数理解析研究所講究録
第1963巻 2015年 32-36

下半連続集合値関数の分解について

(On factorizations of lower semicontinuous set-valued mappings)

Valentin Gutev
Department of Mathematics, Faculty of Science,
University of Malta

愛媛大学 理工学研究科 山内貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering,
Ehime University

以下, 空間は Hausdorff 空間を表す. 空間 X から空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対して, 空間 Z と連続写像 $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ が $f = h \circ g$ を満たすとき, それらの組 (Z, g, h) を f の**分解** (factorization) という. 空間 Z が良い性質をみたすように連続写像 $f : X \to Y$ の分解 (Z, g, h) が与えられれば, 良い空間 Z 上の連続写像 h の性質を応用できる場合がある. 実際, Mardešić の定理 [9, Theorem 1] "コンパクト空間 X からコンパクト空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対して, Z がコンパクト空間で $\dim Z \leq \dim X$ かつ $w(Z) \leq w(Y)$[1]となる f の分解 (Z, g, h) が存在する" は, 次元論における universal theorem や compactification theorem へ応用された ([2] を参照). 本稿では, 集合値関数の分解について, 特に, 論文 [7] で得られた下半連続な集合値関数の分解について解説する.

空間 Y の空でない部分集合全体を 2^Y で表す. 集合値関数 $\Phi : X \to 2^Y$ が**下半連続** (lower semicontinuous) であるとは, 任意の Y の開集合 V に対して, 集合

$$\Phi^{-1}[V] = \{x \in X : \Phi(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

が X の開集合であることをいう. 集合値関数 $\Psi : X \to 2^Y$ が**上半連続** (upper semicontinuous) であるとは, 任意の Y の閉集合 F に対して, $\Psi^{-1}[F]$ が X の閉集合であることをいう. 空間 Y に対して,

$$\mathscr{F}(Y) = \{F \in 2^Y : F \text{ は } Y \text{ の閉集合}\}, \quad \mathscr{C}(Y) = \{C \in 2^Y : C \text{ はコンパクト}\}$$

とおく.

Choban and Nedev [1] (cf. [13]) は, 開被覆の列を用いて Michael の選択定理 [11] の別証明を与え, その手法によって, 次の定理を証明した.

定理 1 (Choban and Nedev [1], cf. [13, Lemma 3.5 and Theorem 5.1]). X をパラコンパクト空間[2], Y を完備距離化可能空間, $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ を下半連続な集合

[1] ここで, $\dim X$ は空間 X の被覆次元 (covering dimension) を, $w(X)$ は X の位相濃度 (weight) を表す.

[2] 空間 X の任意の開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるとき, X をパラコンパクト空間という.

値関数とする．このとき，次の条件をみたす空間 Z, 連続写像 $g : X \to Z$ および集合値関数 $\varphi : Z \to \mathscr{F}(Y)$ が存在する．

- Z は距離化可能で $w(Z) \leq w(Y)$,
- φ は下半連続,
- 各 $x \in X$ に対して $\varphi(g(x)) \subset \Phi(x)$.

ここで，組 (Z, g, φ) は Φ の下半連続な**弱分解** (weak factorization) と呼ばれる．一方，空間 X から距離化可能空間 Y への下半連続 (上半連続) な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ に対して，空間 Z, 連続写像 $g : X \to Z$ および集合値関数 $\varphi : Z \to \mathscr{F}(Y)$ が次の条件をみたすとき，組 (Z, g, φ) を Φ の下半連続 (上半連続) な**分解** (factorization) という．

- Z は距離化可能[3],
- φ は下半連続 (上半連続),
- 各 $x \in X$ に対して $\varphi(g(x)) = \Phi(x)$.

集合値関数 $\Phi : X \to 2^Y$ が**強下半連続** (strongly lower semicontinuous) であるとは，任意の Y のコゼロ集合[4]A に対して，$\Phi^{-1}[A]$ が X のコゼロ集合であることをいう．集合値関数 $\Psi : X \to 2^Y$ が**強上半連続** (strongly upper semicontinuous) であるとは，任意の Y のゼロ集合[5]A に対して，$\Psi^{-1}[A]$ が X のゼロ集合であることをいう．集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ が下半連続 (上半連続) な分解をもてば，Φ は強下半連続 (強上半連続) である[6]．逆に，Gutev [3, Theorems 1.1 and 3.1] は次の分解定理を与えた．

定理 2 (Gutev [3])**.** (1) 空間 X から可分距離化可能空間 Y への強下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ は，$w(Z) \leq w(Y)$ をみたす下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつ．

(2) 空間 X から可分距離化可能空間 Y への強上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は，$w(Z) \leq w(Y)$ をみたす上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ．

定理 2 では終域 Y に可分性が仮定されている．そこで，"Y の可分性を仮定せずとも，Φ (Ψ) は下半連続な (上半連続な) 分解をもつか"，という問題が考えられる．Gutev, Ohta and Yamazaki [5] は，凸な値をとる下半連続集合値 (上半連続コンパクト値) 写像が下半連続な (上半連続な) 分解をもつための特徴づけを与えた．論文 [6] では，一般の上半連続コンパクト値写像が上半連続な分解を持つための条件について論じ，次を得た．

---

[3] 技術的な理由により，ここでの分解の定義において，$w(Z)$ の条件は課さない (定理 8 参照).

[4] 空間 X の部分集合 A が**コゼロ集合** (cozero set, functionally open set) であるとは，実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在して，$A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ が成り立つことをいう．

[5] コゼロ集合の補集合を**ゼロ集合** (zero set, functionally closed set) という．

[6] 距離化可能空間の任意の開集合 (閉集合) はコゼロ集合 (ゼロ集合) であり，コゼロ集合 (ゼロ集合) の連続写像による逆像はコゼロ集合 (ゼロ集合) である．

定理 3 ([6, Corollary 4.2 (a)]). 可算パラコンパクトな族正規[7]空間 X から距離化可能空間 Y への強上半連続な集合値関数 $\Psi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は, $w(Z) \le w(Y)$ をみたす上半連続な分解 (Z, g, ψ) をもつ.

以下, 集合値関数の下半連続な分解について述べる [7]. 上半連続な分解に関する定理 3 の証明では, 任意の局所有限な Y の閉集合族 $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ に対して $\Psi^{-1}[F_\alpha] \subset U_\alpha$, $\alpha \in A$, をみたす局所有限な X の開集合族 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ の存在が重要であった [6]. 一方, 集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ の下半連続な分解の存在には, 集合族 $\{\Phi^{-1}[V] : V$ は Y の開集合$\}$ の基となる X のコゼロ集合からなる σ-疎[8]な集合族の存在が本質的となる. ここで, X の部分集合族 $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ が部分集合族 $\mathscr{U}$ の**基** (base) であるとは, 任意の $U \in \mathscr{U}$ に対して $U = \bigcup_{\alpha \in A'} W_\alpha$ をみたす $A' \subset A$ が存在するときをいう ([8]). 実際, 次が成り立つ.

定理 4 ([7, Theorem 2.1]). X を空間とし, Y を距離化可能空間とする. このとき, 集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}(Y)$ が $w(Z) \le w(Y)$ をみたす下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつためには, 次の 4 条件をみたす X の部分集合族 $\mathscr{W}$ が存在することが必要十分である.

- $\mathscr{W}$ は $\{\Phi^{-1}[V] : V$ は Y の開集合$\}$ の基,
- 各 $W \in \mathscr{W}$ は X のコゼロ集合,
- $\mathscr{W}$ は σ-疎[8],
- $|\mathscr{W}| \le w(Y)$.

空間 X が **PF 正規**であるとは, X が正規空間でかつ任意の点有限[9]な X の開被覆が局所有限な X の開被覆によって細分されるときをいう. 族正規空間は PF 正規空間であるが [10, Theorem 2], その逆は一般に成り立たない [10, Example 1]. 定理 4 を用いて次が得られる.

定理 5 ([7, Theorem 3.1]). PF 正規空間 X から距離化可能空間 Y への強下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は, $w(Z) \le w(Y)$ をみたす下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつ.

定理 5 における X の PF 正規性は本質的である. 実際, 次が成り立つ.

---

[7]空間 X が**可算パラコンパクト** (countably paracompact) であるとは, X 任意の可算な開被覆が局所有限な X の開被覆によって細分されることである. また, 空間 X の任意の疎 (discrete) な閉集合族 $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ に対して, 互いに交わらない (disjoint な) 開集合族 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ が存在し, 各 $\alpha \in A$ に対して $F_\alpha \subset U_\alpha$ が成り立つとき, X を**族正規** (collectionwise normal) 空間という. 正規空間において, 可算パラコンパクトな族正規空間のクラスは, expandable space と呼ばれる空間のクラスと一致する [15].

[8]空間 X の部分集合族 $\mathscr{W}$ が **σ-疎** (σ-discrete) であるとは, $\mathscr{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ をみたす X の疎な部分集合族 $\mathscr{W}_n$, $n \in \mathbb{N}$ が存在することをいう.

[9]空間 X の部分集合族 $\mathscr{U}$ が**点有限**であるとは, 任意の $x \in X$ に対して $\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$ が有限集合であるときをいう.

系 6 ([7, Corollary 3.5]). 空間 X から任意の距離化可能空間 Y への下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{C}(Y)$ が下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつための必要十分条件は, X が PF 正規かつ完全[10]であることである.

距離空間 Y に対して, $\mathscr{F}_s(Y) = \{S \in \mathscr{F}(Y) : S$ は可分 $\}$ とおく.

注意 7. 定理 5 の $\Phi : X \to \mathscr{C}(Y)$ を $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ に単に替えることは, 一般にはできない. 実際, 空間 X が条件 "任意の距離化可能空間 Y への下半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ が下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつ" をみたせば, 任意の点可算[11]な X の開被覆がコゼロ集合からなる σ-疎な基をもつ. しかし, この性質を持たないようなパラコンパクトかつ完全な空間が Todorčević [16] によって構成されている (cf. [17, Remark 3.8]).

閉かつ可分な値をとる集合値関数の分解については, 次が成り立つ.

定理 8 ([7, Corollary 6.2]). パラコンパクト空間 X から距離化可能空間 Y への下半連続かつ上半連続な集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ は, 下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつ.

注意 9. 上半連続かつ下半連続な集合値関数は, 強下半連続である [4, Lemma 3.3]. 注意 7 と同じ理由により, 定理 8 の「下半連続かつ上半連続」を「強下半連続」に弱めることはできない. 一方, 定理 8 の X のパラコンパクト性が必要であるかは分かっていない.

集合値関数の下半連続な分解は, Michael 表現の存在へ応用できる. ここで, X から Y への連続写像からなる列 $\{f_n\}$ が集合値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ の **Michael 表現** (Michael representation) であるとは, 各 $x \in X$ に対して $\Phi(x) = \overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ が成り立つときをいう (cf. [14, Theorem 5.58]). 実際, Michael [12, Theorem 1.1] は, 次の定理を証明した.

定理 10 (Michael [12]). 距離化可能空間 X から Banach 空間 Y への下半連続な凸値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ は, Michael 表現をもつ.

空間 X から Banach 空間 Y への凸値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ が下半連続な分解 (Z, g, φ) をもつとする. このとき, $\varphi : Z \to \mathscr{F}_s(Y)$ は距離化可能空間上の下半連続な凸値関数なので, Michael 表現 $\{f_n\}$ をもつ. ここで, 連続写像の列 $\{f_n \circ g\}$ は Φ の Michael 表現である. よって, 定理 5 と 8 より次を得る.

---

[10] 空間 X の任意の開集合が可算個の閉集合の和集合として表せるとき, X は完全 (perfect) であるという. 完全な正規空間における任意の開集合はコゼロ集合であり, したがって, 任意の下半連続な集合値関数が強下半連続であることに注意する.

[11] 空間 X の部分集合族 $\mathscr{U}$ が**点可算**であるとは, 任意の $x \in X$ に対して $\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$ が可算集合であるときをいう.

系 11 ([17, Theorem 2.11]). PF 正規空間 X から Banach 空間 Y への強下半連続な凸値関数 $\Phi : X \to \mathscr{C}(Y)$ は, Michael 表現をもつ.

系 12. パラコンパクト空間 X から Banach 空間 Y への上半連続かつ下半連続な凸値関数 $\Phi : X \to \mathscr{F}_s(Y)$ は, Michael 表現をもつ.

References

[1] M. Choban and S. Nedev, *Factorization theorems for set-valued mappings, set-valued selections and topological dimension*, Math. Balkanica **4** (1974), 457–460, (in Russian).

[2] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Heldermann Verlag, Berlin, 1995.

[3] V. Gutev, *Factorizations of set-valued mappings with separable range*, Comment. Math. Univ. Carolinae **37** (1996), 809–814.

[4] V. Gutev, *Weak factorizations of continuous set-valued mappings*, Topology Appl. **102** (2000), 33–51.

[5] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Extensions by means of expansions and selections*, Set-Valued Analysis **11** (2006), 69–104.

[6] V. Gutev and T. Yamauchi, *Factorising usco mappings*, Topology Appl. **159** (2012), 2423–2433.

[7] V. Gutev and T. Yamauchi, *Factorising lower semi-continuous mappings*, Houston J. Math. **40** (2014), 969–986.

[8] R. W. Hansell, *On characterizing non-separable analytic and extended Borel sets as types of continuous images*, Proc. London Math. Soc. (3) **28** (1974), 683–699.

[9] S. Mardešić, *On covering dimension and inverse limits of compact spaces*, Illinois J. Math. **4** (1960), 278–291.

[10] E. Michael, Point-finite and locally finite coverings, Canad. J. Math. **7** (1955), 275–279.

[11] E. Michael, *Continuous selections* I, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.

[12] E. Michael, *Dense families of continuous selections*, Fund. Math. **47** (1959), 173–178.

[13] S. Nedev, *Selection and factorization theorems for set-valued mappings*, Serdica **6** (1980), 291–317.

[14] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[15] J. C. Smith and L. L. Krajewski, *Expandibility and collectionwise normality*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971) 437–451.

[16] S. Todorčević, *A topology on sequences of countable ordinals*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), 137–140.

[17] T. Yamauchi, *Characterizations of some classes of perfect spaces in terms of continuous selections avoiding supporting sets*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **56** (2008), 149–161.