数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 121-128

A relative upper bound for equiangular lines from Bachoc–Vallentin's SDP method

奥田 隆幸 *
(joint work with Wei-Hsuan Yu†)

Abstract

球面符号についての SDP-method (半正定値計画法) は Bachoc–Vallentin によって定式化された [J. Amer. Math. Soc. 2008]. 本報告では equiangular line system の濃度の上界について, Bachoc–Vallentin の SDP-method により得られた結果を紹介する. 特にその系として $n \geq 3$ のとき $(n-1)$ 次元球面上の tight design of hamonic index 4 が存在しないことを示す.

1 序

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の原点を通る直線の族[1]が *equiangular line system* であるとは, その族における任意の二直線の交わる角度が一定であることをいう. 特にその角度 θ を common angle という. 各実数 $\alpha \in [0,1)$ に対して, $M_\alpha(n)$ を $\mathbb{R}^n$ 内の equiangular line systems with the common angle $\theta = \arccos\alpha$ の濃度の最大値とする. この分野における最も大きな問題の一つは $M_\alpha(n)$ を決定することである. 特に本報告では $M_\alpha(n)$ の上から評価について考えたい. この分野の最近の進展がまとめられている文献として [5, 10] を挙げておく.

本報告では主結果として, (n, α) が特定の条件を満たす場合に $M_\alpha(n)$ の新しい上界を得たことを報告する (see Theorem 2.1). 主結果から得られる上界の例としては $M_{1/9}(228) \leq 3185$ などが挙げられる.

*広島大学大学院理学研究科数学専攻 (E-mail:okudatak@hiroshima-u.ac.jp)
†Department of Mathematics, Michigan State University

[1] 本報告の問題設定においてはどの二本も平行にならない直線の族について考えてもよいが, ここでは簡単のため全て原点を通るものとする.

本研究のモチベーションの一つは球面デザインの問題から来ている. Delsarte の LP-method (線形計画法) から

$$M_{\sqrt{3/(n+4)}}(n) \leq (n+1)(n+1)/6 \tag{1}$$

となることが示せるが, 坂内–奥田–田上 [6] では,

- $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} 上の tight spherical design of harmonic index 4 の存在,
- $\mathbb{R}^n$ 内の equiangular line system with the common angle arccos $\sqrt{3/(n+4)}$ で不等式 (1) の等号を達成するものの存在,

の二つが同値であることを示した.[2]

$n=2$ の場合には, 上記の不等式 (1) の等号を達成する $\mathbb{R}^2$ 内の equiangular line system with the common angle arccos $\sqrt{1/2}$ は簡単に構成できる. $n \geq 3$ のとき, 本報告で紹介する $M_{\sqrt{3/(n+4)}}(n)$ の上界は (1) よりもシャープなものになっており, 特に不等式 (1) の等号を達成するものは存在しないことが分かった.

Theorem 1.1. 各 $n \geq 3$ について,

$$\begin{aligned} M_{\sqrt{3/(n+4)}}(n) &\leq 2 + \frac{(n-2)}{6}(\sqrt{(n+4)/3}+1)^2 \\ &< (n+1)(n+1)/6. \end{aligned}$$

アソシエーションスキーム上の符号についての SDP-method は Schrijver [13] によって提唱された (see also [9]). 球面符号への SDP-method は Bachoc–Vallentin [1] により定式化され, 主に接吻数問題に対して優れた成果を挙げている ([2, 3, 12]). しかし多くのケースでは SDP-method を実行する際には膨大な計算が必要である. 今回の我々の結果は任意の $n \geq 3$ で $M_{\sqrt{3/(n+4)}}(n)$ の上界を与えるなど, 無限系列への SDP-method の適用に成功した例となっている. 特にその証明はある程度の量の手計算で追跡できるものになっていることを強調しておきたい.

[2]存在の同値性だけでなく, それらの間の対応があるが一対一対応ではない.

2 主結果

本報告では $M_\alpha(n)$ の上からの評価に興味がある．無限系列を含む形でこれまでに知られている $M_\alpha(n)$ の上界を以下に紹介する:

- Gerzon's absolute bound (see [11, Theorem 3.5]):

$$M_\alpha(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{for any } \alpha$$

- Neumann's bound (see [11, Theorem 3.4])

$$M_\alpha(n) \leq 2n \quad \text{if } 1/\alpha \text{ is not an odd integer.}$$

- Lemmens–Seidel's relative bound ([11, Theorem 3.6]):

$$M_\alpha(n) \leq \frac{n(1-\alpha^2)}{1-n\alpha^2} \quad \text{in the cases where } 1-n\alpha^2 > 0.$$

本報告の主定理として，上記の結果から一般には従わない新しい上界を紹介する:

Theorem 2.1. 自然数 $n \geq 3$ と実数 $\alpha \in (0,1)$ が

$$3\alpha^{-2} - 6\alpha^{-1} + 2 < n < 3\alpha^{-2} + 6\alpha^{-1} + 2$$

を満たしているとする．このとき，

$$M_\alpha(n) \leq 2 + (n-2)\max\left\{\frac{(\alpha^{-1}-1)^3}{n-(3\alpha^{-2}-6\alpha^{-1}+2)}, \frac{(\alpha^{-1}+1)^3}{(3\alpha^{-2}+6\alpha^{-1}+2)-n}\right\}.$$

Theorem 1.1 は Theorem 2.1 からただちに従う．また，先に紹介した Neumann の上界から，$l := 1/\alpha$ が奇数の場合に $M_{1/l}(n)$ を与える問題が特に重要であると考えられている．具体的な $(n, 1/l)$ (l は奇数) については $M_{1/l}(n)$ についての多くの結果が知られている (see [5, 10]) [3]. Theorem 2.1 の具体例として，$M_{1/9}(n)$ について以下の上界を紹介する:

- $192 \leq n \leq 227$ なら $M_{1/9}(n) \leq 3202$. [4]

[3] 文献 [10] においては "$N_l(d)$" が $M_{1/l}(d)$ を意味していることに注意.

[4] ここでは Theorem 2.1 の他に $M_\alpha(n)$ が n について単調非減少であるという定義から従う事実を用いた.

- $228 \leq n \leq 298$ なら

$$M_{1/9}(n) \leq -998 + \frac{297000}{299-n}.$$

特に $M_{1/9}(227) \leq 3202$ や $M_{1/9}(228) \leq 3185$ などが得られるが, これは先に紹介した上界からは得られず, またこれまでの先行研究でも知られていない結果であると思われる. [5]

3 証明の概略

Theorem 2.1 の証明の概略をこの章で紹介したい. 証明のベースとなるのは, 球面 2 距離集合への Bachoc–Vallentin の SDP-method をある形に簡約化したものである.

以下 $n \geq 3$ を固定し, $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とおいておく. Equiangular line system in $\mathbb{R}^n$ with the common angle $\arccos \alpha$ を考えることと, S^{n-1} 上の有限部分集合 X であって,

$$I(X) := \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X,\ x \neq y\} \subset \{\pm\alpha\}$$

となるものを考えることは同じである.[6] 従って, $M_\alpha(n)$ の上からの評価を与える問題は, 球面 2 距離集合で内積集合が $\{\pm\alpha\}$ の場合についての濃度を上から評価する問題と考えることができる.

Bachoc–Vallentin [1] と記号を合わせて, $S_k^n(u, v, t)$ という三変数関数を以下のように定義しよう. まず, $[-1, 1]$ 上の k 次多項式 P_n^k を

$$P_n^k(u) = C_k^{n/2-1}(u)/C_k^{n/2-1}(1)$$

と定義する. ここで C_k^λ は $C_0^\lambda(u) = 1$, $C_1^\lambda(u) = 2\lambda u$,

$$kC_k^\lambda(u) = 2(k+\lambda-1)uC_{k-1}^\lambda(u) - (k+2\lambda-2)C_{k-2}^\lambda(u) \quad \text{for } k \geq 2.$$

によって定義される Gegenbauer 多項式である. 次に, 各 $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ に対して,

$$\{(u, v, t) = (\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n}, \langle y, z\rangle_{\mathbb{R}^n}, \langle z, x\rangle_{\mathbb{R}^n}) \in [-1, 1]^3 \mid x, y, z \in S^{n-1}\} \subset [-1, 1]^3.$$

[5]Theorem 2.1 は $M_{1/5}(n)$ や $M_{1/7}(n)$ についてもいくつかの上界を与えるが, それらについては [5] の結果から従う.

[6]厳密には球面上で対蹠的な二点のどちらを選ぶかという自由度が出てくるので若干異なる概念である. 最初から射影空間で議論すればこのようなことにはならないが, 射影空間では “三辺相等” が三角形の合同条件にならないことから計算がややこしくなるので注意が必要である.

上の関数 $(Y_k^n)_{i,j}$ を

$$(Y_k^n)_{i,j}(u,v,t) = \lambda_{i,j} P_i^{n+2k}(u) P_j^{n+2k}(v) Q_k^{n-1}(u,v,t)$$

とおく. ここで,

$$Q_k^{n-1}(u,v,t) = (1-u^2)^{k/2}(1-v^2)^{k/2} P_k^{n-1}\left(\frac{t-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}\right),$$
$$\lambda_{i,j} = \frac{n+2k}{n}(h_i^{n+2k} h_j^{n+2k})^{1/2},$$
$$h_i^{n+2k} = \binom{n+2k+i-1}{n+2k-1} - \binom{n+2k+i-3}{n+2k-1}$$

である. 最後に三次対称群 $\mathfrak{S}_3$ は $Y_k^n(u,v,t)$ に (u,v,t) の置換として作用するが, S_k^n を無限サイズ (indexed by (i,j)) の関数値行列として

$$S_k^n = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \sigma Y_k^n.$$

と定義する. [7]

また, 各 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ 及び $\alpha, \beta \in [-1, 1)$ に対して,

$$W(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(x_1 + x_2)/3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(x_3 + x_4 + x_5 + x_6),$$
$$S_k^n(x;\alpha,\beta) := S_k^n(1,1,1) + S_k^n(\alpha,\alpha,1)x_1 + S_k^n(\beta,\beta,1)x_2 + S_k^n(\alpha,\alpha,\alpha)x_3 + S_k^n(\alpha,\alpha,\beta)x_4 + S_k^n(\alpha,\beta,\beta)x_5 + S_k^n(\beta,\beta,\beta)x_6$$

とする. このとき, $W(x)$ はサイズ 2 の対称行列であり, $S_k^n(x;\alpha,\beta)$ は $\{(i,j) \mid i,j = 0,1,2,\dots,\}$ で添え字付けられる無限サイズの対称行列となっていることを注意しておく.

球面 2 距離集合への Bachoc–Vallentin's SDP method は以下の形で述べられる:

Fact 3.1 (Bachoc–Vallentin [1] and Barg–Yu [4]). $\alpha, \beta \in [-1, 1)$ を固定し, S^{n-1} の有限部分集合 X が

$$I(X) := \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X,\ x \neq y\} \subset \{\alpha, \beta\}$$

[7] この記号は Bachoc–Vallentin [1] に合わせたものであるが, [2] や [4] とは定義が異なるので注意が必要である.

を満たすとする．このとき，

$$|X| \leq \max\{1 + (x_1 + x_2)/3 \mid x = (x_1, \ldots, x_6) \in \Omega^n_{\alpha,\beta}\}$$

となる．ここで $\Omega^n_{\alpha,\beta}$ は以下で定義される $\mathbb{R}^6$ の部分集合である

$$\Omega^n_{\alpha,\beta} := \{\, x = (x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid\ x \text{ は以下の四つの条件を満たす } \}.$$

1. 各 $i = 1, \ldots, 6$ に対して $x_i \geq 0$.

2. $W(x)$ は半正定値.

3. 各 $k = 1, 2, \ldots.$ について $3 + P^n_k(\alpha)x_1 + P^n_k(\beta)x_2 \geq 0$.

4. 各 $k = 0, 1, 2, \ldots.$ について $S^n_k(x; \alpha, \beta)$ の任意の有限主小行列は半正定値.

Theorem 2.1 の証明に用いるのは以下の簡約化されたものである．

Corollary 3.2. *Fact 3.1* と同じ設定において，

$$|X| \leq \max\{1 + (x_1 + x_2)/3 \mid x = (x_1, \ldots, x_6) \in \widetilde{\Omega}^n_{\alpha,\beta}\}$$

となる．ここで $\widetilde{\Omega}^n_{\alpha,\beta}$ は以下で定義される $\mathbb{R}^6$ の部分集合である

$$\widetilde{\Omega}^n_{\alpha,\beta} := \{\, x = (x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid\ x \text{ は以下の三つの条件を満たす } \}.$$

1. $x_i \geq 0$ *for each* $i = 1, \ldots, 6$.

2. $\det W(x) \geq 0$.

3. $(S^n_k)_{i,i}(x; \alpha, \beta) \geq 0$ *for each* $k, i = 0, 1, 2, \ldots,$ *where* $(S^n_k)_{i,i}(x; \alpha, \beta)$ *is the* (i, i)*-entry of the matrix* $S^n_k(x; \alpha, \beta)$.

Theorem 2.1 は $\beta = -\alpha$ の場合での Corollary 3.2 を，特に $(S^n_3)_{1,1}$ の部分の条件に注目して計算することによって得られる．計算に必要な $(S^n_3)_{1,1}$ のデータを以下に挙げておく．

Lemma 3.3. 各 $-1 < \alpha < 1$ に対して，

$$(S^n_3)_{1,1}(1, 1, 1) = 0$$

$$(S^n_3)_{1,1}(\alpha, \alpha, 1) = \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{3(n-1)(n+1)(n+3)}\alpha^2(1-\alpha^2)^3$$

$$(S^n_3)_{1,1}(\alpha, \alpha, \alpha) = -\frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+3)}(\alpha-1)^3\alpha^3((n-2)\alpha^2 - 6\alpha - 3)$$

$$(S^n_3)_{1,1}(\alpha, \alpha, -\alpha) = -\frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+3)}\alpha^3(\alpha+1)^3((n-2)\alpha^2 + 6\alpha - 3).$$

Remark 3.4. 先に紹介した $M_{\sqrt{3/(n+4)}}(n) \leq (n+1)(n+1)/6$ (不等式 (1)) は $\mathrm{Harm}_4(S^{n-1})$ という S^{n-1} 上の関数空間に注目して *Delsarte* の *LP-method* を適用することによって得られる. 従って *Bachoc–Vallentin* の *SDP-method* を考える際にも, $\mathrm{Harm}_4(S^{n-1})$ に注目することは自然であると思われる. 実際, 我々の証明で中心的な役割を果たしている $(S_3^n)_{1,1}$ は

$$H_{3,4}^{n-1} \subset \bigoplus_{m=0}^{4} H_{m,4}^{n-1} = \mathrm{Harm}_4(S^{n-1})$$

という小さな関数空間 ($H_{m,l}^{n-1}$ の定義については *[1]* を参照). に由来するものである. しかし, 簡単なケースで計算実験を行ったところ, $H_{3,4}^{n-1}$ の替わりに $H_{0,4}^{n-1} \oplus H_{1,4}^{n-1} \oplus H_{2,4}^{n-1} \oplus H_{4,4}^{n-1}$ を考えても, *Theorem 2.1* は得られなかった. 我々の設定において, なぜ $H_{3,4}^{n-1}$ がよい働きをするのかという問いについては何も説明がつけられていない. これは今後の課題としたい.

謝辞

本研究について多くの有益な助言をいただいた坂内英一氏, Alexander Barg 氏, 宗政昭弘氏, 田上真氏, 田邊顕一朗氏, 田中太初氏, Ferenc Szöllősi 氏に謝辞を捧げたい.

References

[1] C. Bachoc and F. Vallentin, *New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 909–924.

[2] C. Bachoc and F. Vallentin, *Optimality and uniqueness of the* (4, 10, 1/6) *spherical code*, J. Combin. Theory Ser. A **116** (2009), 195–204.

[3] C. Bachoc and F. Vallentin, *Semidefinite programming, multivariate orthogonal polynomials, and codes in spherical caps*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (2009), 625–637.

[4] A. Barg and W.-H. Yu, *New bounds for spherical two-distance set,* Experimental Mathematics, **22** (2013), 187–194.

[5] A. Barg and W.-H. Yu, *New bounds for equiangular lines*, Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, A. Barg and O. Musin, Editors, AMS Series: Contemporary Mathematics, vol. 625, 2014, pp.111–121.

[6] E. Bannai, T. Okuda, and M. Tagami, *Spherical designs of harmonic index t,* J. Approx. Theory, in press.

[7] D. de Caen, *Large equiangular sets of lines in Euclidean space*, Electron. J. Combin. **7** (2000), Research Paper 55, 3pp.

[8] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Research Repts Suppl. **10** (1973), 1-97.

[9] D. Gijswijt, A. Schrijver and H. Tanaka, *New upper bounds for nonbinary codes based on the Terwilliger algebra and semidefinite programming*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 1719–1731.

[10] G. Greaves, J. H. Koolen, A. Munemasa, and F. Szöllősi, *Equiangular lines in Euclidean spaces*, preprint, available at arXiv:1403:2155.

[11] P. W. H. Lemmens and J. J. Seidel, *Equiangular lines*, Journal of Algebra **24** (1973), 494–512.

[12] O. R. Musin, *Bounds for codes by semidefinite programming*, Tr. Mat. Inst. Steklova **263** (2008), 143–158.

[13] A. Schrijver, *New code upper bounds from the Terwilliger algebra and semidefinite programming*, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (2005), 2859–2866.