数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 212-217

局所 Lipschitz 制約付き凸最適化問題における制約想定について

島根大学大学院総合理工学研究科　山本　俊輔 (SHUNSUKE YAMAMOTO)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科　黒岩　大史 (DAISHI KUROIWA)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University, Shimane University

概要

本講究録では，局所 Lipschitz 制約付き凸最適化問題における過去の結果([2]) について紹介し，[4] において示した研究結果について述べる。

1　紹介

本講究録では，以下の凸計画問題について考える：

$$(P)\begin{cases} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条件} & x \in S, \end{cases}$$

ただし，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数，$S \subseteq \mathbb{R}^n$ は空でない凸集合で

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$$

のように与えられると仮定する。ただし，I は有限集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($i \in I$) は局所 Lipschitz 関数，任意の $x \in S$ と $i \in I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ に対して，g_i は x において regular であるとする。通常の凸最適化では，制約関数 g_i は凸関数であることを仮定している。しかしながら，本講究録では g_i が局所 Lipschitz 関数であるような問題を扱う。

数理最適化問題に対して，最適解や双対定理を考察する際に重要となるのが制約想定である。一般に，制約想定は制約関数に関する仮定であり，劣微分などを用いて表現した条件（KKT 条件など）が最適性の必要条件となることを保証するための技術的な仮定である。制約想定の研究は凸最適化理論の発展に直結しているため，多くの数学者たちによって研究がなされてきた。制約想定が弱いほど条件を満たす制約関数が増えるため，より弱い制約想定を見つける研究が行われて

きた。2008 年，Basic Constraint Qualification (BCQ) という制約想定が，凸制約付き凸最適化問題において解の最適性に関する必要十分な制約想定であることが [3] において，Li，Ng，Pong によって示された。

2013 年，凸制約集合 S が局所 Lipschitz 関数によって表現される場合の凸最適化問題が [2] で議論され，制約想定の一つが Dutta と Lalitha によって紹介された。最近，[4] において，この場合の凸最適化問題におけるいくつかの制約想定の研究が行われた。

本講究録では，主に [4] の結果と適用例について紹介する。第 2 章では準備として，凸解析に関する基本的な概念と，過去の結果について述べる。第 3 章では，最適化問題 (P) における制約想定に関する [4] の結果について紹介する。

2 準備

g を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数とする。g が局所 Lipschitz 関数であるとは，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある $M > 0$ と $r > 0$ が存在して，任意の $y, z \in B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$ に対して，$|g(y) - g(z)| \leq M\|y - z\|$ となることをいう。g を局所 Lipschitz 関数とするとき，g の $x \in \mathbb{R}^n$ における方向 $d \in \mathbb{R}^n$ の Clarke 方向微分 $g^\circ(x,d)$ を以下のように定義する。

$$g^\circ(x,d) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{g(y+td) - g(y)}{t}.$$

関数 g の x における Clarke 劣微分 $\partial^\circ g(x)$ を以下のように定義する。

$$\partial^\circ g(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, d \rangle \leq g^\circ(x,d), \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

なお $\langle \xi, d \rangle$ は二つのベクトル ξ と d の内積である。集合 $\partial^\circ g(x)$ は $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト凸集合である。さらに，Clarke 方向微分は Clarke 劣微分の支持関数であり，以下のように表現できる。

$$g^\circ(x,d) = \max_{\xi \in \partial^\circ g(x)} \langle \xi, d \rangle.$$

関数 g が凸関数，すなわち以下の条件

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in (0,1), g((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)g(x) + \alpha g(y),$$

が成り立つとき，g は局所 Lipschitz 関数であり，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$g^\circ(x,\cdot) = g'(x,\cdot)$，$\partial^\circ g(x) = \partial g(x)$ である。ただし，$g'(x,d)$ と $\partial g(x)$ は次で定義される。

$$g'(x,d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(x+td) - g(x)}{t},$$

$$\partial g(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, d\rangle \leq g'(x,d), \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

前の条件 $g^\circ(x,\cdot) = g'(x,\cdot)$ が成り立つとき，g を x において regular であるという([1])。

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ の閉包，内部，錐包，凸包をそれぞれ $\mathrm{cl}\, C$，$\mathrm{int}\, C$，$\mathrm{cone}\, C$，$\mathrm{co}\, C$ と表記する。C の極錐 C^- を以下のように定義する。

$$C^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

C^- は閉凸錐であり，以下のことが知られている。

$$C^{--} = (C^-)^- = \mathrm{cl}\,\mathrm{cone}\,\mathrm{co}\, C.$$

任意の $x \in C$ に対して，C の x における接錐 $T_C(x)$ を以下のように定義する。

$$T_C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\{(x_k, \alpha_k)\} \subseteq C \times \mathbb{R}_+ \text{ s.t. } x_k \to x, \alpha_k(x_k - x) \to y\},$$

ただし，$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ とする。集合 $T_C(\bar{x})$ は閉錐であることが知られている。C の x における法線錐 $N_C(x)$ を $N_C(x) = (T_C(x))^-$ で定義する。C が凸集合のとき，以下のことが知られている。

$$T_C(x) = \mathrm{cl}\,\mathrm{cone}\,(C - x) = N_C(x)^-,$$

$$N_C(x) = (C - x)^- = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in C\}.$$

次の定理は [2] において Dutta と Lalitha が示したものである。

定理 2.1. ([2]) I：有限集合, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i \in I)$ は局所 Lipschitz 関数，$\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ とする。さらに，S が凸集合，全ての g_i は $\bar{x}$ において regular であり，以下の二条件が成り立つと仮定する。

(a) ある $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して，$g_i(x_0) < 0$，

(b) 任意の $i \in I(\bar{x})$ に対して，$0 \notin \partial^\circ g_i(\bar{x})$.

このとき，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，次の (i) と (ii) は同値:

(i) 任意の $x \in S$ に対して，$f(\bar{x}) \leq f(x)$，

(ii) ある $\lambda \in \mathbb{R}^I_+$ が存在して，$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} \lambda_i \partial^\circ g_i(\bar{x})$ かつ任意の $i \in I$ に対して，$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$.

本稿では，定理 2.1 の拡張としていくつかの制約想定の紹介を行う。

3　制約想定

本論文では，我々は以下の凸最適化問題を考える:

$$(P)\begin{cases} \text{最小化}\ f(x) \\ \text{条件}\ x \in S, \end{cases}$$

ただし，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数，制約集合 S は凸集合で，

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i \in I\}$$

のように与えられると仮定する。ただし，I は有限集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i \in I)$ は局所 Lipschitz 関数である。また，任意の $x \in S$，$i \in I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ に対して，g_i は x において regular であると仮定する。

次に，以下の条件を考える。

(A) $N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial^\circ g_i(\bar{x})$，

(B) $T_S(\bar{x}) = \bigcap_{i\in I(\bar{x})}(\partial^\circ g_i(\bar{x})^-)$ かつ $\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial^\circ g_i(\bar{x})$ は閉，

(C) ある $y_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して，任意の $i \in I(\bar{x})$，$\xi_i \in \partial^\circ g_i(\bar{x})$ に対して，$\langle \xi_i, y_0\rangle < 0,$

(D) $0 \notin \operatorname{co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial^\circ g_i(\bar{x})$，

(E) $\operatorname{int} S \neq \emptyset$ かつ任意の $\forall i \in I(\bar{x})$ に対して，$0 \notin \partial^\circ g_i(\bar{x})$，

(F) 以下の二条件が成立する。

　(a) ある $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して， 任意の $i \in I$ に対して，$g_i(x_0) < 0$，

　(b) 任意の $i \in I(\bar{x})$ に対して，$0 \notin \partial^\circ g_i(\bar{x})$.

(G) 任意の $y_i \in \partial^\circ g_i(\bar{x})$ $(i \in I(\bar{x}))$ に対して，$\{y_i\}_{i\in I(\bar{x})}$ は一次独立。

注意 3.1. 全ての g_i が凸関数，(A) は以下の Basic constraint qualification (BCQ) と呼ばれる条件と同値となる。

$$N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone}\operatorname{co}{}_{i\in I(\bar{x})}\partial g_i(\bar{x}),$$

全ての g_i が $\bar{x}$ において連続的微分可能であるとき，(A) は以下の Guignard 制約想定と呼ばれる条件と同値となる。

$$\operatorname{cl}\operatorname{co} T_S(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(\bar{x}), x\rangle \leq 0, \forall i \in I(\bar{x})\},$$

(B) は以下の Abadie 制約想定と呼ばれる条件と同値となる。

$$T_S(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(\bar{x}), x\rangle \leq 0, \forall i \in I(\bar{x})\},$$

(C) は以下の Cottle 制約想定と呼ばれる条件と同値となる。

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \forall i \in I(\bar{x}) \langle \nabla g_i(\bar{x}), y_0 \rangle < 0,$$

(G) は以下の一次独立制約想定と呼ばれる条件と同値となる。

$$\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})} \text{は一次独立。}$$

(F) は定理 2.1 で紹介された制約想定である。(D) と (E) はそれぞれ (C) と (F) をヒントに考えたものである。

以下の定理は (A) から (F) の関係について述べたものである。

定理 3.1. ([4]) $\bar{x} \in S$ とするとき，

- (C) 成立ならば (A) も成立，
- (C)，(D)，(E)，(F) は同値，
- (G) 成立ならば (F) も成立，
- (F) 成立ならば Slater 条件が成立。すなわち，ある $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して，$g_i(x_0) < 0$.

以下の定理は (A) と (B) が本講究録の問題 (P) において解の最適性に関する必要十分な制約想定であることを述べたものである。

定理 3.2. $\bar{x} \in S$ とするとき，次の (A)，(B)，(O) は同値:

(A) $N_S(\bar{x}) = \operatorname{cone} \operatorname{co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial^\circ g_i(\bar{x})$，

(B) $T_S(\bar{x}) = \bigcap_{i \in I(\bar{x})} (\partial^\circ g_i(\bar{x})^-)$ かつ $\operatorname{cone} \operatorname{co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial^\circ g_i(\bar{x})$ は閉，

(O) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，次の (i) と (ii) は同値:

  (i) 任意の $x \in S$ に対して，$f(\bar{x}) \leq f(x)$，

  (ii) ある $\lambda \in \mathbb{R}^I_+$ が存在して，$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial^\circ g_i(\bar{x})$ かつ任意の $i \in I$ に対して，$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$.

最後に，g_i がすべて凸関数の場合，Slater 条件は制約想定であることが知られているが本講究録の問題 (P) においては制約想定とはならない。その根拠となる例を紹介する。

例 3.1. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を以下のように定義された関数とする。

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{if} \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0, \\ \|(x_1, x_2)\| + x_2 & \text{if} \quad x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ -x_1 x_2 & \text{if} \quad x_1 \leq 0, x_2 < 0, \\ \|(x_1, x_2)\| + x_1 & \text{if} \quad x_1 > 0, x_2 \leq 0. \end{cases}$$

このとき，$S = -\mathbb{R}^2_+$，S は凸集合，$g(0) = 0$，g は 0 において regular であり，Slater 条件が成立。一方で，$N_S(0) = \mathbb{R}^2_+$，$\mathrm{cone}\,\partial^\circ g(0) = \{0\} \cup \mathrm{int}\,\mathbb{R}^2_+$. したがって，(A) 不成立。(A) が必要十分な制約想定であるため例 3.1 より，Slater 条件は制約想定とはならない。

参考文献

[1] F. H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, New York (1983)

[2] J. Dutta and C. S. Lalitha, Optimality conditions in convex optimization revisited. Optim. Lett. 7, 221–229 (2013)

[3] Li, C., Ng, K. F., Pong, T. ,K.: Constraint qualifications for convex inequality system with applications in constrained optimization. SIAM J. Optim. 19,

[4] S. Yamamoto and D. Kuroiwa, Constraint qualifications for KKT optimality condition in convex optimization with locally Lipschitz inequality constraints, preprint