

極値集合論における線形代数手法

琉球大学教育学部 徳重典英
NORIHIDE TOKUSHIGE
RYUKYU UNIVERSITY

1. はじめに

極値集合論 (extremal set theory) は組合せ論の一分野で、与えられた条件を満たす一番大きな (または小さな) 部分集合族の構造を調べるものである。二点部分集合族はグラフだから、その場合には極値グラフ理論 (extremal graph theory) という。一般の部分集合族はハイパーグラフだが、極値ハイパーグラフ理論という言い方はしないようだ。極値集合論をやや広い意味に使う場合には、極値組合せ論 (extremal combinatorics) ともいう。

さて、極値集合論の問題の多くは、与えられた条件を満たす部分集合族の最大サイズを求めよ、という形に定式化できる。もし満たすべき条件を線形代数の言葉にうまく翻訳できる場合には、部分集合族のサイズを直接調べる代わりに、対応する行列の階数や固有値、あるいは対応するベクトル空間の次元を調べて、そこから元の問題の部分集合族のサイズに関する情報を引き出せる。実際、たくさんの極値集合論の問題が、様々な線形代数手法を用いて解かれており、それらを集めて一冊の本が書けるほどである。一番のお勧めは Babai と Frankl による [2] で、これは組合せ論における線形代数手法を扱った素晴らしい本だが、残念ながら公式には出版されておらず、その見込みもないらしい。Frankl は [23] の最終章を極値集合論の線形代数手法の紹介にあてており、手っ取り早く線形代数手法を概観できる。この本は図書館などで利用できるだろう。Matoušek の [17] は最近の本で、離散幾何やアルゴリズムの問題に線形代数手法を応用する話題を多く扱っているが、極値集合論の話題も入っており、日本語版では少し補足されている。[17] の準備稿は原著者の web site から無料でダウンロードできる。

本稿では、極値集合論における線形代数手法の中でも単純で典型的と思われる例をいくつか紹介する。これらはどれもよく知られているもので、以下の話題や証明に筆者のオリジナルなものはありません。講演は、入手が困難な [2] からの話題を中心に、この手の話をはじめて聞く人向けの構成とした。以下の記述も、なるべくそれを再現するようにした。なお、講演では扱わなかった (従って本稿にも述べない) が、グラフの構造を反映する行列 (例えば隣接行列) の固有値を用いて、グラフの不変量 (例えば独立数) を評価するという手法は、非常に重要で多くの応用がある。キーワードとしては Hoffman の ratio bound, Delsarte の線形計画限界 (linear programming bound) などがあり、最も成功した例としては Wilson [22] による Erdős-Ko-Rado の定理の証明があげられる。[20, 21] とその参考文献を見れば、関連する研究の進展がわかるだろう。最近では須田と田中 [18] が、より適用範囲の広い半正定値限界を用いて極値集合論の成果を得ている。

Date: November 2, 2014.

The author was supported by JSPS KAKENHI 25287031.

2. オッドタウンの定理

以下に紹介する話は、[2]の冒頭に出てくるもの（の一部）である。
 イーブタウンには32人の住人がいる。彼らはクラブを作るのが好きなのだが、クラブは以下の規則の下に作られる。

- (i) どのクラブも偶数の構成員からなる。
- (ii) どの二つのクラブも、共通の構成員の人数は偶数である。
- (iii) 二つのクラブが同一の構成員からなることはない。

このとき、どれくらいたくさんクラブが作れるか。例えば32人が16組の夫婦からなるとして、各クラブには、夫婦単位で加入するかどうかを決めたとする。このとき規則(i)と(ii)は満たされる。さらに16ビット列 $x \in \{0,1\}^{16}$ で各夫婦の加入状態を指定すれば(iii)も満たされ、 $2^{16} = 65536$ 個のクラブが得られる。実はこれが最大である。（これをイーブタウンの定理とよび、線形代数的に証明できるが、ここでは割愛する。）

いくらなんでもこんなにクラブがあるのは困るので、クラブの数を減らすべく規則を変更することになった。新しい規則は次の通り。

- (i') どのクラブも**奇数**の構成員からなる。
- (ii') どの二つのクラブも、共通の構成員の人数は偶数である。

変更点は(i)の条件の偶数が奇数になったところだけである。この変更で旧規則の(iii)は不要になる。実際(i')と(ii')から自動的に(iii)が従う。さてこの変更でクラブの総数はどのくらい減らせるのだろうか。実は、クラブはたった32個しか作れなくなったのだ。しかもそれを線形代数的な理由から説明できる。証明のアイデアはこうだ。「各クラブをそれぞれ二元体 \mathbb{F}_2 上の32次元ベクトルに対応させ、しかも対応するベクトルたちは線形独立であるようにせよ。」

そこで住民に名前をつけて、 $1, 2, \dots, 32$ とし、クラブを C_1, C_2, \dots, C_m とする。クラブ C_i に対応する特性ベクトル $\mathbf{v}_i \in \mathbb{F}_2^{32}$ の第 j 成分を

$$(\mathbf{v}_i)_j := \begin{cases} 1 & j \in C_i \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ は \mathbb{F}_2 上線形独立であることを示そう。すると、これらは32次元のベクトル空間 \mathbb{F}_2^{32} の元だから $m \leq 32$ が従う。そのために標準内積 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ に着目する。これは $C_i \cap C_j$ の個数を数えているが、今 \mathbb{F}_2 上で考えているから、規則(i')と(ii')により

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$$

である。（ただし $i = j$ なら $\delta_{ij} = 1$ で、 $i \neq j$ なら $\delta_{ij} = 0$ とする。）ここで \mathbb{F}_2 上の線形結合

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

を考え、 \mathbf{v}_1 との内積をとると

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1$$

から $\lambda_1 = 0$ が得られる。同様の議論で $\lambda_i = 0$ がすべての $1 \leq i \leq m$ について得られるから、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ は線形独立で、 $m \leq 32$ が得られた。

証明できたことをやや一般的な形で述べるため $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とおき、 $2^{[n]}$ で $[n]$ のべき集合を表す。住民数の 32 には特に意味はないから、これを n としよう。我々が証明したのは次の結果で、これをオッドタウンの定理という。

定理 1 (オッドタウンの定理). $\mathcal{H} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\} \subset 2^{[n]}$ が

$$|C_i \cap C_j| = \begin{cases} \text{奇数} & i = j \text{ のとき} \\ \text{偶数} & \text{その他} \end{cases}$$

を満たすならば、 $|\mathcal{H}| = m \leq n$ である。

次の話題へつなげるため、先の証明を行列を使って、もう一度、書き直してみよう。

証明. $m \times n$ 行列 A を \mathcal{H} の接続行列とする。つまり、 C_i の特性ベクトル \mathbf{v}_i を行ベクトルとして並べて

$$A := \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

と定める。次に

$$B := AA^T$$

とおくと

$$(B)_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = |C_i \cap C_j| = \delta_{ij},$$

つまり $B = I_m$ であり、

$$m = \text{rank}(B) \leq \min\{\text{rank} A, \text{rank} A^T\} = \text{rank} A \leq n$$

が従う。 □

3. FISHER の不等式

定理 2 (Fisher[8]). $\lambda \geq 1$ とし、 C_1, C_2, \dots, C_m は $[n]$ の相異なる部分集合とする。このとき、

$$|C_i \cap C_j| = \lambda$$

がすべての $i \neq j$ について成り立てば、 $m \leq n$ である。

証明. はじめに C_i の中にサイズが λ のものがある場合、例えば $|C_1| = \lambda$ の場合を処理しておく。このとき $j = 2, 3, \dots, m$ について $C_1 \subset C_j$ である。さらに

$$C_1, C_2 \setminus C_1, C_3 \setminus C_1, \dots, C_m \setminus C_1$$

は互いに排反で、どれも空集合ではない。これら m 個の部分集合が $[n]$ 内にあるから、 $m \leq n$ である。

そこで以下、 $d_i := |C_i| > \lambda$ が全ての i について成り立つとする。接続行列 A を、その第 i 行に C_i の特性ベクトル \mathbf{v}_i を持つものと定義する。これは \mathbb{R} 上の $m \times n$ 行列である。次に

$$B := AA^T$$

とおくと、 $(B)_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = |C_i \cap C_j|$ だから、

$$B = \lambda J + D$$

である。ただし J は全ての成分が 1 の行列、 D は対角行列で

$$D = \text{diag}(d_1 - \lambda, d_2 - \lambda, \dots, d_m - \lambda)$$

と定義される。

さて、 B は正定値、つまり任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ について

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{x} > 0$$

であることを示そう。すると B は full rank であり (そうでなければ、連立方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解 \mathbf{x} をもち、 $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 0$ となって B の正値性に反する)、

$$m = \text{rank} B \leq \text{rank} A \leq n$$

が従う。

B の正値性は簡単な計算で確かめられる。実際、

$$\mathbf{x}^T J \mathbf{x} = (x_1 + \dots + x_m)^2 \geq 0,$$

$$\mathbf{x}^T D \mathbf{x} = x_1^2(d_1 - \lambda) + \dots + x_m^2(d_m - \lambda) > 0,$$

であり、

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\lambda J + D) \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T J \mathbf{x} + \mathbf{x}^T D \mathbf{x} > 0$$

を得る。 □

Fisher の不等式の離散幾何への応用例を紹介しよう。平面上の二点は直線を定めるから、平面上の一般の位置に m 点があれば $\binom{m}{2}$ 本の直線が得られる。しかし、一直線上にある m 点からは、もちろん一本の直線しか得られない。では、平面上の m 点が一直線上にない場合には、そこから少なくとも何本の直線が得られるだろうか。これは Sylvester が提起した問題で、Gallai が完全に解決した。それを Erdős[7] が AMS の Monthly で紹介して広く知られるようになった。

定理 3. 平面上の m 点で、一直線上にはないものが与えられたとき、それらの二点から定まる相異なる直線は少なくとも m 本ある。

証明. 与えられた m 点を p_1, \dots, p_m とし、そこから定まる n 本の直線の集合を $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ とする。さらに点 p_i を通る直線の集合を $C_i \subset L$ とし、 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\} \subset 2^L$ とおく。このとき、任意の $i \neq j$ について、 $C_i \cap C_j$ は二点 p_i と p_j から定まる直線だけを含み、

$$|C_i \cap C_j| = 1$$

である。従って Fisher の不等式から、 $|\mathcal{C}| = m \leq |L| = n$ を得る。 □

この問題は、一見、線形代数とは関係がありそうもないのに、本質的に線形性を使って鮮やかに解けるとするのが面白い。これは古いパズルだが、最近、この主張が一般の距離空間に拡張できるか研究されている。

一般の距離空間において、三点 x, y, z が

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

を満たすとき、この三点は一直線上にあると定義する。例えば、グラフを（頂点間の距離を通常通り、最短通路の長さで定義して）距離空間とみて直線が定義できる。この定義（betweenness による定義という）から得られる直線は、通常のユークリッド空間における直線とは直感的にかなり異なった振る舞いもする。それにもかかわらず、次のことが予想されている。

予想 1 (Chen–Chvátal[5]). 任意の距離空間に m 点が与えられたとき、それらは一直線上にあるか、少なくとも m 本の直線を定める。

先ほどの証明をまねしようとしても、Sylvester の問題とは違って、今度は $|C_i \cap C_j| = 1$ とは限らない。

4. 多項式の空間

この節では p は素数とし、 $L \subset \mathbb{Z}_p$ とする。集合族 $\mathcal{H} = \{C_1, \dots, C_m\} \subset 2^{[n]}$ は、次の二条件

- $1 \leq i < j \leq m$ について $|C_i \cap C_j| \in L \pmod{p}$,
- $1 \leq i \leq m$ について $|C_i| \notin L \pmod{p}$

がみたされるとき、 (p, L) -交差的であるという。

定理 4 (Deza–Frankl–Singhi[6]). 集合族 $\mathcal{H} \subset 2^{[n]}$ が (p, L) -交差的ならば、 $|L| = s$ とおくと

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}.$$

この定理を証明するために、少し、準備をしよう。まず、 $C \subset [n]$ と C の特性ベクトル \mathbf{v} を対応させることで、 $2^{[n]}$ と $\{0, 1\}^n$ を同一視できる。以下、断らなくてもこの同一視をしばしば行う。

次に多重線形多項式の基本的な性質を見ておく。各変数について次数が高々 1 の多項式は、多重線形であるという。 \mathbb{F}_p 上の高々 s 次の n 変数多項式 f に対して、やはり次数が高々 s で同じ変数をもつ多重線形多項式 \bar{f} で、すべての $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x})$$

を満たすものが存在する。実際、 $\{0, 1\}^n$ 上では $x^2 = x$ だから、 f において変数のべきに 2 以上が現れたら、それらをすべて 1 におきかえることで \bar{f} を得る。例えば

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + 3xy^5$$

ならば

$$\bar{f}(x, y) = x + 5xy$$

である。 f から \bar{f} を得る操作を多重線形化という。

次数が高々 s で x_1, \dots, x_n を変数とする多重線形多項式全体は、ベクトル空間

$$V = \text{span} \left\{ \prod_{i \in I} x_i : |I| \leq s, I \subset [n] \right\}$$

を作る。例えば、 $n=3$ で $s=2$ ならば

$$V = \text{span}\{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}.$$

また、

$$\dim V = \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$$

である。

定理 4 の証明. $X = \{0, 1\}^n$ とおき、部分集合 C_i ($1 \leq i \leq m$) に対応する多項式 $f_i: X \rightarrow \mathbb{F}_p$ を

$$f_i(\mathbf{x}) := \prod_{l \in L} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i - l)$$

と定める。ただし $\mathbf{v}_i \in X$ は C_i の特性ベクトルである。このとき、 (p, L) -交差性から

$$f_i(\mathbf{v}_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{if } i = j, \\ = 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

従って $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}_p^X$ は \mathbb{F}_p 上線形独立である。そこで、ベクトル空間 $V \subset \mathbb{F}_p^X$ で、次の二つの性質

- $\text{span}\{f_1, \dots, f_m\} \subset V$,
- $\dim V = \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$

を満たすものが見つかったならば、

$$m = \dim \text{span}\{f_1, \dots, f_m\} \leq \dim V = \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$$

となって、証明が完了する。これがこの定理の線形代数的証明の基本アイデアである。

さて多項式 f_i の定義を思い出してみると、

$$f_i(\mathbf{x}) := (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i - l_1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i - l_2) \cdots (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i - l_s)$$

であった。ただし、 $L = \{l_1, \dots, l_s\}$ とする。ここで $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とすれば、 f_i は n 個の変数 x_1, \dots, x_n をもつ次数 s 以下の多項式である。これは $X = \{0, 1\}^n$ から \mathbb{F}_p への関数で、多重線形化すると \tilde{f}_i が得られる。この \tilde{f}_i たちは、次数が高々 s で、 x_1, \dots, x_n を変数に持つ線形多重多項式だから、

$$V := \text{span} \left\{ \prod_{i \in I} x_i : |I| \leq s, I \subset [n] \right\}$$

に含まれ、 V の次元は

$$\dim V = \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$$

である。これが探していたものであった。□

上の証明は、Alon, Babai, 鈴木 [1] のアイデアを基にしている。この論文から、同様のアイデアを用いて得られる結果をひとつ紹介したい。そこで (p, L) -交差性を次のように変更し、これを ABS-交差性とよぼう。

- $K, L \subset \mathbb{Z}_p$ かつ $K \cap L = \emptyset$,
- $1 \leq i < j \leq m$ について $|C_i \cap C_j| \in L \pmod{p}$,
- $1 \leq i \leq m$ について $|C_i| \in K \pmod{p}$.

Alon らは、 $r(s-r+1) < p$ かつ $n \geq s + \max K$ のとき、ABS-交差性を満たす $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ について

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \cdots + \binom{n}{s-r+1}$$

が成り立つことを示した。さらに、同じ結論は $r(s-r+1) < p$ という条件を落としても得られると予想した。この予想は、最近、Hwang と Kim[14] によって肯定的に解決された。

5. 制限交差性と離散幾何への応用

この節でも p は素数、 $L \subset \mathbb{Z}_p$ とする。集合族 $\mathcal{H} \subset 2^{[n]}$ が t -回避的とは、任意の $H, H' \in \mathcal{H}$ について

$$|H \cap H'| \neq t$$

となることをいう。定理 4 を

$$n = 4p - 1, s = p - 1, L = \{0, \dots, p - 2\}$$

に適用して次を得る。

系 1 (交差回避定理). 集合族 $\mathcal{H} \subset \binom{[4p-1]}{2p-1}$ が $(p-1)$ -回避的ならば、

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{4p-1}{0} + \binom{4p-1}{1} + \cdots + \binom{4p-1}{p-1} < 2 \binom{4p-1}{p-1}.$$

この系 1 の離散幾何への応用を紹介しよう。 n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の単位距離グラフ G_n は、 \mathbb{R}^n を頂点集合とし、距離がちょうど 1 だけ離れている二点を全て辺で結ぶことで得られる。記号で書けば、

- $V(G_n) = \mathbb{R}^n$,
- $E(G_n) = \{xy : \|x - y\| = 1\}$.

G_n の染色数を決めるのは難しい問題で、平面上の単位距離グラフについてさえ、

$$4 \leq \chi(G_2) \leq 7$$

までしかわかっていない。一般の次元では、Larman と Rogers[16] が

$$\chi(G_n) < (3 + \varepsilon)^n$$

であることを示した。一方、下界については次のことが知られている。

定理 5 (Frankl-Wilson[13]). n が十分大きければ、 $\chi(G_n) > 1.2^n$ である。

証明の概略. $n = 4p - 1$ とおき、 n 次元立方体の頂点集合 $Q_n = \{0, 1\}^n$ の中に、染色数の大きい単位距離構造を見つけよう。頂点の座標に 1 をちょうど $2p - 1$ 個もつもの、つまり $\binom{[n]}{2p-1} \subset Q_n$ に注目する。もし二頂点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \binom{[n]}{2p-1}$ が (対応する部分集合の方で考えて)

$$|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| = p - 1$$

を満たせば、 $(\mathbb{R}^n$ のベクトルとしては、距離について)

$$\|x - y\| = \sqrt{2p}$$

である。

さて、 $\binom{[n]}{2p-1}$ を次のように着色できたとせよ。すなわち、 $\sqrt{2p}$ だけ離れた二頂点は必ず異なる色で塗られている。このとき、同色の頂点 (に対応する部分集合) たちは、 $(p-1)$ -回避的だから、交差回避定理によりそのサイズは $2\binom{n}{p-1}$ より小さい。従って、そのような着色には少なくとも $\binom{n}{2p-1} / (2\binom{n}{p-1})$ 色が必要であり、これは $(1+\varepsilon)^n$ より大きい。□

交差回避定理のもう一つの応用として、Borsuk の問題を取り上げよう。彼は 1933 年の論文 [4] で「 \mathbb{R}^d の直径 1 の集合を $d+1$ 個に分割して、各部分の直径を 1 より小さくできるか」と問うた。集合の直径とは最も離れた二点間の距離である。ここで \mathbb{R}^d におけるどんな直径 1 の集合でも、 N 個にうまく分割すれば直径を真に小さくできるとき、そのような N の最小値を $f(d)$ と書けば、Borsuk の問は $f(d) \leq d+1$ であるか、と言い換えることができる。これは $d \leq 3$ のときや、集合がなめらかなときには正しい。 $f(d) \leq d+1$ であろう、という言明は Borsuk 予想として知られるようになった (が、本人がそう予想したわけではない)。実は、この予想は全然正しくなかったのである。

定理 6 (Kahn–Kalai[15]). $f(d) > 1.2\sqrt{d}$.

$d \geq 1652$ ならば $1.2\sqrt{d} > d+1$ だから、予想は成り立たない。Kahn と Kalai は d 次元立方体の頂点集合の部分集合をうまく選び、直径を減らすには d の指数関数的な個数に分割しなければならないものを構成したのだが、これは先に述べた染色数の大きい単位距離構造の構成とよく似ていて (実際、Frankl–Wilson[13] のアイデアを基にしている)、もう一捻りが必要だが証明は短く、わずか 14 行にまとめられている。1992 年といえば email も普及しはじめており、その夏、反例の構成というニュースが、実際の構成法 (つまり証明) も込みであったという間に広まったことを Babai は指摘している。最近、Bondarenko[3] は \mathbb{R}^{65} の単位球面上の 416 個の点集合で、どのように 83 個の部分に分割しても直径を減らせないものを構成した。彼が構成したものは二距離集合 (異なる二点間の距離が二種類しかないもの) になっている。さらに彼は任意の整数 $n \geq 1$ と $k \geq 0$ に対して $f(66n+k) > 84n+k+1$ であることも示した。

最後にベクトル空間における交差回避的な部分空間族に関する問題を紹介して終わりにしよう。 V を有限体 \mathbb{F} 上の n 次元ベクトル空間とする。 k 次元部分空間族 $\mathcal{H} \subset \binom{V}{k}$ が $(t-1)$ -回避的とは、任意の部分空間 $H, H' \in \mathcal{H}$ に対して $\dim(H \cap H') \neq t-1$ が成り立つことである。

予想 2 (Frankl–Graham[9]). $t \geq 1$, $n \geq k \geq 2t-1$ で部分空間族 $\mathcal{H} \subset \binom{V}{k}$ が $(t-1)$ -回避的ならば、

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-t}{k-t}.$$

この予想は未解決であるが、少し弱い上界は得られている。

定理 7 (Frankl–Tokushige[11]). $t \geq 1$, $n \geq k \geq 2t-1$ で部分空間族 $\mathcal{H} \subset \binom{V}{k}$ が $(t-1)$ -回避的ならば、

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n}{k-t}.$$

この上界は、 $|\mathcal{A}| \times \begin{bmatrix} V \\ k-l \end{bmatrix}$ の行列 $M = (m_{xy})$ を

$$m_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \supset y, \\ 0 & \text{if } x \not\supset y \end{cases}$$

と定義すると、 M の行ベクトルたちが \mathbb{Q} 上線形独立であることから従う。円分等周多項式の基本的な性質を用いることで、線形独立性の確認が容易になる。

6. 研究集会の後で

自然数 l を固定し、集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ で、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ に対して $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{l}$ をみたすものを考える。(特に $F \in \mathcal{F}$ なら $|F|$ は l の倍数である。) そのような \mathcal{F} の最大サイズを $m(n, l)$ と書こう。第2節で述べたイーブントウンの定理は $l=2$ のとき

$$m(n, 2) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

を主張する。 $l \geq 3$ としよう。Frankl と Odlyzko[10] は、位数 $4l$ のアダマール行列が存在すれば

$$m(n, l) \geq (8l)^{\lfloor n/(4l) \rfloor}$$

であり、一般に $m(n, l) \geq 2^{8\lfloor n/(4l) \rfloor}$ であることを示した。この下界は $2^{\lfloor n/l \rfloor}$ よりずっと大きい。

次に、この話を k 点部分集合族 \mathcal{F} で考えるため、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ に対して $|F \cap F'| \equiv k \pmod{l}$ をみたすものを考え、そのような $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ の最大サイズを $m(n, k, l)$ としよう。研究集会が終わってしばらくたってから、 $m(n, k, 2)$ に関することが田崎 [19] によって扱われていることを山形大の佐久間雅さんに教えて頂いた。そこでは有向実グラスマン多様体の対蹠集合を分類する道具のひとつとして、 $n \geq 12$ で $m(n, 4, 2) = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2}$ という事実が使われる。

その後 Frankl と議論して、 n が k, l に比べて十分大きく $k \equiv s \pmod{l}$, $0 \leq s < l$ ならば

$$m(n, k, l) = \binom{\lfloor (n-s)/l \rfloor}{(k-s)/l} \quad (1)$$

が成り立つことを確かめた [12]。ただしその証明は線形代数的なものではない。また [22] の証明と同様な方法 (いわゆる線形計画限界を用いる手法) で

$$m(2a, 6, 2) = \binom{a}{3}$$

が $a \geq 13$ で成り立つこともわかった。一方、 n が k, l に比べてあまり大きくないときには (1) が成り立たないことがあり、[8, 4] ハミング符号や [24, 12] ゴレイ符号を使って、そのような例を構成できる。従って、固定された k, l に対しても、全ての n について $m(n, k, l)$ を決定するのは容易ではないだろう。しかし (1) を成り立たせる n のよい下界が、線形代数手法を用いて得られるかもしれない。

REFERENCES

- [1] N. Alon, L. Babai, H. Suzuki. Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems. *J. Combin. Theory Ser. A* 58 (1991) 165–180.
- [2] L. Babai and P. Frankl. “Linear algebra methods in combinatorics (with application to geometry and computer science),” Ver. 1 1988, Ver. 2 1992, never published. Department of Computer Science, The University of Chicago.
- [3] A. V. Bondarenko. On Borsuk’s conjecture for two-distance sets. arXiv:1305.2584.
- [4] K. Borsuk. Three theorems on the n -dimensional sphere. (in German) *Fund. Math.* 20 (1933) 177–190.
- [5] X. Chen, V. Chvátal. Problems related to a de Bruijn–Erdős theorem. *Discrete Appl. Math.* 156 (2008) 2101–2108.
- [6] M. Deza, P. Frankl, N. M. Singhi. On functions of strength t . *Combinatorica* 3 (1983) 331–339.
- [7] P. Erdős. Three point collinearity. *Amer. Math. Monthly* 50 (1943) Problem 4065, p. 65; Solutions in 51 (1944) 169–171.
- [8] R. A. Fisher. An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks. *Ann. Eugenics* 10 (1940) 52–75.
- [9] P. Frankl, R. L. Graham. Intersection theorems for vector spaces. *European J. Combin.* 6 (1985) 183–187.
- [10] P. Frankl, A. M. Odlyzko. On subsets with cardinalities of intersections divisible by a fixed integer. *European J. Combin.* 4 (1983) 215–220.
- [11] P. Frankl, N. Tokushige. The Katona theorem for vector spaces. *J. Combin. Theory Ser. A* 120 (2013) 1578–1589.
- [12] P. Frankl, N. Tokushige. Uniform eventown problems. *preprint*.
- [13] P. Frankl, R. M. Wilson. Intersection theorems with geometric consequences. *Combinatorica* 1 (1981) 357–368.
- [14] K-W. Hwang, Y. Kim. A proof of Alon–Babai–Suzuki’s conjecture and multilinear polynomials. *European J. Combin.* 43 (2015) 289–294.
- [15] J. Kahn, G. Kalai. A counterexample to Borsuk’s conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* 29 (1993) 60–62.
- [16] D. G. Larman, C. A. Rogers. The realization of distances within sets in Euclidean space. *Mathematika* 19 (1972) 1–24.
- [17] J. Matoušek. “Thirty-three miniatures” mathematical and algorithmic applications of linear algebra, STML vol 53, American Mathematical Society, 2010. 日本語版は「33の素敵な数学小景」日本評論社 2014.
- [18] S. Suda, H. Tanaka. A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming. *Bull. Lond. Math. Soc.* 46 (2014) 342–348.
- [19] H. Tasaki. Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds. *Internat. J. Math.* 24 (2013) no. 8, 1350061, 28 pp.
- [20] N. Tokushige. The eigenvalue method for cross t -intersecting families. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 38 (2013) 653–662.
- [21] N. Tokushige. Cross t -intersecting integer sequences from weighted Erdős–Ko–Rado. *Combinatorics, Probability and Computing*, 22 (2013) 622–637.
- [22] R.M. Wilson. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem. *Combinatorica*, 4 (1984) 247–257.
- [23] フランクル、秋山著「現代組合せ論」共立出版 1987.

琉球大学教育学部 (COLLEGE OF EDUCATION, RYUKYU UNIVERSITY)

E-mail address: hide@edu.u-ryukyu.ac.jp