数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 91-101

円内接多角形における面積公式・半径公式・統合公式について*

森継 修一

SHUICHI MORITSUGU†

筑波大学図書館情報メディア系

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

円内接多角形問題とは，

「円に内接する n 角形の各辺の長さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，
その多角形の面積および外接円の半径を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の式で表せ.」

という古典的な幾何学の問題である．本稿では,「$n=5,6$ の場合における“面積公式”と“半径公式”を“統合した公式”」を計算した結果を報告する．なお，本研究における先行論文 [3][4] と重複する部分は要約のみを記し，派生した結果として,「$n=5,6$ に対する面積公式の終結式による計算方法」を付録に示す.

三角形 ($n=3$) の場合には Heron の公式 (1 世紀) とよばれる古典的な結果が知られていて，外接円の半径 R と三角形の面積 S がそれぞれ,

$$R=\frac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}} \tag{1}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)} \tag{2}$$

と表されるので，両者を結びつけて根号部分を消去すると次の式が得られる.

$$4SR=a_1a_2a_3 \tag{3}$$

また，四角形 (n=4) に対する結果は，Brahmagupta の公式 (7 世紀) とよばれ，半径および面積が

$$R=\sqrt{\frac{(a_1a_2+a_3a_4)(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3)}{(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4)}} \tag{4}$$

$$S=\frac{\sqrt{(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4)}}{4} \tag{5}$$

と表されるので，両者を結びつけて根号のない形で表すと次の式になる.

$$(4SR)^2=(a_1a_2+a_3a_4)(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3) \tag{6}$$

---

*本研究は科研費 (25330006) の助成を受けたものである.

†moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

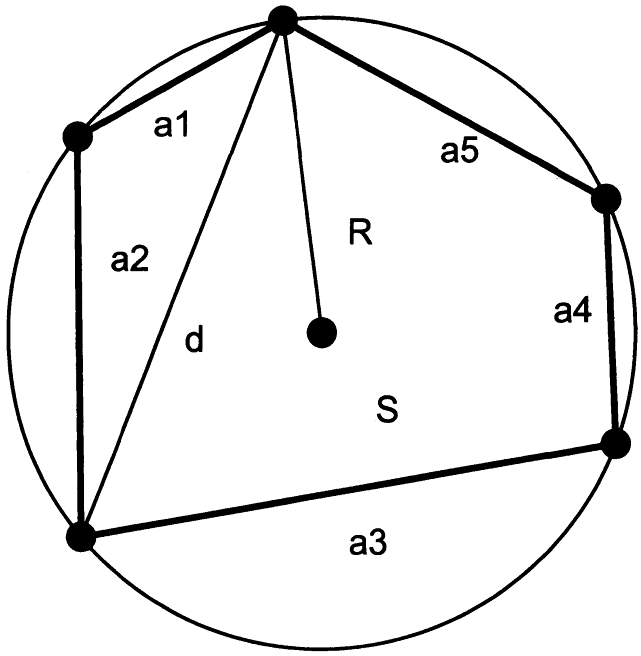

図 1: 円内接五角形の面積 S および外接円半径 R

ただし，上記の式 (4)(5) は，凸な四角形の場合のみに対応している．$n=4$ の場合は，凸でない四角形に対する公式

$$R=\sqrt{\frac{-(a_1a_2-a_3a_4)(a_1a_3-a_2a_4)(a_1a_4-a_2a_3)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3-a_4)(a_1-a_2-a_3+a_4)(-a_1+a_2-a_3+a_4)}} \tag{7}$$

$$S=\frac{\sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3-a_4)(a_1-a_2-a_3+a_4)(-a_1+a_2-a_3+a_4)}}{4} \tag{8}$$

について，両者を結びつけた次の式も考慮する必要がある．

$$(4SR)^2=-(a_1a_2-a_3a_4)(a_1a_3-a_2a_4)(a_1a_4-a_2a_3) \tag{9}$$

以上のことから，半径公式と面積公式を“統合した公式”は，$Z=z^2=(4SR)^2$ (ただし，S: 多角形の面積　R: 外接円半径) とおくと，$n=3, n=4$ のそれぞれに対して，

$$z-a_1a_2a_3=0 \text{ および } Z-a_1^2a_2^2a_3^2=0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(Z-(a_1a_2+a_3a_4)(a_1a_3+a_2a_4)(a_1a_4+a_2a_3))\\ &\times\ (Z+(a_1a_2-a_3a_4)(a_1a_3-a_2a_4)(a_1a_4-a_2a_3))=0\end{aligned} \tag{11}$$

と表されることがわかる．Heron, Brahmagupta の公式を $n\geq 5$ に拡張したとき，任意の n 角形に対して，

- 面積公式は $16S^2$ の多項式で表される
- 半径公式は R^2 の多項式で表される

ことがすでに示されている [6]．これにしたがい，式 (10)(11) を $n=5,6$ の場合に拡張すれば，

- 五角形の場合: z の 7 次式 および Z の 7 次式
- 六角形の場合: (Z の 7 次式) $\times$ (Z の 7 次式)

という形になることが予想される．本研究では，これらの式を具体的に計算することに成功したので，以下でその結果を報告する．

2 Brute Force アルゴリズム

2.1 基本対称式による表現

円内接 n 角形において，辺の長さ a_i の 2 乗からなる基本対称式を $s_1^{(n)}=a_1^2+\cdots+a_n^2$, ..., $s_n^{(n)}=a_1^2\cdots a_n^2$ とおく．一般には次数 (n) を省略し，また，$\sqrt{s_n}=a_1\cdots a_n$ という表現も用いることにすると，$n=3,4$ に対する式 (10) (11) は次のように書き換えられる．

定理 1
三角形および円内接四角形に対する $Z=(4SR)^2$ の定義方程式は以下で表される．

$$\begin{cases} Z-s_3 \;=\; 0 \\ Z^2-2s_3Z+\left(s_3^2-s_1^2s_4\right) \;=\; \left(Z-s_3+s_1\sqrt{s_4}\right)\left(Z-s_3-s_1\sqrt{s_4}\right) \;=\; 0 \end{cases} \tag{12}$$

ここでさらに crossing parity ε [6][1] という概念を導入し，その値は 0 (三角形)・+1 (凸四角形) ・−1 (非凸四角形) をとるものとすると，$n=3,4$ に対する各公式はそれぞれ 1 つにまとめることができる．面積公式は $x=(4S)^2$ に対して

$$x-(-s_1^2+4s_2+\varepsilon\cdot 8\sqrt{s_4})=0. \tag{13}$$

となり，半径公式は $y=R^2$ に対して

$$(-s_1^2+4s_2+\varepsilon\cdot 8\sqrt{s_4})y-(s_3+\varepsilon\cdot s_1\sqrt{s_4})=0. \tag{14}$$

で表される．$Z=xy$ の関係で両者を結び付ければ，直ちに以下を得る．

系 2
$Z=(4SR)^2$ に関する統合公式 *(12)* は

$$Z-(s_3+\varepsilon\cdot s_1\sqrt{s_4})=0 \tag{15}$$

で表される．($s_3^{(3)}=s_3^{(4)}\,|_{a_4=0}$ などの関係より，記法は意図的に混用されている．)

ここでの定式化においては，外接円の中心からみた角度の方向に応じて，符号付面積を求めていることになるので，$z=4SR$ の値の正負は区別する必要がなく，式 (3) は以下のように書き換えられる．($n=4$ のときには，このような z に関する表現は存在しない．)

系 3
任意の三角形に対して，統合公式の別表現が存在する．

$$|z|-\sqrt{s_3}=0 \qquad (z=4SR=\pm\sqrt{Z},\quad \sqrt{s_3}=a_1a_2a_3) \tag{16}$$

2.2 円内接五角形に対する統合公式

既知の方法 [6][5][2] により，半径公式 (2,922 項) は既に求められているものとする．

$$\begin{aligned}\Phi_R(y) &= B_7y^7+B_6y^6+B_5y^5+B_4y^4+B_3y^3+B_2y^2+B_1y+B_0 \\ &= 0 \qquad\qquad (y=R^2,\quad B_i\in\mathbf{Z}[a_1^2,\ldots,a_5^2])\end{aligned} \tag{17}$$

5 次の基本対称式 $s_1=a_1^2+\cdots+a_5^2$, …, $s_5=a_1^2\cdots a_5^2$ を用いて，各係数を書き換える．

$$\tilde{\Phi}_R(y)=\tilde{B}_7y^7+\tilde{B}_6y^6+\cdots+\tilde{B}_1y+\tilde{B}_0=0,\quad \tilde{B}_i\in\mathbf{Z}\,[s_1,\ldots,s_5] \qquad (81\text{ 項}) \tag{18}$$

一方，Robbins による面積公式 [6][1] は，最初から基本対称式表現で求める構成になっている．

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_S(x) &= x^7+\tilde{C}_6x^6+\cdots+\tilde{C}_1x+\tilde{C}_0=0 \qquad (153\text{ 項}) \\ &\qquad \Big(x=(4S)^2,\quad \tilde{C}_i\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_5]\Big)\end{aligned} \tag{19}$$

これら 2 式 (18)(19) における $\tilde{\Phi}_R(y)$ と $\tilde{\Phi}_S(x)$ を結びつけるために，まず，半径公式に対して $y=Z/x$ を代入する．

$$\tilde{\Phi}'_R(x,Z)=x^7\tilde{\Phi}_R(Z/x)=\tilde{B}_7Z^7+\tilde{B}_6Z^6x+\cdots+\tilde{B}_1Zx^6+\tilde{B}_0x^7 \tag{20}$$

次に，$\tilde{\Phi}'_R(x,Z)$ と $\tilde{\Phi}_S(x)$ から終結式計算により x を消去する．

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(Z) &= \mathrm{Res}_x(\tilde{\Phi}'_R(x,Z),\tilde{\Phi}_S(x)) \\ &= \tilde{A}_{49}Z^{49}+\cdots+\tilde{A}_0 \qquad \Big(\tilde{A}_i\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_5]\Big) \qquad (2{,}093{,}279\text{ 項})\end{aligned} \tag{21}$$

ここまでの計算には，現在の環境 (Maple14, Win64, Xeon(2.93GHz)×2, 192GB RAM) で約 15 分の CPU 時間を要する．最後にこの 49 次式を因数分解すると，(7 次) × (42 次) に分かれるので真の因子である 7 次式を取り出す．(この因数分解には CPU 時間で約 80 時間を必要とした．[3])

定理 4
円内接五角形において，$Z=(4SR)^2$ の定義多項式は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\psi_5(Z) = \ & Z^7-4s_3Z^6+\left(-28s_1s_5-2s_1^2s_4+6s_3^2\right)Z^5 \\ & +\left((-s_1^4-10s_1^2s_2-8s_2^2+52s_1s_3-32s_4)s_5+4s_3(s_1^2s_4-s_3^2)\right)Z^4 \\ & +\big(4(37s_1^2-48s_2)s_5^2+(-2s_1^4s_3+12s_1^3s_4+64s_3s_4+4s_1^2s_2s_3+16s_2^2s_3 \\ & \qquad -20s_1s_3^2-64s_1s_2s_4)s_5+(s_1^2s_4-s_3^2)^2\big)Z^3 \\ & +\big(-576s_5^3+(64s_1s_4-80s_1s_2^2+28s_1^3s_2-8s_1^2s_3+128s_2s_3-2s_1^5)s_5^2 \\ & \qquad +(2s_1^4s_2s_4-12s_1^3s_3s_4-8s_1^2s_2^2s_4-s_1^4s_3^2-4s_1s_3^3-32s_1^2s_4^2-32s_3^2s_4 \\ & \qquad +64s_1s_2s_3s_4-8s_2^2s_3^2+6s_1^2s_2s_3^2)s_5\big)Z^2 \\ & +\big(-48(s_1^3-4s_1s_2+8s_3)s_5^3 \\ & \qquad (-8s_1^2s_2^3+256s_4^2+s_1^4s_2^2-64s_1s_3s_4-128s_2^2s_4+64s_2s_3^2+16s_2^4 \\ & \qquad +96s_1^2s_2s_4-12s_1^2s_3^2-48s_1s_2^2s_3-2s_1^5s_3-16s_1^4s_4+20s_1^3s_2s_3)s_5^2\big)Z \\ & -s_5^3(s_1^3-4s_1s_2+8s_3)^2 \ = \ 0 \qquad\qquad \textit{(63 項)}\end{aligned} \tag{22}$$

注意 1
$Z=(4SR)^2$ に関する公式という概念は，*Svrtan* 他 *[7]* が既に示していて，そこでの式 *(35)* が上記の式 *(22)* に対応していると思われる．しかしながら，*Svrtan* の結果は，等辺の場合 $(\forall a_i := 1)$ を考えてもきちんと因数分解されないなど，何らかの誤りを含んでいるとみられる．

3 Stepwiseアルゴリズム

ここでは，図 1 に示したように，五角形 $\{a_1,\ldots,a_5\}$ を対角線 d により三角形 $\{a_1,a_2,d\}$ と四角形 $\{a_3,a_4,a_5,d\}$ に分割したうえで，順次不要な変数を消去する方法を考察する．

最初に，図における三角形と四角形（凸・非凸の 2 とおり）は外接円を共有しているので，Heron および Brahmagupta の公式により，$y=R^2$ の定義多項式が以下のように表される．

$$H_3(a_1,a_2,d;\ y):=(a_1+a_2+d)(-a_1+a_2+d)(a_1-a_2+d)(a_1+a_2-d)y+a_1^2a_2^2d^2 \tag{23}$$

$$\begin{cases} H_4^{(+)}(a_3,a_4,a_5,d;\ y)= \\ (-a_3+a_4+a_5+d)(a_3-a_4+a_5+d)(a_3+a_4-a_5+d)(a_3+a_4+a_5-d)y \\ \qquad\qquad -(a_3a_4+a_5d)(a_3a_5+a_4d)(a_3d+a_4a_5) \\ H_4^{(-)}(a_3,a_4,a_5,d;\ y)= \\ (a_3+a_4+a_5+d)(a_3-a_4-a_5+d)(a_3-a_4+a_5-d)(a_3+a_4-a_5-d)y \\ \qquad\qquad -(a_3a_4-a_5d)(a_3a_5-a_4d)(a_3d-a_4a_5) \end{cases} \tag{24}$$

共通の量である y を終結式により消去すると，対角線長 d の定義多項式（7 次）が得られる．

$$\begin{cases} F^{(+)}(d) &:= &\mathrm{Res}_y(H_4^{(+)}(a_3,a_4,a_5,d;\ y),H_3(a_1,a_2,d;\ y)) \\ &= &a_3a_4a_5d^7+(a_3^2a_4^2+a_3^2a_5^2+a_4^2a_5^2-a_1^2a_2^2)d^6+\cdots+a_3^2a_4^2a_5^2(a_1-a_2)^2(a_1+a_2)^2 \\ F^{(-)}(d) &:= &\mathrm{Res}_y(H_4^{(-)}(a_3,a_4,a_5,d;\ y),H_3(a_1,a_2,d;\ y)) \\ &= &a_3a_4a_5d^7-(a_3^2a_4^2+a_3^2a_5^2+a_4^2a_5^2-a_1^2a_2^2)d^6+\cdots-a_3^2a_4^2a_5^2(a_1-a_2)^2(a_1+a_2)^2 \end{cases} \tag{25}$$

ここで，$F^{(-)}(d)=-F^{(+)}(-d)$ をみたしていることから，符号の違いを除けば，根 d は両者で共通である．

次に，上記で定めた三角形・四角形・五角形の各面積を S_3,S_4,S_5 とおくと，$S_5=S_3+S_4$ であることから，R を共通の外接円半径として $4S_4R=4S_5R-4S_3R$ という関係を得る．三角形については，式 (3) から $4S_3R=a_1a_2d$ と表される．未知の量を $z=4S_5R$ とおき，$4S_4R=z-a_1a_2d$ を式 (6)(9) に代入すると，四角形が凸・非凸の場合に応じて，z,d に関する以下の多項式を得る．

$$\begin{cases} f^{(+)}(z,d) &:= &(z-a_1a_2d)^2-(a_3a_4+a_5d)(a_3a_5+a_4d)(a_3d+a_4a_5) &= &0 \\ f^{(-)}(z,d) &:= &(z-a_1a_2d)^2+(a_3a_4-a_5d)(a_3a_5-a_4d)(a_3d-a_4a_5) &= &0 \end{cases} \tag{26}$$

最後に，$F^{(+)}(d)$ と $f^{(+)}(z,d)$ から終結式計算により対角線 d を消去し，z のみの多項式を得る．

$$\begin{aligned} P^{(+)}(z) &:= \mathrm{Res}_d(F^{(+)}(d),f^{(+)}(z,d)) \\ &= \left(z^7+\cdots\right)\left(a_3a_4a_5z^7+\cdots\right) \end{aligned} \tag{27}$$

ここまでの計算に要した CPU 時間は約 2.5 分であり，前節の Brute Force アルゴリズムに比べて，劇的に改善されている．式 (27) の第 2 因子は明らかに対称式ではないので，第 1 因子が円内接五角形における $z=4SR$ の定義多項式である．これを，a_i^2 についての基本対称式による表現に変換し，$\sqrt{s_5}=a_1a_2a_3a_4a_5$ も用いて表すと，最終的な結果を得る．

$$\begin{aligned} \varphi_5^{(+)}(z) \quad = \quad & z^7-2s_3z^5-(s_1^2+4s_2)\sqrt{s_5}z^4+(s_3^2-s_1^2s_4-14s_1s_5)z^3 \\ & -(s_1^2s_3+8s_1s_4-4s_2s_3+24s_5)\sqrt{s_5}z^2 \\ & -(s_1^2s_2-4s_2^2+2s_1s_3+16s_4)s_5z \\ & -(s_1^3-4s_1s_2+8s_3)s_5\sqrt{s_5} \quad =0 \qquad\qquad (18\text{ 項}) \end{aligned} \tag{28}$$

等辺の場合を考えて，$\forall a_i:=1$ とおくと，式 (28) は

$$(z^2-5z-5)(z+1)^5=0 \tag{29}$$

となり，各因子は，正五角形／星形五角形および正三角形に退化した場合（5 とおり）を表している．

分割でできた四角形が凸でない場合には，もう一つの対 $\{F^{(-)}(d),\ f^{(-)}(z,d)\}$ から終結式を計算し，同様の多項式 $\varphi^{(-)}(z)$ を得る．このとき，$\varphi^{(-)}(z) = -\varphi^{(+)}(-z)$ であり，面積 S_5 の符号を無視すれば，両者の区別は不要となり，三角形に対する式 (16) に相当する次の定理を得る．

定理 5
円内接五角形に関して，$z = 4SR$ の定義多項式は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\varphi_5(z) \quad = \quad & |z|^7 - 2s_3|z|^5 - (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5}|z|^4 + (s_3^2 - s_1^2 s_4 - 14 s_1 s_5)|z|^3 \\ & -(s_1^2 s_3 + 8 s_1 s_4 - 4 s_2 s_3 + 24 s_5)\sqrt{s_5}|z|^2 \\ & -(s_1^2 s_2 - 4 s_2^2 + 2 s_1 s_3 + 16 s_4) s_5 |z| \\ & -(s_1^3 - 4 s_1 s_2 + 8 s_3) s_5 \sqrt{s_5} \quad = 0 \qquad\qquad (\textit{18 項})\end{aligned} \tag{30}$$

この式 (30) を $Z = z^2 = (4SR)^2$ の式に書き換えることは容易である．まず，方程式 $\varphi_5(z) = 0$ を偶数次の項と奇数次の項に振り分ける．

$$|z|\left(z^6 - 2s_3 z^4 + \cdots\right) \quad = \quad (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5} z^4 + \cdots + (s_1^3 - 4 s_1 s_2 + 8 s_3) s_5 \sqrt{s_5} \tag{31}$$

両辺を 2 乗して $z^2 = Z$ を代入すれば，式 (22) と同じ $Z = (4SR)^2$ に関する 7 次式が得られる．

注意 2
Svrtan 他 *[7]* も基本的に同様のアプローチをとっている．ただし，最後に終結式を計算するステップの詳細が記述されておらず，$z = 4SR$ の定義多項式についての言及はない．よって，上記の多項式 $\varphi_5(z)$ は，本研究独自の成果と考えられる．

4　円内接六角形に対する統合公式

Robbins [6] による面積公式，および円内接四角形の場合の統合公式 (定理 1) から，円内接六角形の場合の統合公式は，$Z = (4SR)^2$ の多項式として以下の構造を持つことが予測される．

$$\begin{aligned} & Z^{14} + \cdots && (\mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_5, s_6][Z]) \\ & = (Z^7 + \cdots)(Z^7 + \cdots) && (\mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_5, \sqrt{s_6}][Z]), \end{aligned} \tag{32}$$

ここで，基本対称式は $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_6^2,\ \ldots,\ \sqrt{s_6} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ を表す．因数分解で得られた各 7 次因子は，$\sqrt{s_6}$ を $-\sqrt{s_6}$ で置き換えることで互いに入れ換わるので，一方のみ求めれば十分である．

4.1　Brute Force アルゴリズム

半径公式 [2] のうち凸な場合の因子を基本対称式で表現する．

$$\tilde{\Phi}_R^{(+)}(s_1, \ldots, s_5, \sqrt{s_6};\ y) = \tilde{B}_7 y^7 + \tilde{B}_6 y^6 + \cdots + \tilde{B}_1 y + \tilde{B}_0 \qquad (224\ \text{項}) \tag{33}$$

対応する面積公式 [6] は以下で表される．

$$\tilde{\Phi}_S^{(+)}(s_1, \ldots, s_5, \sqrt{s_6};\ x) = x^7 + \tilde{C}_6 x^6 + \cdots + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_0 \qquad (282\ \text{項}) \tag{34}$$

五角形の場合と同様に，$Z = xy$ という関係を通して $\tilde{\Phi}_S^{(+)}(x)$ と $\tilde{\Phi}_R^{(+)}(y)$ を結びつけた終結式は，Z の 49 次式 (52,490,772 項 - 約 3.0GB) となった．これは，式 (21) に相当するので，Z に関して 7 次式と 42 次式に因数分解されるはずであるが，現実には実行不可能である．

4.2 Stepwise アルゴリズム（概略）

この算法では，$\mathbf{Z}[a_1,\ldots,a_6]$ を係数とする多項式の計算を行うので，基本対称式表現よりも項数が非常に多くなることに注意を要する．試行錯誤の結果，円内接六角形 $\{a_1,\ldots,a_6\}$ を対角線 d で分割するときは，2 つの四角形 $\{a_1,a_2,a_3,d\}$ と $\{a_4,a_5,a_6,d\}$ とに分けるのが効率的であることが判った．この分割によれば，最終的な終結式は $Z=(4SR)^2$ に関する 14 次式となり，これを因数分解して真の因子を得ることができる．一方で，六角形を五角形 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,d\}$ と三角形 $\{a_5,a_6,d\}$ に分割すると，Z に関する 49 次式が導かれるはずであるが，これ自体の計算が困難である．

以下では，計算の概略として，「凸四角形＋凸四角形」に分割された場合の式のみを示す．「凸四角形＋非凸四角形」に分割された場合の式は，最終的な統合公式において $\sqrt{s_6}$ を $-\sqrt{s_6}$ で置き換えることで得られる．(「凸四角形＋非凸四角形」の場合も実際に計算して，両者が一致することは確認済みである.)

式 (24) 同様に，Brahmagupta の公式から，共通の外接円半径 $y=R^2$ を多項式 $H_4^{(+)}(a_1,a_2,a_3,d;\,y)$ と $H_4^{(+)}(a_4,a_5,a_6,d;\,y)$ とで表す．これらから y を消去すると，対角線 d の定義多項式 (7 次) が求められる．

$$\begin{aligned} F^{(+)}(d) &:= \mathrm{Res}_y(H_4^{(+)}(a_1,a_2,a_3,d;\,y),H_4^{(+)}(a_4,a_5,a_6,d;\,y)) \\ &= (a_1a_2a_3-a_4a_5a_6)d^7+\cdots \end{aligned} \tag{35}$$

六角形と 2 つの四角形の面積の関係を $S_6=S_{41}+S_{42}$ で表し，共通の外接円半径 R を用いて $Z_6=(4S_6R)^2$, $Z_{41}=(4S_{41}R)^2$, $Z_{42}=(4S_{42}R)^2$ とおく．このとき，式 (6) より，以下のような関係が得られる．

$$\left\{\begin{aligned} Z_{41}^{(+)} &= (a_1a_2+a_3d)(a_2a_3+a_1d)(a_1a_3+a_2d) \\ Z_{42}^{(+)} &= (a_4a_5+a_6d)(a_5a_6+a_4d)(a_4a_6+a_5d) \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Z_6,Z_{41},Z_{42} の関係は，

$$Z_6^2-2(Z_{41}+Z_{42})Z_6+(Z_{41}-Z_{42})^2=0 \tag{37}$$

と表されるので，これに式 (36) を代入すると，未知の量 Z_6 の定義多項式が以下のように求められる．

$$\begin{aligned} G^{(+)}(Z_6,d) &:= Z_6^2-2(Z_{41}^{(+)}+Z_{42}^{(+)})Z_6+(Z_{41}^{(+)}-Z_{42}^{(+)})^2 \\ &= (a_1a_2a_3-a_4a_5a_6)^2d^6+\cdots \end{aligned} \tag{38}$$

最後に，$F^{(+)}(d)$ と $G^{(+)}(Z_6,d)$ から対角線 d を終結式で消去して，Z_6 のみの多項式を得る．

$$\begin{aligned} P^{(+)}(Z_6) &:= \mathrm{Res}_d(F^{(+)}(d),G^{(+)}(Z_6,d)) \\ &= (Z_6^7+\cdots)\left((a_1a_2a_3-a_4a_5a_6)^3Z_6^7+\cdots\right). \end{aligned} \tag{39}$$

左辺の $P^{(+)}(Z_6)$ は 4,276,908 項の式であり，この因数分解には，CPU 時間で約 11 日（経過時間で約 8 日）を要した．対称式ではない第 2 因子を除外し，第 1 因子 (44,926 項) を基本対称式表現に変換すると，以下が得られた．(記法の統一のため，Z_6 を Z と書き改めた.)

定理 6
円内接六角形に対する $Z=(4SR)^2$ の定義多項式のひとつは，次の形で表される．

$$\begin{aligned} \psi_6^{(+)}(Z) \;=\; & Z^7-(4s_3+28\sqrt{s_6})Z^6+(\cdots)Z^5+\cdots+(\cdots)Z \\ & -(s_1^3-4s_1s_2+8s_3-16\sqrt{s_6})^2 \\ & \quad\times(s_5^3-4\sqrt{s_6}^5+(s_1^3-4s_1s_2+4s_3)\sqrt{s_6}^4 \\ & \qquad+(-s_1^2s_4+2s_1s_5+4s_2s_4-s_3^2)\sqrt{s_6}^3+(s_1s_3s_5-4s_4s_5)\sqrt{s_6}^2 \\ & \qquad-s_2s_5^2\sqrt{s_6}) \qquad\qquad (\mathit{327}\,項) \end{aligned} \tag{40}$$

系 7
$\psi_6^{(+)}(Z)$ において，$\sqrt{s_6}$ を $-\sqrt{s_6}$ で置き換えると，もうひとつの定義多項式 $\psi_6^{(-)}(Z)$ が得られる．これは，最初に六角形を「凸四角形＋非凸四角形」に分割して計算した結果と一致する．

系 8
$\psi_6^{(+)}(Z)$ および $\psi_6^{(-)}(Z)$ において，$\sqrt{s_6}$ に 0 を代入すると，式 *(22)* における $\psi_5(Z)$ を得る．よって，これらの 3 つの式は，*crossing parity* ε を用いて，1 つの式で表現できる．

等辺の場合を考えて，$\forall a_i := 1$ とおくと，方程式 $\psi_6^{(+)}(Z) = 0$ は

$$Z^6(Z-108) = 0 \tag{41}$$

となり，各因子は，$S=0$ に退化した場合 (6 重) と正六角形の場合を表している．もうひとつの因子に対して $\forall a_i := 1$ とおくと，方程式 $\psi_6^{(-)}(Z) = 0$ は

$$(Z-4)(Z-8)^6 = 0 \tag{42}$$

となり，正三角形の場合と正方形の場合 (6 重) を表している．

以上のことから，$\varphi_5(z)$, $\psi_5(Z)$, $\psi_6^{(+)}(Z)$, $\psi_6^{(-)}(Z)$ の 4 つの多項式が，円内接五角形・六角形に対する統合公式であるといえる．

5　まとめと今後の課題

定理 4 と定理 6 をまとめて，$n=5,6$ に対する $Z=(4SR)^2$ の定義方程式は，

$$Z^7 - (4s_3 - 28\,\varepsilon\sqrt{s_6})Z^6 + \cdots = 0 \tag{43}$$

と表され，これが $n=3,4$ の場合の定義方程式 (15) の拡張に相当する．文献 [7] には $n=5$ の場合への一部言及があるが，$n=6$ まで具体的に式の表現を求めた先例は，他にないとみられる．

さらに本稿では，定理 5 に示した，$z=4SR$ の定義方程式

$$|z|^7 - 2s_3|z|^5 - (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5}|z|^4 + \cdots = 0 \tag{30}$$

をも求めた．これは，$n=3$ の場合の定義方程式 (16) の拡張に相当する．n が奇数の場合に限り，このタイプの $z=4SR$ に関する多項式が存在することは，他では全く議論されたことがないとみられる．

ただし，ここで用いた数式処理のアルゴリズムとしては，終結式とその因数分解だけで極めて素朴なため，多大の CPU 時間を要する．幾何学的意味を考察することによって，終結式が含む“余計な因子”を (因数分解によらず) 除く方法 [1] がないか，今後考察する必要がある．

さらに，これらの関係式を $n=7,8$ まで拡張すると，$x=(4S)^2$, $y=R^2$ とおいたとき， $Z=xy$ に関する 38 次式が現れることになる．また，$n=7$ の場合に限り，$z=4SR$ に関する 38 次式も存在することになる．ただし，現時点では，面積公式および半径公式の一部が計算できているにすぎず，これらを統合する計算の見込みは立っていない．

面積公式は，Maley [1] に従って，基本対称式表現が直接求められ，以下の形となる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_S^{(7)}(x) &= x^{38} + \tilde{C}_{37}x^{37} + \cdots + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_0 \qquad (955{,}641\text{ 項})\\
&= 0 \qquad \left(x=(4S)^2,\quad \tilde{C}_i \in \mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_7]\right)\\
\tilde{\Phi}_S^{(8+)}(x) &= x^{38} + \tilde{D}_{37}x^{37} + \cdots + \tilde{D}_1 x + \tilde{D}_0 \qquad (3{,}248{,}266\text{ 項})\\
&= 0 \qquad \left(x=(4S)^2,\quad \tilde{D}_i \in \mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_7,\sqrt{s_8}]\right)
\end{aligned} \tag{44}$$

凸な場合の多項式 $\tilde{\Phi}_S^{(8+)}(x)$ において，$\sqrt{s_8}$ を $-\sqrt{s_8}$ で置き換えれば，凸でない場合 $\tilde{\Phi}_S^{(8-)}(x)$ が得られる．また，$\sqrt{s_8}$ に 0 を代入すれば，$\tilde{\Phi}_S^{(8+)}(x)$, $\tilde{\Phi}_S^{(8-)}(x)$ ともに $\tilde{\Phi}_S^{(7)}(x)$ に一致するので，これらが正しく求まっていることが確認できる．

半径公式については，$n=7$ の場合に限り，辺の長さ a_i^2 による表現で求めた結果 [2] が存在する．

$$\begin{aligned} \Phi_R^{(7)}(y) &= B_{38}y^{38}+\cdots+B_1y+B_0 \qquad (337{,}550{,}051 \text{ 項}) \\ &= 0 \qquad\qquad (y=R^2,\quad B_i\in\mathbf{Z}[a_1^2,\ldots,a_7^2]) \end{aligned} \tag{45}$$

各係数が巨大な式になるため，基本対称式の表現に変換することすら，現時点では不可能である．$n=8$ の場合は，$\Phi_R^{(8+)}(y)$,$\Phi_R^{(8-)}(y)$ の項数が $\Phi_R^{(7)}(y)$ を上回るため，さらに計算困難と思われる．

したがって，$n=7,8$ の場合に関する $Z=(4SR)^2$,$z=4SR$ についての定義多項式 (各 38 次) は，計算の見込みが全く立たない．

参　考　文　献

[1] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.

[2] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, **18**(1), 2011, 3–9.

[3] 森継修一: 円内接多角形問題について ―半径公式と面積公式の統合―, 京都大学数理解析研究所講究録, **1907**, 2014, 174–181.

[4] Moritsugu, S.: Integrating Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons, *Mathematical Software – ICMS 2014* (Hong, H. and Yap, C., eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, **8592**, Springer, 2014, 214–221.

[5] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Gainesville, Springer, 2006, 44–58.

[6] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

[7] Svrtan, D., Veljan, D., and Volenec, V.: Geometry of Pentagons: from Gauss to Robbins, arXiv:math.MG/0403503 v1, 2004.

A　面積公式の終結式による導出法

Robbins の公式 ($n=5,6$) は，$s_1,\ldots,s_6$ を 6 次の基本対称式，$u_2=-4S^2$ として，以下の構成による [1]．

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= -s_2+t_1^2/4-u_2 \\ t_3 &= s_3+t_1t_2/2-\varepsilon\cdot 2\sqrt{s_6} \\ t_4 &= -s_4+t_2^2/4+\varepsilon\cdot t_1\sqrt{s_6} \\ t_5 &= s_5+\varepsilon\cdot t_2\sqrt{s_6} \end{aligned} \tag{46}$$

このとき，3 次多項式 $u_2+t_3z+t_4z^2+t_5z^3$ が重根をもち，その判別式から

$$t_3^2t_4^2-4u_2t4^3-4t_3^3t_5+18u_2t_3t_4t_5-27u_2^2t_5^2=0 \tag{47}$$

という u_2 に関する 7 次方程式を得る．ただし，crossing parity ε の値は，0 (五角形)・+1 (凸六角形)・−1 (非凸六角形) をとるものとする．Robbins[6] は，多数の数値例から補間によって各項の係数を求めたが，この過程を再現することは困難と思われ，多分に天下り的である．

一方で，Pech[5] は，グレブナー基底による消去計算によって，図形の座標の関係から五角形の場合の面積公式を導出した．その計算効率は五角形の座標の取り方に依存し，グレブナー基底の計算としては依然として難問であり，六角形の場合への拡張の見通しは立っていない [3].

これらに対し，本稿で扱った Stepwise アルゴリズムを適用すると，面積公式も，終結式による消去計算により求めることができる．いわば「第 3 の計算法」として，その過程の概略と計算効率を以下に示す．

A.1 五角形の場合

§3 と同様に，五角形 $\{a_1,\dots,a_5\}$ を対角線 d により三角形 $\{a_1,a_2,d\}$ と四角形 $\{a_3,a_4,a_5,d\}$ に分割したうえで，順次不要な変数を消去する．

まず，共通の外接円半径 $y=R^2$ と対角線 d の関係から y を消去した式 (25) における $F^{(+)}(d), F^{(-)}(d)$ を，d の定義多項式としてここでも使用する．

一方，面積の関係は，各 k 角形の面積を S_k とおくと，$S_5=S_3+S_4$ と表される．両辺の 2 乗と移項を繰り返すことにより，$x_k=(4S_k)^2 \quad (k=3,4,5)$ と置き換えて，

$$x_5^2-2x_5(x_3+x_4)+(x_3-x_4)^2=0 \tag{48}$$

という方程式を得る．x_3, x_4 については，式 (2) (5) (8) に三角形 $\{a_1,a_2,d\}$ および四角形 $\{a_3,a_4,a_5,d\}$ の各辺の長さを代入すると，四角形の凸／非凸に応じて，x_5 の定義多項式が以下のように求められる．

$$\left\{\begin{array}{lclcl} H^{(+)}(x_5,d) & = & 4(x_5+(a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2-a_5^2)^2)d^4+\cdots & = & 0 \\ H^{(-)}(x_5,d) & = & H^{(+)}(x_5,-d) & = & 0 \end{array}\right. \tag{49}$$

最後に，$F^{(+)}(d)$ と $H^{(+)}(x_5,d)$ から対角線 d を終結式で消去して，x_5 のみの多項式を得る．

$$\begin{array}{rcl} \Phi_S^{(+)}(x_5) & := & \mathrm{Res}_d(F^{(+)}(d),H^{(+)}(x_5,d)) \\ & = & \left(x_5^7+\cdots\right)\left(a_3^4a_4^4a_5^4x_5^7+\cdots\right) \end{array} \tag{50}$$

第 1 因子を取り出して，各係数を基本対称式の表現に変換したものが，五角形の面積公式 (19) となる．終結式自体は 1 分未満で計算できるが，因数分解に約 6.4 時間を要した．

他の組合せ，$F^{(-)}(d)$ と $H^{(-)}(x_5,d)$ から対角線 d を消去しても，$F^{(-)}(d)=-F^{(+)}(-d)$ をみたしていることから，定数倍の違いを除いて同じ結果を得る．

注意 3

この計算に関しても，*Svrtan* 他 *[7]* が基本的に同様のアプローチをとっている．ただし，最後に終結式を計算するステップの詳細が不明で，結果も微妙に正しくないようである．また，六角形の場合について一部言及しているが，どこまで計算できたかは明らかにされていない．

A.2 六角形の場合

§4.2 と同様に，六角形 $\{a_1,\dots,a_6\}$ を対角線 d により 2 つの四角形 $\{a_1,a_2,a_3,d\}$ と四角形 $\{a_4,a_5,a_6,d\}$ に分割したうえで，順次不要な変数を消去する．以下では，「凸四角形＋凸四角形」に分割された場合の式

のみを示す.「凸四角形＋非凸四角形」に分割された場合の式は，最終的な面積公式において $\sqrt{s_6}$ を $-\sqrt{s_6}$ で置き換えることで得られる.

まず，共通の外接円半径 $y = R^2$ と対角線 d の関係から y を消去した式 (35) における $F^{(+)}(d)$ を，d の定義多項式としてここでも使用する.

一方，分割された六角形と各四角形の面積の関係を $S_6 = S_{41} + S_{42}$ で表す．両辺の 2 乗と移項を繰り返すことにより，$x_k = (4S_k)^2 \quad (k = 41, 42, 6)$ と置き換えて，

$$x_6^2 - 2x_6(x_{41} + x_{42}) + (x_{41} - x_{42})^2 = 0 \tag{51}$$

という方程式を得る．Brahmagupta の面積公式 (5) に四角形 $\{a_1, a_2, a_3, d\}$ および $\{a_3, a_4, a_5, d\}$ の各辺の長さを代入して，x_{41}, x_{42} を a_i, d で表すと，x_6 の定義多項式が以下のように求められる.

$$H^{(+)}(x_6, d) = 4(x_6 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2)^2)d^4 + \cdots = 0 \tag{52}$$

最後に，$F^{(+)}(d)$ と $H^{(+)}(x_6, d)$ から対角線 d を終結式で消去して，x_6 のみの多項式を得る.

$$\begin{aligned} \Phi_S^{(+)}(x_6) &:= \mathrm{Res}_d(F^{(+)}(d), H^{(+)}(x_6, d)) \\ &= \left(x_6^7 + \cdots\right)\left((a_1a_2a_3 - a_4a_5a_6)^4 x_6^7 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{53}$$

第 1 因子を取り出して，各係数を基本対称式の表現に変換したものが，六角形の面積公式 (34) となる．終結式 (3,253,385 項) 自体は 11 分程度で計算できるが，因数分解には約 129 時間を要した.

以上により,「五角形・六角形の面積公式」についても，基本的には終結式計算と因数分解だけで求められることが示された．これを拡張した場合,「七角形・八角形の面積公式」は $x = (4S)^2$ の 38 次式となり，同様の計算方針を立てることは可能であるが，現在の数式処理システムによる実行は困難と思われる.