数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 42-47

近似GCDの安定性について

長坂耕作
KOSAKU NAGASAKA*
神戸大学人間発達環境学研究科
GRADUATE SCHOOL OF HUMAN DEVELOPMENT AND ENVIRONMENT, KOBE UNIVERSITY

1 はじめに

K を任意の体とし，$K[\vec{x}]$ を変数 $\vec{x}=x_1,\ldots,x_\ell$ に関する多項式環とする。多項式の最大公約因子 (Greatest Common Divisor) は，与えられた多項式 $f_1,\ldots,f_s\in K[\vec{x}]$ に対し，次式を満たす次数最大の多項式 $g\in K[\vec{x}]$ のことである。

$$\exists\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_s\in K[\vec{x}],\ f_i(\vec{x})=g(\vec{x})\bar{f}_i(\vec{x})\ \ (i=1,\ldots,s).$$

最大公約因子は，多くの代数的な計算で用いられる基盤的な道具であり，古くから研究されている。近年では，与えられた多項式が係数に誤差を含む場合に拡張した，近似 GCD の研究も進んでいる。ここで，近似 GCD とは，与えられた多項式 $f_1,\ldots,f_s\in K[\vec{x}]$ に対し，次式を満たす多項式 $g\in K[\vec{x}]$ のことである。

$$\exists\Delta_1,\ldots,\Delta_s\in K[\vec{x}],\ g(x)=\gcd(f_1+\Delta_1,\ldots,f_s+\Delta_s).$$

近似 GCD は，数値的な方法を用いて解かれることが多いため，数値的安定性が主な研究トピックとなっているが，他方，近似 GCD は摂動後の多項式の厳密な GCD でもあり，数学的な安定性の側面も持っている。本発表では，この数学的な安定性の側面に着目し，簡単なサーベイと新しい結果について取り上げる。

2 パラメータ係数のGCD

近似 GCD などの係数に誤差を許容した算法では，誤差をパラメータ ($\vec{u}=u_1,\ldots,u_r$) として表現することで，$K[\vec{x}]$ における GCD の問題から，$K[\vec{u}][\vec{x}]$ における GCD の問題に帰着させることがある。Gröbner 基底計算では，$K[\vec{u}][\vec{x}]$ における計算結果が，パラメータに値を代入したあとでも正しい（$K[\vec{x}]$ における Gröbner 基底になっている）かの研究が進んでいる。これは包括的 Gröbner 基底 [W92] と呼ばれており，誤差を含む入力に対する近似 Gröbner 基底への応用 [W02] も研究されている。一方，多項式 GCD に関しては，包括的 Gröbner 基底に比べると，包括的な研究はあまり行われていない（表 1 に，簡単に関係する主な研究を抽出し並べた)。以下では，順に主な先行研究について簡単に紹介していく。

On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter [AK93]
この先行研究では，K を体，$K[\alpha][x]$ を，α をパラメータとする x に関する 1 変数多項式環とし，その要素である 2 つの多項式 $u(x,\alpha),v(x,\alpha)\in K[\alpha][x]$ について，その多項式 GCD を α による場合分けで求めるアルゴリズムが提案されている。

*nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

多項式 GCD		Gröbner 基底	
1973	Half-GCD の提案	1965	Buchberger アルゴリズム
1974	近似 GCD の導入 [D74]		
1985	Quasi-GCD [S85]		
1985	GCD by Gröbner bases [GT85]		
1989	Parametric GCD [G89]	1992	Comprehensive Gröbner bases [W92]
1993	Parametric GCD [AK93]	1993	Floating-Point Gröbner bases [S93]
1997	ε-GCD [EGL97]	2003	Gröbner: Inexact Input [W02]
2004	UVGCD [Z11]	2005	Impossible Concept? [S05]
2010	Parametric GCD [A10]	2006	Suzuki-Sato Algorithm [SS06]

表 1: 多項式 GCD と Gröbner 基底の研究の歴史（概要）

アルゴリズムは，多項式剰余列に同伴な部分終結式の列を用いており，結果として，$\{\{d_1(\alpha), g_1(x,\alpha)\}, \ldots, \{d_r(\alpha), g_r(x,\alpha)\}\}$ という形式の出力が得られる。出力の各ペアにおいて，$d_i(\omega)=0$ を満たす $\omega \in K$ を代入すると，$\gcd(u(x,\omega), v(x,\omega)) = g_i(x,\omega)$ が成立することが保証されている。

具体的な計算例として，$f_1(x) = x^2 + (\alpha-1)x + \alpha$, $f_2(x) = (\alpha+1)x^2 + 2\alpha$ に対し，$\{\{\alpha-1,\ x^2+1\}, \{3\alpha^2+2\alpha,\ x+3\alpha\}, \{0,\ 1\}\}$ が，$f_1(x) = \alpha x^3 + (\alpha^3-\alpha+1)x^2 + (\alpha^2+2)x + 3\alpha^2 - 3$ と $f_2(x) = \alpha x^3 + (\alpha+1)x^2 + 4x + 3$ に対し，$\{\{\alpha^2-2,\ 2x^3+(\alpha+2)x^2+4\alpha x+3\alpha\}, \{\alpha,\ x+3\}, \{0,\ \alpha x^2+x+3\}\}$ が挙げられている。

Complexity of algorithms for computing greatest common divisors ... [A10]

この先行研究では，有理数体の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の値を取るパラメータ ($\vec{u} = u_1, \ldots, u_r$) を係数に持つ，1 変数の多項式集合 $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathbb{Q}[u_1, \ldots, u_r][x]$ の最大公約因子について取り上げている。具体的に，Parametric Greatest Common Divisor (PGCD) という定義を与え，入力された多項式集合に対して，その PGCD として $\{\{W_1, g_1\}, \ldots, \{W_t, g_t\}\}$ を出力するアルゴリズムが提案されている。

ここで，PGCD は，各 W_i は $\bar{\mathbb{Q}}^r$ の部分集合から代数的に構成可能で，$g_i \in \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_r)[x]$ であること，そして，$\forall \vec{\alpha} \in W_i$, $g_i(x,\vec{\alpha}) = \gcd(f_1(x,\vec{\alpha}), \ldots, f_k(x,\vec{\alpha}))$ が成立するものとして定義されている。

論文で提案されている主なアルゴリズムは 2 つあり，1 つは，擬除算による Euclid の互除法であり，もう 1 つは，パラメータ要素の行列に対する Gauss の消去法を用いて，Bézout 係数に関するパラメータを含む線型方程式を解くものである。

以上の先行研究は，パラメータ係数の多項式の GCD を直接的に求めようとするものであるが，本発表では，以下に紹介する Gröbner 基底計算による最大公約因子計算法を，パラメータ係数に拡張する。

Gcd's and factoring multivariate polynomials using grobner bases [GT85]

R を可換な単位的ネーター環とし，K を体，a, b, c で生成されるイデアルを $\langle a, b, c\rangle$ で表すとする。この論文では，以下の 2 つを含むいくつかの結果が述べられている（証明は与えられていない）。

- $f_1, \ldots, f_s, g \in R$ とし，J を $\langle f_1, \ldots, f_s, J\rangle \ni 1$ を満たす R のイデアルとする。このとき，$\forall k \in \mathbb{N}_{>0}$, $\langle f_1 \cdot g, \ldots, f_s \cdot g, J^k\rangle = \langle g, J^k\rangle$ が成立する。
- $f_1, \ldots, f_s, g \in K[x, y_1, \ldots, y_n]$ を x に関して原始的，J を $K[y_1, \ldots, y_n]$ の極大イデアルで，$\langle f_1, \ldots, f_s, J\rangle \ni 1$ と $\exists i$, $\langle \mathrm{lc}_x(f_i \cdot g), J\rangle \ni 1$ を満たすとする。このとき，G が $\langle f_1 \cdot g, \ldots, f_s \cdot g, J^k\rangle$

の全次数順序の簡約 Gröbner 基底ならば，十分大きな k に対し，$g_k \sim \gcd(f_1 \cdot g, \ldots, f_s \cdot g)$ が成立する。ここで，g_k は最小の全次数を持つ G の要素である。

3　1変数多項式の場合

本章では，複数のパラメータ $(\vec{u})$ を係数に持つ 1 変数多項式環において，与えられた多項式集合 $F = \{f_1, \ldots, f_\ell\} \subset K[\vec{u}][x_1]$ のパラメータによる GCD の場合分け（これをパラメトリック GCD と以後呼ぶ）を求めるものとする。この場合，$K[x_1]$ は PID（単項イデアル整域）であり，$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle \gcd(f_1, \ldots, f_s) \rangle$ が成立するため，Gianni と Trager の 1985 年の結果を使う必要はなく，包括的 Gröbner 系計算により，直接的にパラメトリック GCD を求めることができる。

定義 1 (包括的 Gröbner 系)
$F \subset K[\vec{u}][\vec{x}] = K[u_1, \ldots, u_\lambda][x_1, \ldots, x_\ell]$, $S \subset \bar{K}^\lambda$ に対し，$G = \{(A_1, G_1), \ldots, (A_r, G_r)\}$ が次の 3 つを満たすとき，F の S 上の包括的 Gröbner 系 (CGS) と呼ぶ。1) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(G_i)$ は，$\langle \sigma_{\vec{\omega}}(F) \rangle \subset \bar{K}[\vec{x}]$ の Gröbner 基底である，2) $G_1, \ldots, G_r \subset K[\vec{u}][\vec{x}]$，3) $A_1, \ldots, A_r \subset \bar{K}^\lambda$ は，代数的に構成可能で $S = \bigcup A_i$ を満たす。 ◁

定義 2 (極小 CGS)
$F \subset K[\vec{u}][\vec{x}] = K[u_1, \ldots, u_\lambda][x_1, \ldots, x_\ell]$, $S \subset \bar{K}^\lambda$ に対し，その CGS である $G = \{(A_1, G_1), \ldots, (A_r, G_r)\}$ が次の 3 つも満たすとき，極小 CGS と呼ぶ。1) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\forall g \in G_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(\mathrm{ht}(g)) \neq 0$, 2) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(G_i)$ は，$\langle \sigma_{\vec{\omega}}(F) \rangle$ の極小 Gröbner 基底である，3) $A_i \neq \phi$ かつ，任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$ が成り立つ。 ◁

与えられた多項式集合 $F = \{f_1, \ldots, f_\ell\} \subset K[\vec{u}][x_1]$ の全次数順序に関する極小 CGS を $\{(A_1, G_1), \ldots, (A_r, G_r)\}$ とする。このとき，各 G_i の最小順序多項式を $g_i(x_1, \vec{u})$ とすれば，$\mathcal{G} = \{(A_1, g_1), \ldots, (A_r, g_r)\}$ は，F のパラメトリック GCD を与えることは定義から明らかである。なお，この方法は，Fortuna ら [FGT01] でも多少言及されているが，極小 CGS とパラメトリック GCD は同じものではないので注意が必要である。

例 1
Abramov ら [AK93] による計算例で使われた以下の多項式に対してパラメトリック GCD を求める。

$$f_1(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha,\ f_2(x) = (\alpha + 1)x^2 + 2\alpha$$

Nabeshima[N12] による CGS 計算アルゴリズムを用い，$F = \{f_1, f_2\}$ の極小 CGS を計算し，それからパラメトリック GCD を求めたものが次式である（極小化は手計算による）。

$$\begin{aligned}&\{(\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 = 0\},\ x_1),\ (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 - 1 = 0\},\ x_1^2 + 1),\\ &\ (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid 3\omega_1 + 2 = 0\},\ x_1 - 2),\ (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid 3\omega_1^3 - \omega_1^2 - 2\omega_1 \neq 0\},\ 1)\}.\end{aligned}$$

Abramov らの結果（$\{\{\alpha - 1,\ x^2 + 1\}, \{3\alpha^2 + 2\alpha,\ x + 3\alpha\}, \{0,\ 1\}\}$）とほぼ同じことが確認できる。 ◁

例 2
同様に，Abramov ら [AK93] による計算例で使われた以下の多項式に対してパラメトリック GCD を求める。

$$f_1(x) = \alpha x^3 + (\alpha^3 - \alpha + 1)x^2 + (\alpha^2 + 2)x + 3\alpha^2 - 3,\ f_2(x) = \alpha x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 4x + 3$$

Nabeshima[N12] による CGS 計算アルゴリズムを用い，$F = \{f_1, f_2\}$ の極小 CGS を計算し，それからパラメトリック GCD を求めたものが次式である（極小化は手計算による）。

$$\begin{aligned}&\{(\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 = 0\},\ x_1 + 3),\ (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1^2 - 2 = 0\},\ 2x_1^3 + (u_1 + 2)x_1^2 + 4u_1 x_1 + 3u_1),\\ &\ (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1^3 - 2\omega_1 \neq 0\},\ (u_1^3 - 2u_1)x_1^2 + (u_1^2 - 2)x_1 + 3u_1^2 - 6)\}.\end{aligned}$$

最後の組も，簡約表現にすれば， *Abramov* らの結果（$\{\{\alpha^2-2,\ 2x^3+(\alpha+2)x^2+4\alpha x+3\alpha\},\ \{\alpha,\ x+3\},\{0,\ \alpha x^2+x+3\}\}$ ）と同じであることが確認できる。 ◁

3.1 パラメトリック GCD の包括的 Gröbner 基底に準ずる GCD の存在

パラメータ係数多項式に対する包括的 Gröbner 系には，附随して，包括的 Gröbner 基底がある。

定義 3 (包括的 Gröbner 基底)
$F\subset K[\vec{u}][\vec{x}]=K[u_1,\ldots,u_\lambda][x_1,\ldots,x_\ell]$, $S\subset\bar{K}^\lambda$ に対して，$G\subset K[\vec{u}][\vec{x}]$ が，F の S 上の包括的 *Gröbner* 基底 *(***CGB***)* であるとは，$\forall\vec{\omega}\in S$, $\sigma_{\vec{\omega}}(G_i)$ が，$\langle\sigma_{\vec{\omega}}(F)\rangle\subset\bar{K}[\vec{x}]$ の *Gröbner* 基底あることを言う。 ◁

パラメトリック GCD が極小 CGS から計算可能という事実に際し，パラメトリック GCD の各組を包括的 Gröbner 基底のように 1 つに束ねられるか，という自然な疑問が湧く。しかしながら，一般に存在しないことが，$f_1(x_1,u_1)=x_1-u_1$ と $f_2(x_1,u_1)=x_1-1$ に対するパラメトリック GCD から簡単に分かる。これらの多項式のパラメトリック GCD は，$\{(\{\omega_1\in\mathbb{C}\mid\omega_1=1\},\ x_1-1),\ (\{\omega_1\in\mathbb{C}\mid\omega_1\neq1\},\ 1)\}$ である。もし，1 つに束ねられるなら，次の $g(x_1,u_1)\in\mathbb{C}[u_1][x_1]$ が存在しなければならない。

$$g(x_1,u_1)=\begin{cases}x_1-1 & (u_1=1),\\ 1 & (u_1\neq1).\end{cases}$$

しかし，この性質を満たす多項式は当然存在しない。一方，パラメトリック GCD に含まれる組の数を最小化（常に組の数は 2 つ以下）することは，パラメータの数が 1 つならば可能である（計算例は省略する)。

4 多変数多項式の場合

本章では，まず，Gianni と Trager の 1985 年の結果を次のように若干の改善を行う。

定理 4
$f_1,\ldots,f_s,g\in K[x,\vec{y}]=K[x,y_1,\ldots,y_n]$ を x に関して原始的な多項式，$J\subset K[\vec{y}]$ を極大イデアルで，$\langle f_1,\ldots,f_s,J\rangle\ni1$, $\exists i,\langle\mathrm{lc}_x(f_i\cdot g),J\rangle\ni1$ を満たすとする。w_1 を x の重み，w_2 を $\vec{y}$ に関する全次数に対する重みとして，G を，$\langle f_1\cdot g,\ldots,f_s\cdot g,J^k\rangle$ の w_1,w_2 による重み付き全次数順序に関する *Gröbner* 基底とする（簡約でなくてよい)。このとき，次のどちらかが満たされるならば，$\gcd(f_1\cdot g,\ldots,f_s\cdot g)\sim\bar{g}$ が成り立つ。ここで，$\bar{g}$ は，G の重み付き全次数が最小の要素である。

- (J^k の最小全次数) $>\mathrm{tdeg}(g)^2$
- (J^k の最小全次数) $>\left(\frac{\deg_x(g)}{w_2}+\frac{\mathrm{tdeg}_{\vec{y}}(g)}{w_1}\right)\mathrm{wdeg}_{w_1,w_2}(g)$

ここで，$\mathrm{tdeg}(\cdot)$ は $x,\vec{y}$ に関する全次数，$\deg_x(\cdot)$ は x に関する次数，$\mathrm{tdeg}_{\vec{y}}(\cdot)$ は $\vec{y}$ に関する全次数，$\mathrm{wdeg}_{w_1,w_2}(\cdot)$ は重み付き全次数を表す。 ◁

この定理の証明は，Gianni と Trager の論文の意図に沿って可能であり，ここではその概略を示しておく。まず，$\langle f_1,\ldots,f_s,J\rangle\ni1\Longrightarrow\langle f_1,\ldots,f_s,J^k\rangle\ni1$ と，$g\in\langle f_1\cdot g,\ldots,f_s\cdot g,J^k\rangle\Longrightarrow\langle f_1\cdot g,\ldots,f_s\cdot g,J^k\rangle\supset\langle g,J^k\rangle$ であることから，$\langle f_1\cdot g,\ldots,f_s\cdot g,J^k\rangle=\langle g,J^k\rangle$ を得る。次に，$\bar{g}\in\langle g,J^k\rangle\Longrightarrow\exists h\in K[x,\vec{y}]$, $\bar{g}\equiv h\cdot g \bmod J^k$ である事実から，$\mathrm{res}_x(g,\bar{g})\equiv0\bmod J^k$ であること，即ち，$\mathrm{res}_x(g,\bar{g})\in J^k$ を得る。終結式の次数上限に関して，$\mathrm{tdeg}(\mathrm{res}_x(g,\bar{g}))\le\deg_x(g)\mathrm{tdeg}_{\vec{y}}(\bar{g})+\deg_x(\bar{g})\mathrm{tdeg}_{\vec{y}}(g)$ が成り立つことから，$\bar{g}\in\langle g,J^k\rangle\Longrightarrow\mathrm{res}_x(g,\bar{g})=0$ が得られる。最終的に，$\bar{g}$ が G の重み付き全次数最小の要素であることと，$g(x,\vec{y})$ が x に関して原始的であることから，定理の主張である $g(x,\vec{y})\sim\bar{g}(x,\vec{y})$ が証明される。

4.1 パラメトリックGCDの計算方法

定理4を用いて，$F = \{f_1, \ldots, f_\ell\} \subset K[\vec{u}][\vec{x}]$ に対するパラメトリックGCDの計算法を提案する。まず，GianniとTragerの1985年の結果やその改善である定理4を利用するには，1変数の場合と異なり，いくつか満たさなければならない条件が存在する。それぞれについて解決方法を述べる。

$\sigma_{\vec{\alpha}}(f_1), \ldots, \sigma_{\vec{\alpha}}(f_s)$ は x_1 に関して原始的

原始的部分の取り出しは，再帰的にParametric GCDを計算することで実現できる。

$\sigma_{\vec{\alpha}}(J)$ は極大イデアル

K が代数閉体 $(K = \bar{K})$ ならば，相違なる定数項を持つ $h_i(x_i, \vec{u})$ を x_i に関してモニックかつ $\deg_{x_i}(h_i) = 1$ と取れば，$\langle h_2, \ldots, h_\ell \rangle$, $h_i \in K[\vec{u}][x_i]$ は常に極大イデアルとできる。そうでない場合 $(K \neq \bar{K})$ は，$\sigma_{\vec{\alpha}}(h_2), \ldots, \sigma_{\vec{\alpha}}(h_\ell)$: を K 上既約で互いに素に取れば，$\langle h_2, \ldots, h_\ell \rangle$, $h_i \in K[\vec{u}][x_i]$ は常に極大イデアルとできる。

$\exists i,\ \langle \mathrm{lc}_{x_1}(\sigma_{\vec{\alpha}}(f_i)), \sigma_{\vec{\alpha}}(J) \rangle \ni 1$

この条件は，パラメータ係数を K の要素に写すSpecializationに依存し，一般に保証する J は存在しない。そのため，新たなパラメータ v を導入し，$K[\vec{u}][\vec{x}]$ を $K[\vec{u}, v][\vec{x}]$ に埋め込み，v で条件の組に分割し計算を繰り返す必要がある。

$\langle \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_s, \sigma_{\vec{\alpha}}(J) \rangle \ni 1$

この条件は，いわゆる「法がラッキーか」という問題であり，上の条件と同じくSpecializationに依存するため，満たされない場合は，当該の条件の組のみを再計算する必要がある。なお，$\bar{f}_i(\vec{x}) \in K[\vec{x}]$: $\sigma_{\vec{\alpha}}(f_i)$ は，$\gcd(\sigma_{\vec{\alpha}}(f_1), \ldots, \sigma_{\vec{\alpha}}(f_s))$ による余因子で，これは包括的Gröbner基底や系の計算の枠組みで求められる。

$\sigma_{\vec{\alpha}}(G)$ は重み付き全次数順序に関するGröbner基底

GianniとTragerによる1985年の結果では，簡約Gröbner基底であることが求められていたが，定理4により簡約条件を外したため，より効率的に計算することが可能となっている。

参 考 文 献

[AK93] Abramov, S. A., Kvashenko, K. Y., 1993. On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter. In: Proceedings of the 18th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ISSAC '93. ACM, New York, NY, USA, pp. 152–156.

[A10] Ayad, A., 2010. Complexity of algorithms for computing greatest common divisors of parametric univariate polynomials. Int. J. Algebra 4 (1-4), 173–188.

[AFA13] Ayad, A., Fares, A., Ayyad, Y., 2013. Parametric euclidean algorithm. Theoretical Mathematics and Applications 3 (3), 13–21.

[D74] Dunaway, D. K., 1974. Calculation of zeros of a real polynomial through factorization using Euclid's algorithm. SIAM J. Numer. Anal. 11, 1087–1104.

[EGL97] Emiris, I. Z., Galligo, A., Lombardi, H., 1997. Certified approximate univariate GCDs. J. Pure Appl. Algebra 117/118, 229–251, algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[FGT01] Fortuna, E., Gianni, P., Trager, B., 2001. Degree reduction under specialization. J. Pure Appl. Algebra 164 (1-2), 153–163, effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000).

[GT85] Gianni, P., Trager, B., 1985. Gcd's and factoring multivariate polynomials using grobner bases. In: Caviness, B. (Ed.), EUROCAL '85. Vol. 204 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 409–410.

[G89] Grigor′ev, D. Y., 1989. Complexity of quantifier elimination in the theory of ordinary differential equations. In: EUROCAL '87 (Leipzig, 1987). Vol. 378 of Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, pp. 11–25.

[N12] Nabeshima, K., 2012. Stability conditions of monomial bases and comprehensive gr bner systems. In: Gerdt, V., Koepf, W., Mayr, E., Vorozhtsov, E. (Eds.), Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 7442 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 248–259.

[S85] Schönhage, A., 1985. Quasi-gcd computations. J. Complexity 1 (1), 118–137.

[S93] Shirayanagi, K., 1993. An algorithm to compute floating point Gröbner bases. In: Proceedings of the Maple summer workshop and symposium on Mathematical computation with Maple V : ideas and applications. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, pp. 95–106.

[S05] Stetter, H. J., 2005. Approximate Gröbner bases – an impossible concept? In: Proceedings of SNC 2005 (Symbolic-Numeric Computation). pp. 235–236.

[SS06] Suzuki, A., Sato, J., 2006. A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. In: ISSAC 2006. ACM, New York, pp. 326–331.

[W92] Weispfenning, V., 1992. Comprehensive Gröbner bases. J. Symbolic Comput. 14 (1), 1–29.

[W02] Weispfenning, V., 2002. Gröbner bases for inexact input data. In: Proceedings of CASC 2003 (Computer Algebra in Scientific Computing). pp. 403–411.

[Z11] Zeng, Z., 2011. The numerical greatest common divisor of univariate polynomials. In: Randomization, relaxation, and complexity in polynomial equation solving. Vol. 556 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 187–217.