

ブレグマン距離を用いた準非拡大写像に関する不動点近似法 (APPROXIMATING FIXED POINTS FOR GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS WITH BREGMAN DISTANCES)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育人間科学部

(COLLEGE OF EDUCATION AND HUMAN SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像 (nonexpansive mapping), すなわち, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つとする. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T) := \{z \in C : Tz = z\}$ で表すこととする. 1953 年に Mann [13] は非拡大写像の不動点を求めるために次の近似法を導入した.

$$(1.1) \quad \begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である. この研究以降, 多くの研究者がヒルベルト空間やバナッハ空間で (1.1) の不動点近似法を研究した ([14, 18, 19] 等を参照).

一方, 非拡大型の写像をバナッハ空間で考える場合に複数の拡張の概念が存在する. 特に, 茨木-高橋は [6, 7] は次のような非拡大型非線形写像を導入した: C を滑らかな実バナッハ空間 E の空でない閉集合とし, J を E の正規双対写像 (normalized duality mapping) とする. このとき, C から C への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$V(Tx, p) \leq V(x, p)$$

がつねに成り立つことと定義する ([6, 7] を参照). ただし, $E \times E$ 上の関数 V は, E の任意の元 x, y に対して

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義される. 2007 年に茨木-高橋 [8] は準非拡大写像に関して (1.1) で構成された点列 $\{x_n\}$ が T の不動点へ弱収束することを示した. また, 2012 年に Naraghirad-Takahashi-Yao [16] は関数 V をブレグマン距離に置き換えることで, 準非拡大写像を拡張する新たな非拡大型非線形写像の概念を導入した. さらに, 彼らはその写像を用いた不動点の存在定理と収束定理を得た.

本論文は Naraghirad-Takahashi-Yao [16] が導入したブレグマン距離を用いた新しい非拡大型非線形写像に関して議論する. はじめに, ブレグマン距離に関しての性質を議論し, ブレグマン距離を用いた準非拡大写像の性質を議論する. 最後に, ブレグマン距離を用いた準非拡大写像に関して (1.1) で構成された点列の不動点近似法を議論する.

2010 Mathematics Subject Classification. 47H10, 47H09, 47J25.

Key words and phrases. ブレグマン距離, ブレグマン準非拡大写像, サニーブレグマン準非拡大射影, 不動点近似法.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y ($x \neq y$) に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \lim_n \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

$p \in (1, \infty)$ とする. バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$J_p x = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}$$

を対応させる写像 J_p のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ. 特に, J_2 は正規双対写像 (normalized duality mapping) と呼ばれ, J で表される ([4, 22] を参照). $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

バナッハ空間 E のノルムがガトー微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様ガトー微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムがフレッシュエ微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様フレッシュエ微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

多価写像 $A \subset E \times E^*$ に対して, A の定義域は $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$, 値域は $R(A) = \cup \{Ax : x \in D(A)\}$ で定義される. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 単調作用素 A が極大 (maximal) であるとは, A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう. すなわち, $B \subset E \times E^*$ が単調作用素かつ $A \subset B$ であるならば, $A = B$ となるときをいう. A が極大単調作用素ならば, $A^{-1}0 = \{u \in E : 0 \in Au\}$ は閉凸集合となる. E が回帰的で狭義凸ならば, 単調作用素 A が極大になる必要十分条件は, 任意の $\lambda > 0$ に対して, $R(J + \lambda A) = E^*$ となることである ([4, 23] を参照). 写像 $A : E \rightarrow E^*$ が弱点列連続 (weakly sequentially continuous) であるとは, E の点列 $\{x_n\}$ が E の元 x に弱収束するならば, E^* の点列 $\{Ax_n\}$ が E^* の元 Ax に汎弱収束することと定義する.

関数 $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ が真関数 (proper function) であるとは, その定義域 $D(f) = \{x \in E : f(x) < \infty\}$ が空でないときをいう. 同様に, 下半連続 (lower semicontinuous) であるとは, 任意の $r > 0$ に対して集合 $\{x \in E : f(x) \leq r\}$ が閉集合のときをいう. また, 関数 f が凸関数 (convex function) であるとは, 任意の E の元 x, y と区間 $(0, 1)$ 上の実数 α に対して

$$(2.2) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 等号が成立するのが $x = y$ のときに限るとき, f は狭義凸関数 (strictly convex function) という. $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. E の元 x に対して,

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y), \forall y \in E\}$$

を対応させる, E から E^* への多価写像 ∂f を f の劣微分 (subdifferential) という. 劣微分 $\partial f \subset E \times E^*$ は極大単調作用素になる ([20, 21] を参照). 関数 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ が強コアシブ (strongly coercive) であるとは $\lim_n \|z_n\| = \infty$ を満たす E の数列 $\{z_n\}$ に対して $\lim_n g(z_n)/\|z_n\| = \infty$ が

成り立つときをいう。また、有界集合上で有界 (bounded on bounded sets) であるとは、 E の任意の有界集合 U に対し、 $g(U)$ が有界となるときという。 $p \in (1, \infty)$ とする。任意の E の元 x に対して、 $g(x) = \|x\|^p/p$ とするとき、 $\partial g = J_p$ である。下半連続な真凸関数 $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ に対し、 E^* 上の関数 f^* を、 E^* の任意の元 x^* に対して

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}$$

で定義する。このとき、 f^* を f の共役関数 (conjugate function) という。任意の E の元 x と E^* の元 x^* に対して、 $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$ が成立する。また、 $(x, x^*) \in \partial f$ であることと

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

となることは同値である。さらに $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とするとき、 $f^* : E^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ は汎弱下半連続な真凸関数となる ([17, 23] を参照)。

3. プレグマン距離とプレグマン関数

E をバナッハ空間とし、 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数とする。このとき E の元 x における g の E の元 y の方向微分 (directional derivative) を

$$d^+g(x)(y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(x+ty) - g(x)}{t}.$$

で定義する。関数 g が E の元 x でガトー微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは、 $d^+g(x)$ が E^* の要素になるときをいう。この場合、 $d^+g(x) = \nabla g(x)$ と表記される。同様に、関数 g が E の元 x でフレッシュエ微分可能 (Fréchet differentiable) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $\|x - y\| \leq \delta$ ならば

$$|g(y) - g(x) - \langle y - x, \nabla g(x) \rangle| \leq \varepsilon \|y - x\|.$$

が成り立つときをいう。関数 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ が単にガトー微分可能 (または、フレッシュエ微分可能) であるとは E の任意の元に対して、ガトー微分可能 (または、フレッシュエ微分可能) であるときをいう。連続な凸関数 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ がガトー微分可能ならば、 ∇g は連続となる。ただし、 E の位相はノルム位相であり E^* の位相は汎弱位相である。このとき、 $\partial g = \nabla g$ である。さらに、 g がフレッシュエ微分可能であれば g は連続となる。ただし、 E, E^* の位相はノルム位相である。

E をバナッハ空間とし、 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ をガトー微分可能な凸関数とする。このとき、関数 g から定まるプレグマン距離 (Bregman distance) とは、任意の E の元 x, y に対して、

$$D_g(x, y) = g(x) - g(y) - \langle x - y, \nabla g(y) \rangle$$

で定義される ([1, 3] を参照)。このとき、任意の E の元 x, y に対して $D_g(x, y) \geq 0$ であることは明らかである。また、任意の E の元 y に対して $D_g(\cdot, y)$ は凸関数である。

定義 3.1. E をバナッハ空間とする。このとき、関数 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ がプレグマン関数 (Bregman function) であるとは、次の 2 つの条件が成り立つときをいう。

- (1) g はガトー微分可能で連続な狭義凸関数である;
- (2) 任意の E の元 x と $r > 0$ に対して、集合 $\{y \in E : D_g(x, y) \leq r\}$ は有界となる。

E をバナッハ空間とし、 E の閉単位球 (closed unit ball) 及び単位球面 (unit sphere) を順に、 B 及び S で表す。また、任意の $r > 0$ に対し、 $rB = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ とする。このとき、関数 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ が有界集合上で一様凸 (uniformly convex on bounded sets) であるとは、任意の $r, t > 0$ に対し $\rho_r(t) > 0$ となることである。ただし、関数 $\rho_r : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は、任意の $t \geq 0$ に対して

$$\rho_r(t) = \inf_{x, y \in rB, \|x-y\|=t, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha g(x) + (1-\alpha)g(y) - g(\alpha x + (1-\alpha)y)}{\alpha(1-\alpha)}$$

で定義される ([24] を参照). このとき, ρ_r は非減少関数 (nondecreasing function) である. 同様に, 関数 g が有界集合上で一様滑らか (uniformly smooth on bounded sets) であるとは, 任意の $r > 0$ に対して, $\lim_{t \downarrow 0} \sigma_r/t = 0$ となることである. ただし, 関数 $\sigma_r : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\sigma_r(t) = \inf_{x \in rB, y \in S, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha g(\alpha x + (1-\alpha)ty) + (1-\alpha)g(x - \alpha ty) - g(x)}{\alpha(1-\alpha)}$$

で定義される ([24] を参照). これらに関して次の結果が知られている.

定理 3.2 ([24]). E をバナッハ空間とし, $p \in (1, \infty)$ とする. $g = \|\cdot\|^p/p$ とすると, 次が成立する.

- (1) E が一様凸であることの必要十分条件は g が有界集合上で一様凸となることである;
- (2) E が一様滑らかであることの必要十分条件は g が有界集合上で一様滑らかとなることである.

4. プレグマン準非拡大写像

C をバナッハ空間 E の空でない集合とし, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ をガトー微分可能な凸関数とする. C から C への写像 T がプレグマン準非拡大型写像 (Bregman generalized nonexpansive type mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$D_g(Tx, Ty) + D_g(Ty, Tx) \leq D_g(x, Ty) + D_g(y, Tx)$$

が成り立つことと定義する [9, 16]. 同様に, T がプレグマン準非拡大写像 (Bregman generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して

$$D_g(Tx, p) \leq D_g(x, p)$$

が成り立つことと定義する [7, 16]. C の元 p がプレグマン準漸近的不動点 (Bregman generalized asymptotic fixed point) であるとは $\nabla g(x_n)$ が $\nabla g(p)$ に汎弱位相の意味で収束し $\lim_n (\nabla g(x_n) - \nabla g(Tx_n)) = 0$ を満たす C の点列 $\{x_n\}$ が存在することと定義する [10, 16]. このとき, T のプレグマン準漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. C をバナッハ空間 E の空でない集合とする. このとき, E から C への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から C への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の C の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている ([15, 16] を参照).

補助定理 4.1 ([16]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなプレグマン関数とする. C を E の空でない閉集合とし, R を E から C の上への射影とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

- (1) R はサニーかつプレグマン準非拡大写像;
- (2) 任意の E の元 x と C の元 y に対して, $\langle x - Rx, \nabla g(Rx) - \nabla g(y) \rangle \geq 0$ が成り立つ.

E を回帰的なバナッハ空間とし, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなプレグマン関数とする. もし, E から C の上へのサニープレグマン準非拡大射影 (sunny Bregman generalized nonexpansive retraction) が存在すれば一意に定まる ([6, 7, 16] を参照). このときサニープレグマン準非拡大射影は R_C で記述される. C を E の空でない集合とする. このとき, C が E のサニープレグマン準非拡大レトラクト (sunny Bregman generalized nonexpansive retract) であるとは, E から C の上へのサニープレグマン準非拡大射影が存在するときと定義する. サニープレグマン

準非拡大射影の不動点集合はもちろん C である ([6, 7, 16] を参照). これらに関して次の結果が知られている ([15, 16] を参照).

定理 4.2 ([16]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなブレグマン関数で, 有界集合上で有界であり一様凸及び一様滑らかになるものとする. C を E の閉集合とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

- (1) C は E のサニーブレグマン準非拡大レトラクトである;
- (2) $\nabla g C$ は閉凸集合である.

補助定理 4.3 ([16]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなブレグマン関数で, 有界集合上で有界であり一様凸及び一様滑らかになるものとする. C を E の閉集合で, $\nabla g C$ は閉凸集合であるとし, T を C から C への写像とする. このときの次のことが成立する.

- (1) T がブレグマン準非拡大写像ならば, $F(T)$ は閉集合で, $\nabla g F(T)$ 閉凸集合である. さらに, $F(T)$ は E のサニーブレグマン準非拡大レトラクトである;
- (2) T がブレグマン準非拡大写像でかつ $F(T)$ が空でないならば, T はブレグマン準非拡大写像でかつ $F(T) = \tilde{F}(T)$ を満たす.

5. MANN 型の不動点近似法

本節では Mann 型の不動点近似法を議論する. まずはじめに主結果を得るために, 次の補助定理が必要である ([5] を参照).

補助定理 5.1 ([5]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなブレグマン関数で, 有界集合上で有界であり一様凸及び一様滑らかになるものとする. C を E の閉集合で, $\nabla g C$ は閉凸集合であるとし, C から C への写像 T をブレグマン準非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の実数列とする. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 = x$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = R_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n)$$

とする. このとき, 点列 $\{R_{F(T)} x_n\}$ は $F(T)$ の元へ強収束する.

補助定理 5.1 を利用することで, ブレグマン準非拡大写像に関する Mann 型の不動点近似法を用いた次の弱収束定理を得る (証明は [5] を参照).

定理 5.2 ([5]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなブレグマン関数で, 有界集合上で有界であり一様凸及び一様滑らかになるものとする. C を E の閉集合で, $\nabla g C$ は閉凸集合であるとし, C から C への写像 T をブレグマン準非拡大写像で $F(T) = \tilde{F}(T)$ を満たすものとする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の実数列とする. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 = x$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = R_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n)$$

とする. このとき, ∇g が弱点列連続ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $\lim_n R_{F(T)} x_n$ へ弱収束する.

定理 5.2 の直接的な結果として以下の結果を得ることができる.

定理 5.3 ([5]). E を回帰的なバナッハ空間とし, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ を強コアシブなブレグマン関数で, 有界集合上で有界であり一様凸及び一様滑らかになるものとする. C を E の閉集合で, $\nabla g C$ は閉凸集合であるとし, C から C への写像 T をブレグマン準非拡大写像で $F(T)$ が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の実数列とする. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 = x$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = R_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n)$$

とする. このとき, ∇g が弱点列連続ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $\lim_n R_{F(T)} x_n$ へ弱収束する.

定理 5.4 ([5]). E を一様滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $p \in (1, \infty)$ および $g = \|\cdot\|^p/p$ とする. C を E の閉集合で, $J_p C$ は閉凸集合であるとし, C から C への写像 T をブレグマン準非拡大写像で $F(T) = \tilde{F}(T)$ を満たすものとする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の実数列とする. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 = x$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = R_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n)$$

とする. このとき, J_p が弱点列連続ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $\lim_n R_{F(T)}x_n \rightarrow$ 弱収束する.

定理 5.5 ([5]). E を一様滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $p \in (1, \infty)$ および $g = \|\cdot\|^p/p$ とする. C を E の閉集合で, $J_p C$ は閉凸集合であるとし, C から C への写像 T をブレグマン準非拡大写像で $F(T)$ を空でないとする. $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の実数列とする. x を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $x_1 = x$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$x_{n+1} = R_C(\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n)$$

とする. このとき, J_p が弱点列連続ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $\lim_n R_{F(T)}x_n \rightarrow$ 弱収束する.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 24740075 の助成を受けたものです.

REFERENCES

- [1] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*, USSR Comput. Math. Math. Phys. 7 (1967), 200-217.
- [2] D. Butnariu and A. N. Iusem, *Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [3] Y. Censor and A. Lent, *An iterative row-action method for interval convex programming*, J. Optim. Theory Appl. 34 (1981), 321-353.
- [4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [5] T. Ibaraki, *Weak convergence theorems for Bregman generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, in Banach and Function Spaces IV, Yokohama Publishers, 2014, 289-302.
- [6] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 1484 (2006), 150-160.
- [7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory 149 (2007), 1-14.
- [8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. 11 (2007), 929-944.
- [9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 10 (2009), 21-32.
- [10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemp. Math., 513, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169-180.
- [11] F. Kohsaka, *Existence of Fixed Points of Nonspreading Mappings with Bregman Distances*, Nonlinear Mathematics for Uncertainty and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, 100, Springer, 2011, 403-410.
- [12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Proximal point algorithms with Bregman functions in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 6 (2005), 505-523.
- [13] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506-510.
- [14] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, Fixed Point Theory Appl., 2004 (2004), 37-47.
- [15] V. Martín-Márquez, S. Reich and S. Sabach, *Right Bregman nonexpansive operators in Banach spaces*, Nonlinear Anal. 75 (2012), 5448-5465.
- [16] E. Naraghirad, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Generalized retraction and fixed point theorems using Bregman functions in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 13 (2012), 141-156.
- [17] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, 1364, Springer-Verlag, 1989.

- [18] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.
- [19] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.
- [20] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.
- [21] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.
- [22] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
- [23] 高橋涉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.
- [24] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge NJ, 2002.