi})n+o(n)$ であることが知られている [2] ため、一見すると、常に可逆であると結論づけたくなり、ナイーブには復元個数をそのまま n として復元できると考えられてきた。ここに、S_{ψ} は ψ の von Neumann エントロピーを表す。しかし、そのような可逆性は常に成立するとは限らず、さらなる構造が存在する。この意味でエンタングルメント濃縮が漸近的に不可逆であることは、最近明らかになったばかりである [6]。そこで本稿では、初期状態も目的状態も一般の純粋エンタングル状態である場

*m13007a@math.nagoya-u.ac.jp

合、どのような状態間でLOCC変換変換が漸近的に可逆に達成できるか、その必要十分条件として得られた結果を解説する。さらに、一般に漸近的可逆性を保証するために、復元個数のロスがどれだけ必要かということも述べる。最後に、LOCCを、局所ユニタリ (LU) に制限した場合の誤差の極限公式を述べるする。LU変換への制限は、非漸近的に可逆性を保証するという意味で重要である。また、有限個数では、可逆にLOCC変換できることと、LU変換できることは同値であるから、漸近的にもこれが成立するか、という点でも興味深い。

数学的には、確率分布の変換の問題へと帰着される。純粋状態のLOCC変換が確率分布のmajorization変換に帰着できること [7] はよく知られており、今回のLOCC変換の解析もこれを出発点としてmajorization変換について考察した。一般のLOCC変換についての定理の証明は、本稿では省略して [5] を参照していただくこととして、LU変換の場合の定理の証明で、strong large deviation[1] を応用した手法についての概略を述べる。

2 LOCC変換の可逆性

有限次元の量子系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の純粋エンタングル状態 ψ から ϕ へのLOCC変換を考える。漸近的に、初期状態は $\psi^{\otimes n}$、目的状態は $\phi^{\otimes m_n}$ として、$n \to \infty$ での振る舞いに注目する。変換の誤差はBures距離 $B(\rho,\sigma) = \sqrt{1 - F(\rho,\sigma)}$ で測り、可逆性の指標 minimum conversion-recovery error (MCRE) を以下で定義する。ここに、$F(\rho,\sigma) := \mathrm{Tr}|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|$ はフィデリティーである。

$$\delta_n(\psi,\phi;\nu) := \min_{m\in\mathbb{N},C,D:\mathrm{LOCC}} B(C(\psi^{\otimes n}),\phi^{\otimes m}) + B(\psi^{\otimes n-\nu}, D\circ C(\psi^{\otimes n})). \tag{1}$$

これが $n \to \infty$ で0に収束するという意味での漸近的可逆性について考える。ただし、ν は復元個数のロスである。まず、$\nu = 0$ のとき、漸近的に可逆であるための必要十分条件は、以下のようになる。

定理 1. $\lim_{n\to\infty} \delta_n(\psi,\phi;0) = 0$ となるための必要十分条件は、

$$\frac{S_\psi}{V_\psi}\left(\frac{S_\phi}{V_\phi}\right)^{-1} =: C_{\psi,\phi} = 1 \tag{2}$$

である。ただし、$V_\psi := \mathrm{Tr}\{(\mathrm{Tr}_B\psi)(-\log(\mathrm{Tr}_B\psi) - S_\psi)^2\}$ とする。

この定理により、$S_\psi/V_\psi = S_\phi/V_\phi$ という、エントロピーと尤度分散の比が等しいという同値関係が、漸近的可逆性を完全に特徴づける事がわかる。

では次に、この条件を満たさない場合、どれだけ復元個数にロスを許せば、可逆となるだろうか。即ち、

$$R(\psi,\phi) := \inf_{\gamma}\left\{\gamma \;\middle|\; \delta_n(\psi,\phi;n^{\gamma}) \to 0 \qquad (n\to\infty)\right\}.$$

が$C_{\psi\phi}\neq 1$のときどうなるか、さらに、下限は達成できるか、である。次の定理がこれを特徴付ける。

定理 2. $C_{\psi\phi}\neq 1$のとき、$R(\psi,\phi)=\frac{1}{2}$が成立する。さらに、このとき任意の$\beta\in\mathbb{R}$に対し、$\lim_{n\to\infty}\delta_n(\psi,\phi;\beta n^{\frac{1}{2}})\neq 0$となる。

つまり、$C_{\psi\phi}\neq 1$のとき、ロスのオーダーが$\sqrt{n}$より真に大きいときに限って、不可逆性が克服される。従来の、ナイーブにLOCCが漸近的に可逆だという主張は、一般にこのオーダーのロスを許せば、という意味で考えなければならないということが分かる。さらに、$C_{\psi\phi}$が1か否かで、ロスが必要か否かが全く変わるという非自明な構造は、今回の解析で初めて得られた重要な結果であり、従来の視点では決して見えなかった。

3 LU変換

次に、局所ユニタリだけで変換する場合の誤差の極限を示す。LU変換の誤差は、復元の誤差は当然0なので、以下のように定義できる。

$$\epsilon_n(\psi,\phi) := \min\left\{ B((U_A\otimes U_B)\psi^{\otimes n},\phi^{\otimes m}) \;\middle|\; \begin{array}{l} m\in\mathbb{N} \\ U_A:\mathcal{H}_A^{\otimes n}\to\mathcal{H}_A^{\otimes m} \\ U_B:\mathcal{H}_B^{\otimes n}\to\mathcal{H}_B^{\otimes m} \\ U_A,U_B:\text{unitary}\end{array}\right\}. \quad (3)$$

状態ψ,ϕそれぞれのSchmidt係数二乗からなる確率分布P_ψ,P_ϕが格子確率分布であるときは、例外的な数学的困難さにより、求める極限の結果は得られていない。格子確率分布Qとは、以下のような確率分布である：$x,d\in\mathbb{R}$が存在して、確率1で$(\log Q - x)/d\in\mathbb{Z}$が成立する。ここではこのような状態を格子状態と呼ぶことにする。以下の定理が成立する。

定理 3. ψとϕ両方が格子状態でないとき、

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n(\psi,\phi)^2 = 1-\sqrt{\frac{2}{{C_{\psi\phi}}^{\frac{1}{2}}+{C_{\psi\phi}}^{-\frac{1}{2}}}} \quad (4)$$

が成立する。さらに、ϕの最適変換個数は$\frac{S_\psi}{S_\phi}n+o(\sqrt{n})$である。

この定理から、(格子状態を除けば) $C_{\psi\phi}=1$ であることがLU変換できることの必要十分条件であることが、ただちに分かる。少なくとも非格子状態では、LOCC変換が漸近的に可逆であることとLU変換可能であることは、漸近的にも同値であることが分かった。さらに、ここでは、誤差の極限を導出しているため、$C_{\psi\phi}$ が1に十分近ければ、精度よくLU変換できることが保証される。特に、ϕ が最大エンタングル状態で ψ がそうでないとき、誤差は最大値1をとる。LU変換では、最大エンタングル状態でない状態からは、最大エンタングル状態へ、漸近的に少しも近づけないということである。

n 有限の場合、LU変換ができるのは、ある m に対して $P_{\psi}^{n\downarrow}=P_{\phi}^{m\downarrow}$ が成立するという自明な場合に限られる。ただし $Q^{\downarrow}$ は、$Q^{\downarrow}(1)\geq Q^{\downarrow}(2)\geq\ldots$ のように、大きい順に並び替えた確率分布である。しかし、この定理はそれだけでなく、局所ユニタリ同値性は、漸近的には非自明に広がることを示唆しており、実際、数値計算でそのような例を発見した。詳しくは、[5]を参照されたい。

4 確率分布の並び替え変換と、定理3の証明の概略

まず、局所ユニタリ変換の最適化が、以下のように確率分布の並び替えによる変換に帰着できる。

$$\max_{U_A,U_B:\text{unitary}} F((U_A\otimes U_B)\psi,\phi)=F(P_{\psi}^{\downarrow},P_{\phi}^{\downarrow}). \tag{5}$$

ここに、右辺の $F(P,Q):=\sum_i\sqrt{P(i)Q(i)}$ は確率分布のフィデリティーである。従って、

$$\epsilon_n(\psi,\phi)^2=1-\max_{m\in\mathbb{N}}F(P_{\psi}^{n\downarrow},P_{\phi}^{m\downarrow}). \tag{6}$$

が成立する。よって、確率分布の並び替えにおけるフィデリティーを求めればよい。次の定理が目的である。ここでは、変換個数の $\sqrt{n}$ オーダーとフィデリティーの関係まで見ている。また、量子論に関係なく、純粋に確率分布についての結果であることを強調しておく。

定理 4. $\left|m_n-\frac{S_\psi}{S_\phi}n\right|/\sqrt{n}\to\infty$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty}F\left(P_{\psi}^{n\downarrow},P_{\phi}^{m_n\downarrow}\right)=0 \tag{7}$$

が成立する。さらに、P_ψ も P_ϕ も格子確率分布でない場合、$\frac{m_n-\frac{S_\psi}{S_\phi}n}{\sqrt{n}}\to b$

のとき

$$\lim_{n\to\infty} F\left(P_\psi^{n\downarrow}, P_\phi^{m_n\downarrow}\right) = \sqrt{\frac{2}{C_{\psi\phi}^{\frac{1}{2}} + C_{\psi\phi}^{-\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b^2 S_\phi^2}{4(1+C_{\psi\phi})V_\psi}\right]} \tag{8}$$

が成立する。

(証明の概略)

$\left|m_n - \frac{S_\psi}{S_\phi}n\right|/\sqrt{n} \to \infty$ の場合についての証明は、ここでは省略する。([5] を参照のこと。) P_ψ も P_ϕ も格子確率ではないとし、$(m_n - \frac{S_\psi}{S_\phi}n)/\sqrt{n} \to b$ とする。まず、キュムラント生成関数 $g_\omega(1+s) := \log \sum_i P_\omega(i)^{1+s}$ $(\omega = \psi, \phi)$ を考える。g_ω は狭義凸関数だから、g'_ω の逆関数 h_ω が定義できる。また、確率分布 $Z_{\omega,n}(\hat{j}) := (\log P_\omega^{n\downarrow}(\hat{j}) + nS_\omega)/\sqrt{n}$ を定義する。$J_{\omega,n}(a) := P_C\{Z_{\omega,n} \geq a\}$ とすると、これは $\log P_\omega^{n\downarrow}(i) \geq -nS_\omega + \sqrt{n}a$ を満たす最大の整数である。ただし P_C は数え上げ測度である。$a = Z_\omega(i)$ としたとき、これが（だいたい）確率 $P_\omega^{n\downarrow}(i)$ の大きさの順位をあたえる。この点に注目して、異なる分布の同じ大きさの順位を持つ確率 $P_\psi^{n\downarrow}(i), P_\phi^{m_n\downarrow}(i)$ の比較を行うというのが、この証明の要点である。そのためには、数え上げ測度の漸近展開として、高次の展開まで見る必要があり、strong large deviation [1] を用いる。g_ω の Legendre 変換は

$$\max_s sR - g_\omega(s) = h_\omega(R)R - g_\omega(h_\omega(R)) \tag{9}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\log P_C\{\log P_\omega^{n,\downarrow}(\hat{j}) \geq nR\} \\
=& -n(h_\omega(R)R - g_\omega(h_\omega(R))) - \log(\sqrt{2\pi n g''_\omega(h_\omega(R))}h_\omega(R)) + o(1) \\
=& -n(h_\omega(R)R - g_\omega(h_\omega(R))) - \log\sqrt{2\pi n} - \log h_\omega(R) + \frac{1}{2}\log {h_\omega}'(R) + o(1)
\end{aligned} \tag{10}$$

と展開できる。ΔZ を

$$\log J_{\phi,m_n}\left(\sqrt{\frac{n}{m_n}}(Z_{\psi,n} + \Delta Z)\right) - \log J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}) = o(1) \tag{11}$$

を満たすように定めると、以下のように評価できる。

$$
\begin{aligned}
&F(P_\psi^{n\downarrow}, P_\phi^{m_n\downarrow}) \\
=&\sum_j P_\psi^{n\downarrow}(j)\sqrt{\frac{P_\phi^{m_n\downarrow}(j)}{P_\psi^{n\downarrow}(j)}} \\
=&\sum_j P_\psi^{n\downarrow}(J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}(j)))\sqrt{\frac{P_\phi^{m_n\downarrow}(J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}(j)))}{P_\psi^{n\downarrow}(J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}(j)))}} \\
=&E\left[e^{\frac{1}{2}\left[\log P_\phi^{m_n\downarrow}(J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}(\hat{j})))-\log P_\psi^{n\downarrow}(J_{\psi,n}(Z_{\psi,n}(\hat{j})))\right]}\right] \\
=&E\left[e^{\frac{1}{2}\left[-m_nS_\phi+\sqrt{m_n}\sqrt{\frac{n}{m_n}}(Z_{\psi,n}+\Delta Z)-(-nS_\psi+\sqrt{n}Z_{\psi,n})+o(1)\right]}\right] \\
=&E\left[\exp\frac{1}{2}(nS_\psi - m_nS_\phi + \sqrt{n}\Delta Z + o(1))\right]. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

この四番目の等式の評価が、格子確率分布では、よりシビアとなり、示せていない。今の場合は、(10) の展開を用いて、ΔZ を求めればよい。結果として、

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{n}\Delta Z \\
=&bS_\phi\sqrt{n} - \frac{1}{2}\left[C_{\psi\phi}^{-1}(T-\frac{bS_\phi}{\sqrt{V_\psi}})^2 - T^2\right] + \frac{1}{2}\log C_{\psi\phi}^{-1} + o(1), \qquad (13)
\end{aligned}
$$

を得る。ただし $T := Z_{\psi,n}/\sqrt{V_\psi}$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
&F(P_\psi^{n\downarrow}, P_\phi^{m_n\downarrow}) \\
=&E\left[\exp\frac{1}{2}(-bS_\phi\sqrt{n} + \sqrt{n}\Delta Z + o(1))\right] \\
=&E\left[e^{-\frac{1}{4}\left[C_{\psi\phi}^{-1}(T-\frac{bS_\phi}{\sqrt{V_\psi}})^2-T^2\right]+\frac{1}{4}\log C_{\psi\phi}^{-1}+o(1)}\right]. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となり、中心極限定理により、

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{-\frac{1}{4}\left[C_{\psi\phi}^{-1}(T-\frac{bS_\phi}{\sqrt{V_\psi}})^2-T^2\right]+\frac{1}{4}\log C_{\psi\phi}^{-1}+o(1)}\right] \\
\to&\int C_{\psi\phi}^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}\left[C_{\psi\phi}^{-1}(t-\frac{bS_\phi}{\sqrt{V_\psi}})^2-t^2\right]} d\Phi(t)
\end{aligned}
$$

$$=\sqrt{\frac{2}{C_{\psi\phi}^{\frac{1}{2}}+C_{\psi\phi}^{-\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{b^2S_\phi^2}{4(1+C_{\psi\phi})V_\psi}\right]} \tag{15}$$

を得る。

5 まとめ

LOCC変換が漸近的に可逆となるための必要十分条件が$S_\psi/V_\psi = S_\phi/V_\phi$であることを示した。これは、平均と分散の比の釣り合いという、珍しい形をしていて非常に興味深い。この等式のより深い含蓄は、もっと汲み取る余地のあるものかもしれない。さらに、これが満たされない場合は、復元個数のロスが$\sqrt{n}$より大きいオーダーであることが、不可逆性を克服するために必要十分であることも示した。これにより、従来曖昧のまま議論されていた、漸近的可逆性の意味がはっきりとした。今後の問題として、有限の誤差を許した場合の漸近的可逆性の評価がある。この場合、変換操作と復元操作を同時に扱って、誤差の漸近的評価を一般に得る事が必要で、これは未解決である。特に、大きくとも有限のnにおける漸近評価が、より現実的には重要である。$S_\psi/V_\psi = S_\phi/V_\phi$の場合のLOCC変換一般と、LU変換の場合の収束の早さの違いなどは興味深い。

最後に、LOCC変換をLU変換に制限した場合の誤差の漸近公式を得た。これは、確率分布の並び替えによる変換に帰着され、そのまま確率分布についての結果として見ることができる。しかし、残念ながら確率分布の対数が格子確率変数となる場合には、収束性の都合が悪く、まだ未解決である。この問題の本質的に難しい点は、異なる確率分布同士の距離の漸近的振る舞いを、エントロピーなどの統計的な量だけで特徴づけるための適切な評価方法である。解決済みの場合についても困難であったのはこの点であるが、収束性の評価が、格子の場合に比べて単純となるため、strong large deviationを応用した今回の手法で解決できた。strong large deviation自体は、かなり昔から研究されてきたものの、その応用例は、まだ殆ど無いようである。ほとんどのlarge deviationの応用では、第一次の項の評価だけで十分なのであるが、今回は、より高次の項が直接極限に効いてくるという、シビアな評価をする必要があり、strong large deviationによる高次の評価が本質的であった。逆に言えば、今回得られたような、高次の評価を本質的な形で応用する手法を発展させれば、従来不可能であったようなレベルで、繊細な評価を統一的に扱う方法が展開できると考えられ、実際、最近統計力学の文脈で類似の手法が用いられた [8]。このようなテクニックは、今後もっと重要な役割を果たすと期待できる。

参考文献

[1] R. Bahadur and R. Rao. On deviations of the sample mean. *Ann.Math. Statist.*, 31:1015, 1960.

[2] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B.Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53:2046, 1996.

[3] D. Gross, S. T. Flammia, and J. Eisert. Most quantum states are too entangled to be useful as computational resources. *Phys. Rev. Lett.*, 102:190501, 2009.

[4] M. Hayashi. Comparison between the cramer-rao and the mini-max approaches in quantum channel estimation. *Comm. Math. Phys.*, 304:689–709, 2011.

[5] K. Ito, W. Kumagai, and M. Hayashi. Asymptotic compatibility between locc conversion and recovery. arXiv:1504.02967, 2015.

[6] W. Kumagai and M. Hayashi. Entanglement concentration is irreversible. *Phys. Rev. Lett.*, 111:130407, 2013.

[7] M. A. Nielsen. Conditions for a class of entanglement transformations. *Phys. Rev. Lett.*, 83:436, 1999.

[8] H. Tajima and M. Hayashi. Refined carnot's theorem; asymptotics of thermodynamics with finite-size heat baths. arXiv:1405.6457, 2014.