数理解析研究所講究録
第1955巻 2015年 158-167

Miller-Rabin強擬素数の約数計算について

宮本泉*
IZUMI MIYAMOTO

1 はじめに

Miller-Rabin法は、ランダムに選んだbaseの自然数をもとにして、与えられた自然数が素数であるかどうかを判定する方法です。この判定法は、確率的判定法のひとつで、素数ではない、もしくは、素数かもしれないのいずれかを判定します。自然数が素数でないとき、この方法は、適当なbaseをとれば素数ではないと判定します。そこで、与えられた自然数に対して、どれくらい小さい数が適当なbaseとなるかが調べられています。本報告は、その様な実験結果の一つです。

2 素数判定

自然数に関する素朴な問題として、次のことがらがある。

- 自然数が素数であるかどうか判定する。
- 自然数を素因数分解する。

本報告は素数判定に関してであり、その判定法は2種類ある。

- 確定的素数判定法
- 確率的素数判定法
  素数を高い確率で求める。求めた数が素数でないとき**擬素数**という。

上にあげたことがらの実行に要する計算時間は、おおむね次の通りです。

- 確定的素数判定法→長時間かかる。
- 確率的素数判定法→短時間でできる。
- 素因数分解→困難。ＲＳＡ暗号に利用されている。

参考に、確定的素数判定法を以下に簡単に紹介する。n 素数かどうかを判定する奇数の自然数とする。

*imiyamoto1@gmail.com

- Adleman-(Pomerance)-Rumely 法 -

  1979 より、計算量は $O((\log n)^{c \log\log\log n})$、実行時間 100 桁 1 分、200 桁 10 分以内。

  (コンピュータと素因子分解 (和田秀夫, 1999) より)

- ECPP(楕円曲線素数判定法) -

  H. W. Lenstra(1985) より、running time としては $O((\log n)^4)$、

  $(2^{83339}+1)/3$ (25088 桁) の素数判定に 18ヵ月の報告あり。

- AKS 素数判定法 (2000?) -

  Agrawal, M.; Kayal, N.; Saxena, N: Primes is in *P*.(2002, 2005 version6)

  整数 n の桁数 $\log n$ に関して、多項式オーダーで判定が可能。未だ、非実用的らしい。

【お断り】 本報告にある一般的なことがらの説明はネット情報です。可能な限り出典など調べて書きましたが、この点、お断りします。

3 確率的素数判定法

$\mathbb{Z}$: 整数環、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: 整数を n で整除した余りの数 (mod n の数) の作る環とする。

n が奇素数で、a が $n-1$ 以下の自然数のとき、下のことがらが成立する。したがって、特に、成立しないときは素数ではないと判定できる。

- Fermat 法

  $a^{n-1} = 1 \bmod n$ (Fermat の小定理)　(【参考】Carmichael 数)

  ← ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ が乗法に関して群であることを利用。)

- Solovay-Strassen 法

  $a^{(n-1)/2} = (a/n) \bmod n$ (Euler 基準、Euler テスト)

  ここで、(a/n) は Jacobi 記号、　1 : 平方剰余、-1 : 非平方剰余、0 : その他。

- Miller-Rabin 法

  次節で。　← ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ が乗法に関して巡回群であることを利用。)

- Lucas テスト

  説明略。　Miller-Rabin 法と組合わせると効果的。

4 Miller-Rabin 法

n が奇素数で、a が $n-1$ 以下の自然数のとき次が成立する。

$n-1 = 2^s t$、t は奇数とすると、

$a^t = \pm 1 \bmod n$

または、これが成立しないときは、$b = a^t$ から始めて、

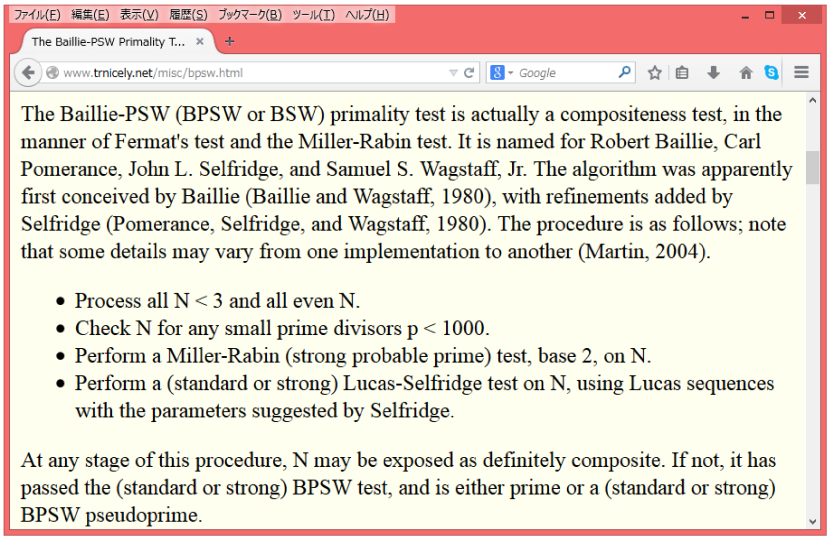
$b \to b^2$ をある $k(1 \le k \le s-1)$ 回繰返して、$b^2 = -1$ が成立。

この方法の起源は、 M. Artjuhov(1966), Certain criteria for the primality of numbers connected with the little Fermat theorem , Acta Arith. 12 (1966/67), 355–364, (in Russian) らしい。

70 年代中ごろ、J.L.Selfridge がこの方法を使っている。
Miller-Rabin 法による擬素数を、(a を base とする) **強擬素数** (J.L.Selfridge?) という。

n が合成数で、上が成立する確率は 1/4 以下 (Monier 1980, Rabin 1980) が知られている。
ランダムに a を選んでテストを繰返せば、高い確率で素数判定が可能となる。

強擬素数かつ Lucas テストによる擬素数は見つかっていないらしい。
　⟶BPSW 法。(現在通常使用されていると思われる確率的素数判定法。)
BPSW 法 — 反例は見つかっていないと書いてある。(T. R. Nicely の Web ページ 2012.)



Miller-Rabin 法 (続き)

一般リーマン予想 (GRH)/拡張リーマン予想 (ERH)
これを仮定すると、$a \leq 2(\log n)^2$ のすべての a を base として判定すれば、確定的判定になる。(E. Bach (1990). G. Miller (1976) では、$a \leq O(\log n)^2$)

(これを実行するより AKS 確定的判定法の方が理論的に速いらしい。)
(実験的には、$a \leq \log n$ 位で十分そうという話もあるようです。)

2-強擬素数、2,3-強擬素数、2,3,5-強擬素数、…
と、小さい素数たちを base としたときに、最小の擬素数は何になるかを考える。このようにして求めた最小の擬素数より小さい数は、Miller-Rabin 法で素数であると判定できる。

5　小さい素数を base とする強擬素数

ψ_k を the smallest strong pseudoprime to all of the first k primes とする。Jaeschke (1993) computed ψ_k from $k = 5$ to 8 and gave upper bounds for $k = 9$ to 11. (確認?: Jiang and Deng 2012, 105 時間 by

algorithms)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= 2047 && (p=2)\\
\psi_2 &= 1373653 && (p\le 3)\\
\psi_3 &= 25326001 && (p\le 5)\\
\psi_4 &= 3215031751 && (p\le 7)\\
\psi_5 &= 2152302898747 && (p\le 11)\\
\psi_6 &= 3474749660383 && (p\le 13)\\
\psi_7,\psi_8 &= 341550071728321 && (p\le 19)\\
\psi_9,\psi_{10},\psi_{11} &\le 3825123056546413051 && (p\le 31)
\end{aligned}$$

さらに、Zhang (2001, 2002, 2005, 2006, 2007) conjectured that
ψ_9, ψ_{10}, ψ_{11} as above

$$\begin{aligned}
\psi_{12} &= 318665857834031151167461 && (p\le 37)\\
\psi_{13} &= 3317044064679887385961981 && (p\le 41)\\
\psi_{14} &= 6003094289670105800312596501 && (p\le 43)\\
\psi_{15} &= 592763610755955732634463301 01 && (p\le 47)\\
\psi_{16},\psi_{17} &= 564132928021909221014087501701 && (p\le 59)\\
\psi_{18},\psi_{19} &= 1543267864443420616877677640751301 && (34\text{桁}, p\le 67)\\
\psi_{20} &> 10^{36} && (p\le 71)
\end{aligned}$$

(http://mathworld.wolfram.com/StrongPseudoprime.html　などより。)

6　強擬素数の性質

On the difficulty of finding reliable witnesses (W. R. Alford, A. Granville, C. Pomerance(1994)) より。

- 合成数 n で、それを判定できる base が $(\log n)^{1/(3\log\log\log n)}$ 以上となるものが無限個存在する。
  (→上記の計算は、どこまで行ってもきりがない。　それが分かっていても …)
- n は a を base とする強擬素数 $\longrightarrow$
  すべての n の素因数 p に対して、a の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群における order の 2-part は同じ (Prop.1.1)。

本研究の目的
小さな素数を base として、擬素数の性質を利用してその約数を求める。
→擬素数となって素数判定できない数の判定ができるようになる。

7　(小さい素数を使った) 強擬素数の約数計算

7.1　Fermat 擬素数で強擬素数ではないとき

The Generation of Random Numbers That Are Probably Prime (P.Beauchemin, G.Brassard, C.Crrpeau, C.Goutier, C.Pomerance(1988)) より、

Miller-Rabin 法の計算手順において、

$\exists b$ such that $b \neq -1$, $b^2 = 1 \bmod n$ ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は体ではない), $\mathsf{Gcd}(b \pm 1, n) > 1$.

Fermat 擬素数で強擬素数ではない例：Miller-Rabin 法により、

$n = 561$, $a = 2$ $n - 1 = 560 = 2^s t = 2^4 \cdot 35$

$b = ((2^{35})^2)^2 = 2^{4 \cdot 35} = 67 \neq -1 \bmod 571$

$b^2 = (((2^{35})^2)^2)^2 = 2^{8 \cdot 35} = 1 \bmod 571$

$\Longrightarrow$571 が素数ではないことが分かる。 $b = \pm 1, \pm 67 \rightarrow b^2 = 1 \bmod 571$ が成立している。 そこで、

$(b-1)(b+1) = 0 \bmod 571$ $\mathsf{Gcd}(b \pm 1, n) =$?? と計算を続けると、

$\mathsf{Gcd}(67+1, 561) = 17$, $\mathsf{Gcd}(67-1, 561) = 33$, $(17 \times 33 = 561)$ と、n の約数が得られる。

7.2 強擬素数の約数の計算方法

base a として、小さい素数 (通常は $a = 2, 3, 5, 7$) を利用することを考える。

とりあえず、$n-1$ **を割る素数の中で、3, 5, 7 を利用することにする。**

強擬素数の約数計算の例 1 ：

$n = 4681$, $a = 2$; $n - 1 = 2^s \cdot t$ で $a^t = 1 \bmod n$, $3|(n-1)$ を利用する。

$n - 1 = 4680 = 2^3 \cdot 585 (= 2^3 \cdot 9 \cdot 65)$, $a^t = 2^{585} = 1 \bmod 4681$

実は、

$b = 2^{585/9} = 2^{(n-1)/(9 \cdot 8)} = 32 \bmod 4681$ $b^3 = 2^{585/3} = 1 \bmod 4681$

$\Longrightarrow b^3 = 1 \bmod 4681$ より $(b-1)(b^2+b+1) = 0 \bmod 4681$

そこで、$\mathsf{Gcd}(b-1, n) =$Gcd$(32-1, 4681) = 31$ $(4681 = 31 * 151)$

強擬素数の約数計算の例 2 ：

$n = 29341$, $a = 2$; $n - 1 = 2^s t$, $a^{2t} = -1 \bmod n$ で $3, 5|(n-1)$ を利用する。

$29340 = 2^2 \cdot 7335 (= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 163)$, $2^{2 \cdot 7335} = -1 \bmod 29341$

$b = 2^{2 \cdot 7335/3} = 2^{(n-1)/(3 \cdot 2)} = 7929 \neq -1 \bmod 29341$, $b^3 = 2^{2 \cdot 7335} = -1 \bmod 29341$

$b^3 = -1 \bmod n$ より $(b+1)(b^2-b+1) = 0 \bmod n$

$c = 2^{2 \cdot 7335/5} = 2^{(n-1)/(5 \cdot 2)} = 26454 \neq -1 \bmod 29341$ $c^5 = 2^{2 \cdot 7335} = -1 \bmod 29341$

$c^5 = -1 \bmod n$ より $(c+1)(c^4 - c^3 + c^2 - c + 1) = 0 \bmod n$

$\mathsf{Gcd}(b+1, n) =$Gcd$(7929+1, 29341) = 793 = 13 \cdot 61$

$\mathsf{Gcd}(c+1, n) =$Gcd$(26454+1, 29341) = 481 = 13 \cdot 37$ $\longrightarrow n = 13 \cdot 37 \cdot 61 = (m+1)(3m+1)(5m+1)$

7.3 the smallest strong pseudoprime ··· にある数 ψ_i の約数計算

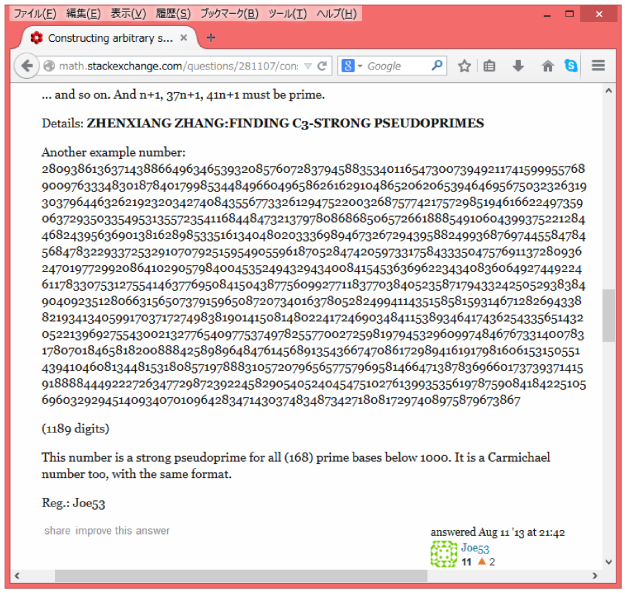
$n = \psi_i$ として、$b = a^{(n-1)/m} \bmod n$ such that $\mathsf{Gcd}(b \pm 1, n) \neq 1$ となる $a^{(n-1)/m}$ を以下に示す。

$\psi_1 = 2047$	失敗。後ほど、、、。	$(p = 2)$
ψ_2	$2^{(n-1)/(9 \cdot 2)}$	$(p \leq 3)$
ψ_3	$2^{(n-1)/(9 \cdot 16)}$	$(p \leq 5)$
ψ_4	$2^{(n-1)/(3 \cdot 2)}$, $2^{(n-1)/(5 \cdot 2)}$	$(p \leq 7)$
ψ_5	$2^{(n-1)/(7 \cdot 2)}$	$(p \leq 11)$
ψ_6	$2^{(n-1)/(27 \cdot 2)}$, $3^{(n-1)/(27 \cdot 2)}$, $5^{(n-1)/(27 \cdot 2)}$, $7 \cdots$	$(p \leq 13)$
$\psi_7 = \psi_8$	$5^{(n-1)/(3 \cdot 32)}$	$(p \leq 19)$

$\psi_9 = \psi_{10} = \psi_{11}$	$2^{(n-1)/(3\cdot 2)},\ 5^{(n-1)/(3\cdot 2)},\ 7^{(n-1)/(3\cdot 2)},\ 7\dots$	$(p \le 31)$
ψ_{12}	$5^{(n-1)/(27\cdot 4)}$	$(p \le 37)$
ψ_{13}	$5^{(n-1)/(9\cdot 4)}$	$(p \le 41)$
ψ_{14}	$3^{(n-1)/(27\cdot 4)}$	$(p \le 43)$
ψ_{15}	$2^{(n-1)/(27\cdot 2)},\ 2^{(n-1)/(5\cdot 2)}$	$(p \le 47)$
$\psi_{16} = \psi_{17}$	$5^{(n-1)/(9\cdot 4)},\ 7^{(n-1)/(9\cdot 2)}$	$(p \le 59)$
$\psi_{18} = \psi_{19}$	$2^{(n-1)/(7\cdot 2)},\ 7^{(n-1)/(9\cdot 4)}$	$(p \le 67)$

7.4 強擬素数の約数計算の例

強擬素数の例 1 ：1000 以下の 168 個のすべての素数を base とする強擬素数



強擬素数の例 2 ：541 までの 100 個のすべての素数を base とする強擬素数

【定義】 Carmichael 数 $\Longleftrightarrow$ すべての $\mathsf{Gcd}(a,n)=1$ となる数 a に対して、n は a-Felmat 擬素数となる。

前述の 2 つの例は Carmichael 数なので、a-強擬素数とはならない a を選んでも約数計算は可能であるが、

618 桁の例 $b=2^{(n-1)/(2\cdot3)},\ 3^{(n-1)/(2\cdot3)},\ 5^{(n-1)/(2\cdot3)},\ \cdots \bmod n$

$\longrightarrow \mathsf{Gcd}(b+1,n)>1$

1189 桁の例 $b=2^{(n-1)/(2\cdot3)},\ 2^{(n-1)/(2\cdot7)},\ 7^{(n-1)/(2\cdot3)} \bmod n$

$\longrightarrow \mathsf{Gcd}(b+1,n)>1$

計算時間は、以上の例すべてで 1.5 秒程度。(GAP を使用)

強擬素数の例 3 (F. ARNAULT 1995) : 337 桁 (素因数 2 個、200 以下の 46 個の素数に対して強擬素数。)

80383745745363949125707961434194210813883768828755814583748891752229742737653336521865023361
63960045457915042023603208766569966760987284043965408232928738791850869166857328267761771029
38969773947016708230428687109997439976544144845341155872450633409279022275296229414984230688
16854043264575340183297861112989606448452161916528725975349 01

- $b=2^{(n-1)/(2\cdot81)},\ 2^{(n-1)/(2\cdot5)},\ 3^{(n-1)/(4\cdot5)} \bmod n$

  $\longrightarrow \mathsf{Gcd}(b+1,n)>1$

- $b=5^{(n-1)/(4\cdot81)} \bmod n$

  $\longrightarrow \mathsf{Gcd}(b-1,n)>1$

これらの例を含め、ネットで見つけた強擬素数など約 100 個に対して約数計算を行って、これらについては、ψ_1 を除き成功している。

8 計算方法

計算方法 : 素朴な Miller-Rabin 法。

GAP システムを使用 : $\mathsf{PowerMod}(a,(n-1)/m,n)$: mod 計算の高速べき乗計算。

強擬素数の約数計算では、一つの base a に対して、$n-1$ を割る 3 べき、5 べき、7 べきに対して a の $(n-1)/m$ の形の mod 計算のべき乗を計算。

(337 桁の例 : $2^{(n-1)/(2\cdot81)},\ 2^{(n-1)/(2\cdot5)},\cdots,5^{(n-1)/(4\cdot81)} \bmod n$、他に、失敗している場合もあり。)

$\longrightarrow$ 結局、Miller-Rabin 法と同様の計算を複数回繰返していることになる。

したがって、計算時間も同様になっているであろう。

それなら、base a を取りかえて、Miller-Rabin をもっと多くの回数繰返し行ってもよいではないか …。

本報告では、base として小さい数を使うという考え方をしている。

【参考】GAP にある関連する関数

- IsProbablyPrimeInt : BPSW 法を使った確率的素数判定。
- IsPrimeInt : 楕円曲線素数判定法を使用しているらしい。

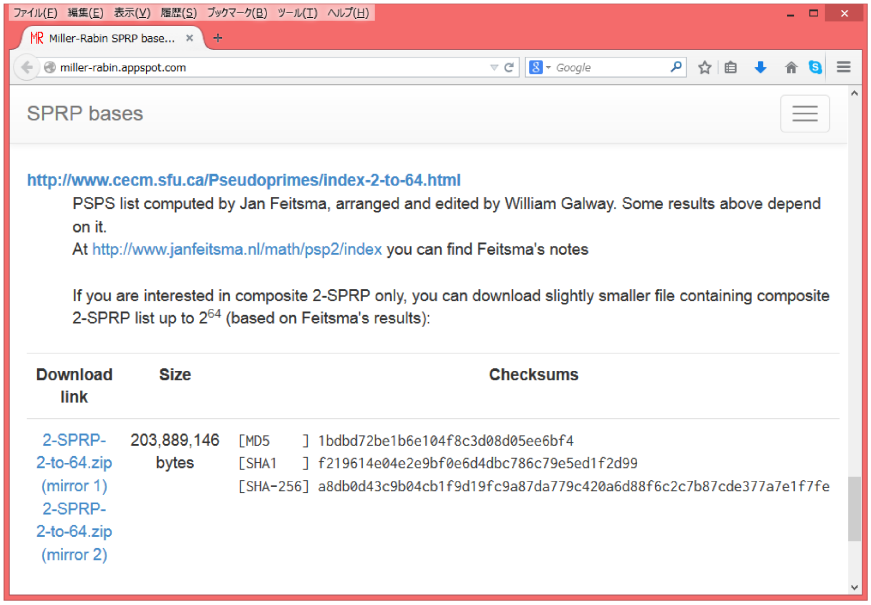
9 計算データ 2-SPRP-2-to-64

2^{64} までの 2-強擬素数のデータ 31894014 個、

$$\psi_{11}<2^{64}<\psi_{12}$$

が成立して、ψ_{11} は、$p \leq 31$ のすべての素数に対して p-強擬素数なので、このデータの Miller-Rabin 法による素数判定には、$p > 31$ となる素数が必要となる。

このデータが正しければ (擬素数を素数と判定して除外していなければ)、ψ_{11} までは、前に引用した予想が正しいことが簡単に確認できる。



9.1 計算データ 2-SPRP-2-to-64 に関する実験

2,3,5,7-強擬素数：このデータ内で、2,3,5,7-強擬素数は、16826 個。
(Miller-Rabin 法のプログラムによる計算時間、1371 秒。)

その中で、本研究の方法で、$n-1$ の約数のうち 3, 5, 7 を使って、
約数を求めることができたもの　16207 個。
約数を求めることができなかったもの　619 個。(この約数計算にかかった時間　4 秒。)
(最初から約数計算までまとめたプログラムによる計算時間　1721 秒、
$1371 + 4 << 1721$??　強儀素数 1 個の平均計算時間約 0.05ms なので、事前処理の時間？)
この 619 個 (最小 22749134240827>> $\psi_4 = 3215031751$) のなかで 2,3,5,7,11-強擬素数は、73 個。
その中で、同様にして約数を求めることができなかったもの　39 個。
この 39 個のうち、最後に残ったのは、2,3,5,7,11,13-強擬素数 5 個 (17-強擬素数にはならない)。
2,3,5,7,11,13-強擬素数で約数計算ができなかったものは 3 個で、 次の通り。
1171879690130594016 1, 15292237577737533661, 16697267137953148781.

計算データ 2-SPRP-2-to-64 の計算時間について、Miller-Rabin 法の計算は、1 個の数に対して、その数が 1000 桁でも 1 秒とかからないので、計算速度は考慮しなかった。

- 本研究プログラムによる総計算時間　1400~1800 秒程度。
- GAP の IsPrimeInt による計算時間　1788 秒。

【参考】Lucas テストの計算時間 ~ Miller-Rabin 法 4、5 回分程度らしい。

10 約数計算が失敗する強擬素数

計算データ 2-SPRP-2-to-64 に対して、最初、2,3,5,7 を base とする強擬素数を考えたが、base として、11,13、そして、17 も必要になった。

最後に残った、2,3,5,7,11,13-強擬素数 5 個 (17-強擬素数ではない)、そして、そのうちで約数計算ができなかったもの 3 個、

1171879690130594016 1, 15292237577737533661, 16697267137953148781

に対して、今まで、約数計算には $n-1$ の約数として 3,5,7 を考えていたが、13 も使ってみると、最初の 2 個の数は約数が得られる。

残った最後の 1 個は、

$n = 16697267137953148781 = 1668195989 \cdot 10009175929$

$n - 1 = 16697267137953148781 - 1 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 7868849 \cdot 10705001$

$1668195989 - 1 = 2^2 \cdot 53 \cdot 7868849$

$10009175929 - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 7868849$

$\longrightarrow 2^{2 \cdot 53 \cdot 7868849} = -1 \bmod n$、3,7 も同様、$5^{53 \cdot 7868849} = -1 \bmod n$.

(【参考】 $\psi_1 = 2047 = 23 \cdot 89$, $\psi_1 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$,
$23 - 1 = 2 \cdot 11$, $89 - 1 = 2^3 \cdot 11 \longrightarrow 2^{11} = 2048 = 1 \bmod \psi_1$.)

本研究の方法で約数計算が失敗する強擬素数について、実験データとしては少ないが、多分、前に引用した強擬素数の性質と同様に、

- 合成数 n が大になるにしたがって、それを判定できる base、および、使用する $n-1$ の約数は、共に大になるような n が存在するようだ。
- n は a を base とする強擬素数で、$r|(n-1)$ となる素数 r をとると、
  $\longrightarrow$ すべての n の素因数 p に対して、$r|(p-1)$ ならば、a の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群における order の r-part は同じ?

などのことがらが考えられたが、本報告直前に、次の実験結果が得られた。

11 合成数が base のとき

最後に残った、2,3,5,7,11,13-強擬素数 $n = 16697267137953148781$ のときは、6-強擬素数にはならない (素数判定としては、これで終了)。

$\Longrightarrow$ n のすべて素因数 p に対して、2 と 3 は、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群における order の 2-part は同じであるが、6 はそうなっていない。

合成数が base のときの実験データ : $n = 16697267137953148781$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{PowerMod}(2,(n-1)/2,n) &= n-1 \\
\mathsf{PowerMod}(3,(n-1)/2,n) &= n-1 \\
\mathsf{PowerMod}(2,(n-1)/4,n) &= 4911275413865036381 \\
\mathsf{PowerMod}(3,(n-1)/4,n) &= 6364565162097257266 \\
&\neq n - 4911275413865036381 \\
\mathsf{PowerMod}(6,(n-1)/4,n) &= 6678906859184929885 \neq n-1 \\
\mathsf{PowerMod}(6,(n-1)/2,n) &= 1 \quad \longleftarrow \text{(Fermat 擬素数)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Gcd}(6678906859184929885-1,n) &= 10009175929\\ \mathrm{Gcd}(6678906859184929885+1,n) &= 1668195989\end{aligned}$$

他にも同様な例があるようで、実験継続中です。

12 考察

実験ばかりしていて、考察として報告することはありませんが、終わりに、次の疑問点をあげます。

- $n-1$ の約数の利用はいつできるのか。

  例えば、素数 $p,q|n$ で、$3|(n-1), 3|(p-1), 3 \not| (q-1)$ のときはどうか？

  $n=2p+1$, p は素数のかたちの強疑素数では、$n-1$ の約数を考えるのは困難と思うが、このような例は見つからなかった。

- 合成数を base とするとき、つまり、n は a_1, a_2-強疑素数であるが $a_1 \times a_2$-強疑素数ではないときに満たす条件は？

- $n-1$ の約数を利用する方法と、Lucas テストやリーマン予想とは、何かの関連があるだろうか？