数理解析研究所講究録
第1965巻 2015年 5-12

On orbifold constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 associated to inner automorphisms

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@m.tohoku.ac.jp

本稿では中央研究院(台湾)の C.H. Lam 氏と筆者の最近の共同研究 [LS] の解説を行う. 研究の背景等は [島倉 14] などを参照にされたい.

1 序

最終的な目標は次の解決である.

問題 1.1. 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数 (VOA) [1]を分類せよ.

(CFT 型の) VOA の重さ 1 の空間 V^1 にはリー代数構造が入り, [DM04b] より半単純, 可換, 0 のいずれかになる. 半単純の時には VOA 上でアファイン表現を与える. したがって, VOA からレベル付のリー代数が得られる事になる. さらに C_2-有限性からレベルは正の整数となる ([DM06]). そして, V_1 のリー代数の可能性が Schellekens によって与えられいる.

定理 1.2. [Sc93, EMS] 中心電荷 24 の正則 VOA V に対して, V_1 の (レベル付) リー代数構造は 71 通り[2]のいずれかとなる.[3]

この結果を基にすると, 問題 1.1 は次のように書き換えられる.

問題 1.3. $\mathfrak{g}$ を Schellekens のリスト ([Sc93]) の 71 個のリー代数の内の一つとする.

(1) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるような中心電荷 24 の正則 VOA V を構成せよ.

[1]本稿では有理的, C_2-有限, CFT 型も仮定している. 正則から, 単純及び自己双対となる.
[2][Sc93] では具体的に 71 個のリー代数のリストが与えられている.
[3]J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer によって数学的な証明が与えられたとのアナウンス [EMS] があったが, この原稿の執筆時点では論文 (プレプリント) がでていないため, 証明は未確認である.

(2) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となる中心電荷 24 の正則 VOA V の一意性を証明せよ.

以下, (1) と (2) についての現状と関連する我々の結果を述べる.

1.1 問題 1.3 (1) (構成) について

Niemeier 格子の分類と同じような手法を考えると, リー代数が生成する affine VOA の拡大として中心電荷 24 の正則 VOA を構成すれば良いことになる. 指標は分かっている[4]ため, どのような VOA の部分加群の可能性がおおよそわかる. しかしながら, affine VOA の既約加群は (一般には) 単純カレントではないため, 仮に部分加群の候補が分かったとしても, 全体として VOA 構造が (一意的に) 入るかどうかは分からない.

そこで, 現状では $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法を用いて正則 VOA を構成する手法が取られている. 以下, 大まかに手順を述べる.

(1) V を正則 VOA, g を位数が素数 p である自己同型とする.

(2) $V^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$ は V の部分 VOA となる.

(3) 各 $1 \le i \le p-1$ に対して, 既約 g^i-twisted V-加群 $V(g^i)$ が一意的に存在する ([DLM00]).

(4) $V(g^i)_{\mathbb{Z}}$ を $V(g^i)$ の整数重みの部分空間とすると, これは V^g-加群となる.

(5) $\tilde{V} := V^g \oplus \bigoplus_{i=1}^{p-1} V(g^i)_{\mathbb{Z}}$ とすると, V^g-加群である.

(6) (ある種の仮定[5]の下で) $\tilde{V}$ は正則 VOA となり, V^g の単純カレント拡大となる.

現在のところ, 次の設定で $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法が確立されている.

(a) 正則格子 VOA と格子の自己同型 -1 の持ち上げ θ ([FLM88, DGM96])

(b) 正則枠付 VOA と (位数 2 の) 枠固定自己同型 ([LY08])

(c) 正則格子 VOA V_L と位数 3 の自己同型 σ で rank $L^\sigma \in 6\mathbb{Z}$ を満たす ([Mi13])[6]

注意 1.4. 正則 VOA と位数 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ の自己同型に関する $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法の一般論が確立されたとアナウンスされている ([EMS]).

これらの $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法を用いて, 以下のように中心電荷 24 の正則 VOA が構成されている.

---

[4] [Ka90] から affine VOA の既約加群の指標が求められ, 中心電荷 24 の正則 VOA の指標は (定数項を除いて) j-関数である.

[5] 例えば, g の選び方によっては, $V(g^i)_{\mathbb{Z}} = \{0\}$ となることもある.

[6] [Mi13] の手法を使えば, V_L と位数 2 の自己同型に関する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法は簡単にできると思われる.

- 24 (計 24): 正則格子 VOA V_L ([Bo86, FLM88, Do93]).
- 15 (計 39): V_L と θ に関する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法 ([FLM88, DGM96, ADL05]).
- 17 (計 56): 枠付正則 VOA ([La11, LS12]) [7].
- 3 (計 59): V_L に関する $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成法 ([Mi13, SS15+]).
- 2 (?) (計 $59+2(?)$): V_L に関する $\mathbb{Z}_4$-, $\mathbb{Z}_5$-軌道体構成法 ([EMS]).[8]

今回, 次の設定で $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法が行えることを確認した.

(4) 正則 VOA V と位数 2 の内部自己同型[9].

そして, その応用として, 次のような中心電荷 24 の正則 VOA の構成を行った.

定理 1.5. (i) リー代数 $D_{7,3}A_{3,1}G_{2,1}$, $E_{7,3}A_{5,1}$, $A_{8,3}A_{2,1}^2$ を持つ新しい中心電荷 24 の正則 VOA が存在する.[10]

(ii) もしリー代数 $C_{5,3}G_{2,2}A_{1,1}$ を持つ中心電荷 24 の正則 VOA が存在するならば, リー代数 $A_{5,6}C_{2,3}A_{1,2}$ を持つ中心電荷 24 の正則 VOA が存在する.

(iii) もしリー代数 $A_{4,5}^2$ 持つ中心電荷 24 の正則 VOA が $V_{N(A_4^6)}$ に $\mathbb{Z}_5$-軌道体構成法を用いて構成されるならば[11], リー代数 $D_{6,5}A_{1,1}^2$ を持つ中心電荷 24 の正則 VOA が存在する.

その結果, 現在のところ $62+2(?)+2(\triangle)$ 個の中心電荷 24 の正則 VOA が構成されたことになる. ここで, $(\triangle)$ は他の存在を仮定しているものである. したがって, 問題 1.3 (1) の解決のためには次を行えば良いことになる.

問題 1.6. 残りの 5 個のリー代数 $C_{4,10}$, $D_{4,12}A_{2,6}$, $A_{6,7}$, $F_{4,6}A_{2,2}$, $C_{5,3}G_{2,2}A_{1,1}$ を持つ中心電荷 24 の正則 VOA を構成せよ.

1.2 問題 1.3 (2) (一意性) について

一意性については, 構成に比べると研究が進んでいない. その一つの理由は大問題であるムーンシャイン予想を含むからだと思われる.

予想 1.7. [FLM88] 中心電荷 24 の正則 VOA V が $V_1=0$ を満たすならば, V はムーンシャイン VOA $V^\natural$ と同型.

[7] $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法 (b) で出来る全てのリー代数を判別した.
[8] アナウンスがあったが, プレプリントは未発表なので (?) とした.
[9] もちろん, ある種の条件は必要.
[10] 実際には $V_{N(E_6^4)} \overset{\mathbb{Z}_3}{\rightsquigarrow} E_{6,3}G_{2,1}^3 \overset{Inner}{\rightsquigarrow} D_{7,3}A_{3,1}G_{2,1} \overset{Inner}{\rightsquigarrow} E_{7,3}A_{5,1} \overset{Inner}{\rightsquigarrow} A_{8,3}A_{2,1}^2$ という手順で構成した.
[11] 具体的な構成を一つ固定して証明している.

ムーンシャイン予想の弱い版を含めた中心電荷 24 の正則 VOA の一意性に関する知られている結果をまとめておく.

- rank $V_1 = 24$ ならば V は格子 VOA と同型 [DM04a]
- $V_1 = 0$ かつ V_2 が $V_2^\natural$ と代数として同型ならば, $V \cong V^\natural$ ([DGL07]).
- $V_1 = 0$ かつ V が枠付ならば $V \cong V^\natural$ ([LY07]).
- V が枠付ならば V の構造は V_1 から一意に決まる ([LS15+]).[12]

2 内部自己同型と $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法

定義 2.1. V を CFT 型の VOA とする. $h \in V_1$ に対して $\sigma_h = \exp(2\pi\sqrt{-1}h_{(0)})$ を**内部自己同型**という.[13]

ここで σ_h の位数を有限とする. 既約 (untwisted) V-加群 M から Δ-作用素を用いて既約 σ_h-twisted V-加群 $M^{(h)}$ が "具体的[14]に" 構成できる ([Li96]).

V を正則 VOA とし, $\mathfrak{H}$ を V_1 のカルタン部分代数とする. $h \in \mathfrak{H}$ とし, $|\sigma_h| = 2$, $\langle h|h\rangle \in \mathbb{Z}$ とする. $\tilde{V} = V^{\sigma_h} \oplus (V^{(h)})_{\mathbb{Z}}$ と置く. $\tilde{V}$ が VOA となることの証明は [DLM96] から従う. 今回与えた $\tilde{V}$ が CFT 型となるための十分条件 (1)–(3) は次の通りである.

(1) $V_1 = \bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{g}_i$ が半単純であり, $\langle V_1\rangle_{VOA}$ が full subVOA となる[15]

(2) $\sigma_h \neq 1$ on V_1;

(3) $(h|\alpha) \geq -1$ for $\forall$ root α of V_1;

さらに, $\mathfrak{H}$ が $\tilde{V}_1$ がカルタン部分代数となるための十分条件として次を得た.

(4) $-\sum_{i=1}^t k_i h_i$ が V の $\mathfrak{H}$ に関するウェイトでない. ただし, h_i は h の $\mathfrak{g}_i$ への射影であり, k_i は $\mathfrak{g}_i$ のレベルである.

また, [Mi13] と同じ議論で, $\tilde{V}$ が V^{σ_h} の単純カレント拡大であり, 正則, C_2-有限などの性質も証明できる. まとめると, 次の定理を得る.

---

[12] V, V' が中心電荷 24 の枠付正則 VOA で $V_1 \cong V_1'$ ならば $V \cong V'$ の意味である.

[13] 後々の便利のために正規化している.

[14] $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法を行ってリー代数を決める際に "具体的に" 構成されているかどうかは重要である. 実際に V が正則の場合には [DLM00] によって, 一意的に既約 σ_h-twisted 加群が存在することはわかるが, 具体的な計算を行うことが出来ない.

[15] $\langle V_1\rangle$ は単純アファイン VOA となるが, その共形元が V の共形元と一致する. この仮定は V の中心電荷が 24 ならば成立する ([DM04b]).

定理 2.2. V を正則 VOA, $\mathfrak{H}$ を V_1 のカルタン部分代数とする. $h \in \mathfrak{H}$ とし, $|\sigma_h| = 2$, $\langle h|h\rangle \in \mathbb{Z}$ とする. (1), (2), (3), (4) が成立すると仮定する. すると $\tilde{V} = V^{\sigma_h} \oplus (V^{(h)})_{\mathbb{Z}}$ は正則, C_2-有限で CFT 型の VOA であり, V^{σ_h} の単純カレント拡大となっている. さらに $\mathfrak{H}$ は $\tilde{V}_1$ のカルタン部分代数となる.

目的のリー代数を得るために, V と h を “上手く”選ぶ必要がある.[16]

3 リー代数構造の決定

正則 VOA を構成した後に, リー代数構造を決定し, 新しい正則 VOA となることを証明する必要がある. 今回, そのために大きく二つの道具を用いた. その一つは $\dim \tilde{V}_1$ を求めるための次元公式であり, もう一つはアファインリー代数の表現論である.

3.1 次元公式

V を中心電荷 24 の正則 VOA, $g \in \mathrm{Aut}V$ を位数 2 とする. $V(g)$ を既約 g-twisted V-加群とし, $\tilde{V} := V^g \oplus V(g)_{\mathbb{Z}}$ と置く. 加群 W に対して

$$Z_W(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Q}} \dim W_n q^{n-1}, \quad Z_V(g,\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}\ g_{|V_n} q^{n-1}$$

と置き, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ ($\tau \in \mathbb{H}$) として $\mathbb{H}$ 上の関数と見る ([Zh96]).

定理 3.1. (cf. [Mo94]) $Z_{V(g)}(\tau) \in q^{-1/2}\mathbb{Z}[[q^{1/2}]]$ (†) と $Z_V(g, S\tau) = Z_{V(g)}(\tau)$ (‡) を仮定する. ただし $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. すると

$$\dim V_1 + \dim \tilde{V}_1 = 3\dim(V^g)_1 + 24(1 - \dim V(g)_{1/2}).$$

注意 3.2. g が内部自己同型の場合は仮定 (‡) が満たされることが [KM12] で示されている. さらに, $\tilde{V}$ が CFT 型になるように h を選べば (†) が満たされる.

[Mo94] にはこの公式が書かれてはいるが, より強い事を仮定して議論をしているように思われる. 今回は $\Gamma_0(2)$ の保型関数の性質を用いた証明を与えた. 証明の詳細は [LS12] を参照せよ.

さて, この公式から, $\dim \tilde{V}_1$ を求めるには, $V(g)_{1/2}$ の次元が分かれば良い. 今回の具体例では全て $V(g)_{1/2} = 0$ になる場合を考えている.

[16] 講演中では “どのように”選んだかについて私見に基づいて話をした.

3.2 具体例 ($D_{7,3}A_{3,1}G_{2,1}$ から $E_{7,3}A_{5,1}$)

V を中心電荷 24 の正則 VOA で, V_1 の構造が $D_{7,3}A_{3,1}G_{2,1}$ とする.

$$h := \frac{1}{2}(\Lambda_6 - \Lambda_7, 2\Lambda_1, \Lambda_2)$$

と置く.[17] ただし, Λ_i は基本ウェイトであり, ラベルの付け方は [LS12] を参照せよ. すると, $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法を適用するための仮定のうち, 次の (A) 以外を満たすことは簡単わかる. また, $(V^{\sigma_h})_1$ のリー代数構造は $D_{6,3}U(1)A_{3,1}A_{1,1}A_{1,3}$ であることも容易にわかる.

さて, まずは次の事を仮定して, リー代数構造が求める物になることを示す.

(A) $|\sigma_h| = 2$ on V;

(B) $V(\sigma_h)_{1/2} = 0$.

(A) より $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法が適用出来て, 中心電荷 24 の正則 VOA $\tilde{V}$ が得られる. V_1 のランクは (V_1 のランクと同じ) 12 である. (B) と次元公式から, $\dim \tilde{V}_1 = 168$ を得る. また, $\tilde{V}_1$ は半単純であり, 各単純イデアルは

$$\frac{h^\vee}{k} = \frac{\dim \tilde{V}_1 - 24}{24} = 6$$

を満たす ([DM04b]). ここで, $h^\vee$ は双対コクセター数であり, k はレベルである.

$\tilde{V}_1$ は $D_{6,3}$ という単純部分リー代数を含み, この部分代数は $\tilde{V}_1$ のウェイトベクトルで生成されている. したがって, $D_{6,3}$ を含む $\tilde{V}_1$ の単純イデアル $\mathfrak{a}$ が一意的に存在する. $D_{6,3}$ を含むことと $h^\vee/k = 6$ から, $\mathfrak{a}$ のレベルは 3 であり, 双対コクセター数は 18 となることがわかる. 故に, $\mathfrak{a}$ は $D_{10,3}$ か $E_{7,3}$ の可能性しかない. $D_{10,3}$ の時は次元が大きすぎるので, $\mathfrak{a}$ は $E_{7,3}$ とわかる.

同様に, $A_{3,1}$ を含む $\tilde{V}_1$ のイデアルを考えると, $A_{5,1}$ となることがわかる. したがって, $\tilde{V}_1$ は $E_{7,3}A_{5,1}$ というイデアルを含む. 次元を比較することでこのイデアルと $\tilde{V}_1$ が一致することがわかる.

後は仮定 (A), (B) を示せば良いが, ここで単純アファイン VOA の表現論を用いる. 具体的には, V に現れる $\langle V \rangle_{VOA}$-既約部分加群の可能性を次数の整数条件から絞り, 各可能性に対して $|\sigma_h| = 2$ となることと, σ_h-twisted 加群の次数 1/2 の空間が 0 になることを証明する. 実際には "大雑把な" 可能性の絞り込みしかしていないが, 幸運なことに今回の証明においてはこれで十分であった. ただし, $A_{4,5}^2$ から $D_{6,5}A_{1,1}^2$ を構成する際には不運にもこの議論が使えないため[18], 格子 VOA を用いた具体的な計算で証明を行った.

---

[17] h の取り方は一通りではない.

[18] $A_{4,5}^2$ の加群の数が多すぎて, この条件だけでは緩すぎるようだ.

4 まとめ

今回の内部自己同型に付随する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法を用いることで, 新たに 5 個のリー代数に関して構成または構成の目処をつける事が出来た. 問題 1.3 (1) の解決のためには残りの 5 個のリー代数に対して, それを持つ中心電荷 24 の正則 VOA を構成すれば良い. 今後の研究方針を大雑把に述べておく.

- 内部自己同型でない場合の $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法の研究
- $A_{6,7}$ を実現する新しい構成法.[19]

参考文献

[ADL05] T. Abe, C. Dong, and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebra $M(1)$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.

[Do93] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.

[DGL07] C. Dong, R.L. Griess and C.H. Lam, Uniqueness results for the moonshine vertex operator algebra, *Amer. J. Math.* **129** (2007), 583–609.

[DLM96] C. Dong, H. Li, and G. Mason, Simple Currents and Extensions of Vertex Operator Algebras, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 671-707.

[DLM00] C. Dong, H. Li, and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.

[DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.

[EMS] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, private communication.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[Ka90] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KM12] M. Krauel and G. Mason, Vertex operator algebras and weak Jacobi forms, *Internat. J. Math.* **23** (2012), 1250024, 10 pp.

[La11] C.H Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198

[19] $A_{6,7}$ は $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を繰り返し適用しても得られないと考えている.

[LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.

[LS15+] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, to appear in *Amer. J. Math.*, arXiv:1209.4677.

[LS] C.H. Lam and H. Shimakura, Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, preprint, arXiv:1501.05094.

[LY07] C.H. Lam and H. Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, Art. ID rnm003, 10 pp.

[LY08] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 237–285.

[Li96] H. Li, Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules, *in* Moonshine, the Monster, and related topics, 203–236, *Contemp. Math.*, **193**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Mi13] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, *in* Symmetries, integrable systems and representations, 319–344, *Springer Proc. Math. Stat.* **40**, Springer, Heidelberg, 2013.

[Mo94] P.S. Montague, Orbifold constructions and the classification of self-dual $c = 24$ conformal field theories, *Nuclear Phys.* B **428** (1994), 233–258.

[SS15+] D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[島倉 14] 島倉裕樹, 中心電荷 24 の枠付頂点作用素代数について, 数理解析研究所講究録 **1872** (2014), 20–29.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.