

## 社会的評価と組織の持続性の関係

### Ralationship between reputation and persistence of organization

\*山田大貴 \*\*小林祐一朗 \*\*\*野田あやか

\*東北大学理学研究科数学専攻 \*\*東京大学総合文化研究科広域科学専攻 \*\*\*島根大学総合理工学部

\*Taiki Yamada, \*\*Yuichiro Kobayashi, and \*\*\*Ayaka Noda

\*Mathematical Institute, Graduate School of Science, Tohoku University,  
Aramaki-Aza-Aoba 6-3, Aoba-ku, Sendai 980-8578 JAPAN

\*\*Department of Multi-Disciplinary Sciences, Graduate School of Arts and Sciences, the University of Tokyo,  
Komaba 3-8-1, Meguro-ku, Tokyo 153-8902, JAPAN

\*\*\*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University,  
Nishikawatsu-cho 1060, Matsue-shi, Shimane 690-8506, JAPAN

## 1 はじめに

同じ考えや興味を持った人々は集まり組織を作る。私たちの周りにだけ注目してみても、至る所に組織は存在する。多くの組織は成長を志向し、成長したものは必ず衰退する。そのダイナミズムは何によっているのだろうか。組織の持続性に関する結果はピーターの法則やパーキンソンの法則を始めとして、数多く挙げられる。パーキンソンの法則によると、組織の上立つリーダーが優秀であっても無能であっても組織は拡大すると述べている。優秀なリーダーの場合は自分の仕事の範囲を拡大していくことにより、部下を増やして、仕事を増やすことで組織を拡大していく。一方で、無能なリーダーの場合は仕事が出来ないので、代わりに実行する人を集めようとすることで結果的に組織が拡大する。更に、多くの社会学者や経済学者が仕事の効率性や組織内のイノベーション能力といった組織の内部で生じる問題に注目して持続性との因果関係を述べている。

そこで、私たちは既存の結果とは別の視点から関係性を導き出せないかと考えた。実験を通じて、インターネットが普及し、情報の伝搬速度が上がったことで噂や評判が組織の拡大に影響すると予想した。したがって、本論文ではその組織に属していない第三者からの評価(社会的評価)や組織内外の人間関係と組織の持続性の関係性について考察する。

## 2 モデルの仮定

評判による組織規模の変動を考察するために、1つの組織に着目する。ある人間集団を、対象とする組織に属する者とそうでない者に区別し、以下の2つの過程により組織の人数が変動するものとする。

「加入」… 組織に属さない者が新たに組織に属する

「脱退」… 組織に属する者が新たに組織から抜ける

ただし、これらの過程によっては、集団の人数は変化しないものとする。加入に影響する要因としては、組織に属する者による組織拡大のための戦略的行動、組織に入る事による個人の利得、脱退者から伝わる不評などが挙げられる。また、脱退に影響する要因としては、組織内の人間関係の強さや、組織に属することでの個人の損失が挙げられる。本研究では特に、時刻  $t$  までにおける脱退者が、対象とする組織の評判に対して負の影響を与えているものと仮定する。

集団の総人数を  $N$ 、時刻  $t$  における組織の人数を  $P(t)$ 、属さない人数を  $E(t)$  とする。このとき、

$$P(t) + E(t) = N$$

が成り立つ。 $P(t)$  の変動は、単位時間あたりの  $P(t)$  の変化率を考えると、微分方程式を用いて

$$\frac{dP(t)}{dt} = I(t) - J(t) \quad (1)$$

となる。ただし、 $I(t)$  は時刻  $t$  における組織への加入速度、 $J(t)$  は時刻  $t$  における組織からの脱退速度である。それぞれ  $I(t)$ 、 $J(t)$  は以下のように決まると考えられる。

$$\begin{aligned} I(t) &= k_1 P(t) \frac{E(t)}{N} \exp \left[ -k_2 \int_0^t f(s-t) J(s) ds \right] \\ J(t) &= k_3 P(t) \end{aligned}$$

単位時間当たりの加入者  $I(t)$  は、時刻  $t$  における組織の人数  $P(t)$  に比例し、集団内の組織に属さない人の割合  $\frac{E(t)}{N}$  にも比例し、「不評」 $k_2 \int_0^t f(s-t) J(s) ds$  が大きいほど指数的に少なくなるとした。 $k_1$  は加入率であり、組織拡大の戦略や、組織に加入することによって期待される個人の利得に影響される。 $k_2$  は脱退者の評判への影響率で、脱退後すぐの者が組織の評判に与える負の影響の大きさを表し、組織行動そのものによって影響されるとする。組織の行動が部外者にとって驚くべきものであるが、秘密にされているような場合、この値は高くなるだろう。不評には、それまでの脱退者  $J(s)$  の総数と、脱退者が脱退してから経過した時間の両方が影響すると考えられる。 $f(s-t)$  は「社会的記憶」の減衰を考慮した関数である。時刻  $t$  における不評の高さは、どの時刻に脱退した者によっても影響を受けるが、時刻  $s (< t)$  の脱退者による影響は、以下で述べるように、時刻  $t$  で脱退したばかりの者よりも小さくなることとされる。 $k_3$  は組織からの脱退率を意味し、組織内部での人間関係の強さが強いと小さくなることや、組織に属することで得られる利得が大きいと小さくなることとされる。組織に属することで得られる利得は、さらに、組織内外を結ぶ良好な人間関係の多さから影響を受けうる [1]。

以上より、式 (1) は、

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= k_1 P(t) \frac{E(t)}{N} \exp \left[ -k_2 \int_0^t f(s-t) J(s) ds \right] - k_3 P(t) \\ &= \left( k_1 \frac{E(t)}{N} \exp \left[ -k_2 \int_0^t f(s-t) J(s) ds \right] - k_3 \right) P(t) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。なお、初期条件は、それまでに存在しなかった組織が生じたところからを考慮するため、

$$P = \epsilon \quad (0 < \epsilon \ll N) \quad (3)$$

とする。

本研究では、社会的記憶の減衰を表す関数  $f(s-t)$  に関して、以下の3つの場合のモデルの解析を行った。

モデル 1: 記憶が減衰しないと仮定する。例えば、アーカイブサイト等の発達により、古い情報も削除されることなく残るようになった状況を考える。この場合、組織からの脱退者が脱退後すぐに残した情報が永久に残り、組織への加入を検討している者が、古い情報にも等しくアクセスできるならば、どの時点における脱退者も、不評に等しく影響するかもしれない。このとき  $f(s-t)$  は、

$$f(s-t) = 1. \quad (4)$$

モデル 2: 記憶が指数関数に従って減少すると仮定する。全ての情報が、どの時点でも一定の消滅確率を持ち、新しい情報が追加されるとすると、古い情報は指数関数的に消滅してゆくことになる。このとき  $f(s-t)$  は、

$$f(s-t) = \exp [a(s-t)]. \quad (5)$$

ただし、 $a$  は「脱退経験の忘れられやすさ」を表している。

モデル 3: 記憶が冪関数的に減少すると仮定する。ブログやソーシャルメディアにおいては、特定の日を表す単語や、イベント、ニュースに関する単語の出現頻度が、ピークから冪関数的に減少することが報告されている [2]。この冪指数は、大きなニュースほど大きくなる傾向が見られた [2]。組織に加入することを検討する者が、

このようなメディアを参考にすると考えた場合、記憶は冪関数的に減少すると考えるのが適当である。このとき  $f(s-t)$  は、

$$f(s-t) = \frac{1}{1+a(t-s)^\gamma}. \quad (6)$$

ただし、 $a$  は「脱退者が、組織の脱退直後と同レベルで組織の不評を広める時間の短さ」、 $\gamma$  は「脱退者による不評への反響の小ささ」を表している。

### 3 結果

#### 3.1 モデル 1: 記憶が減衰しない場合

##### 3.1.1 2変数微分方程式への変形

式 (4) のもとでは、式 (2) は、

$$U(t) = \int_0^t J(s) ds \quad (7)$$

とおくことにより、

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = \left( k_1 \frac{N-P(t)}{N} \exp[-k_2 U(t)] - k_3 \right) P(t) \\ \frac{dU(t)}{dt} = k_3 P(t) \end{cases} \quad (8)$$

と変形することができる。 $U(t)$  はモデル上、時刻  $t$  までの間に対象とする組織から脱退した総人数を意味している。初期条件は、式 (3), (7) から

$$(P, U) = (\epsilon, 0) \quad (0 < \epsilon \ll N) \quad (9)$$

である。

##### 3.1.2 相図による分析

特に微分方程式が 2 変数の場合には、相図による理解が容易である。図 1 に、式 (8) について定性的に解析した結果を示した。

アイソクラインは、各変数の時間微分が 0 となる領域である。式 (8) の各変数についてアイソクラインを求めると、

$$\begin{aligned} P: & \quad P = 0 \quad \text{or} \quad U = \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{k_1}{k_3} \left( 1 - \frac{P}{N} \right) \right), \\ U: & \quad P = 0. \end{aligned}$$

いま、モデルの前提として  $0 \leq P \leq N$  であり、その全領域は曲線によって 2 分割されることがわかる。平衡点は  $P = 0$  上の全ての点であり、 $P > 0$  の領域には平衡点が存在しない。 $k_1 > k_3$  のときには、図 1 のように、初期条件 (式 (9)) に対して、一旦組織の人数が増大する解が得られるが、 $k_1 \leq k_3$  のときは、 $t = 0$  で  $dP(t)/dt < 0$  となり、軌道が初期条件の近傍に収まることがわかる。

軌道については、軌道の接線の傾きの逆数  $\frac{dP}{dt} / \frac{dU}{dt}$  を用いることで、概形を知ることができる。まず、

$$\frac{dP}{dt} / \frac{dU}{dt} = \frac{k_1 \frac{N-P}{N} \exp[-k_2 U] - k_3}{k_3}$$

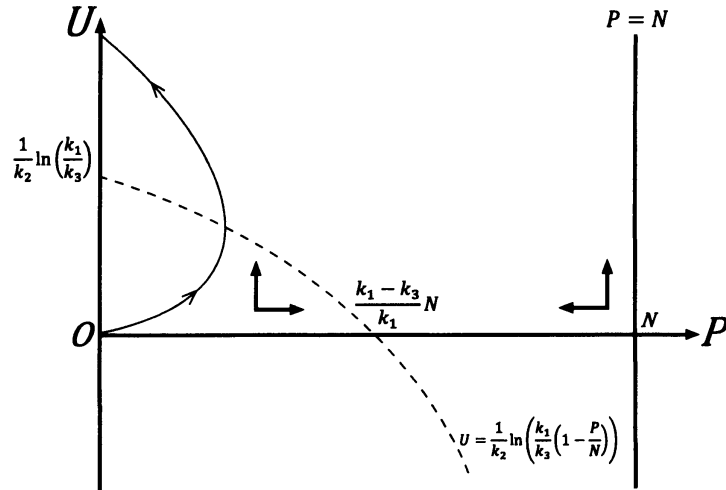


図1 式(8)について、 $k_1 > k_3$  のときの定性的相図。破線はアイソクライン、実線は初期条件(式(9))に対応する解の軌道の概形を示す。

であるから、 $P \rightarrow 0$  の極限においては、

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{dP}{dt} / \frac{dU}{dt} = \frac{k_1 \exp[-k_2 U] - k_3}{k_3}.$$

この値は有限であるため、 $U$  軸の近傍では、 $U$  が発散しないことがわかる。さらに、

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{dP}{dt} / \frac{dU}{dt} = -1$$

により、大域的にも  $U$  は発散しない。以上から、いかなる初期条件に対しても、 $t \rightarrow \infty$  の極限において  $U$  は有限の値に収束し、 $P \rightarrow 0$  となる。

次に、「不評」と「組織の存続」の関係について求める。モデル1においては、組織は持続的に存在することができないが、その構成人数の減少速度は場合によって異なっており、これを「存続」の程度を評価する指標とすることができる。具体的には、 $P = 0$  の近傍においては、 $U$  がほとんど変化しないため、 $P(t)$  を指数関数  $c \exp(-vt)$  で近似したとき、その指数的減少率  $v$  はほぼ一定であり、

$$v \sim k_3 - k_1 \exp[-k_2 U]$$

である。したがって、「脱退者総数」 $U$  の極限值  $U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$  の値が得られれば、「組織人数の減少速度」 $v_\infty$  を得ることができる。ただし、初期条件(式(9))に対する極限値の値を解析的には得られなかったため、数値シミュレーションを行った。

### 3.1.3 「不評」と「組織人数の減少速度」の関係

定数  $k_3$  と比例関係を保ったまま定数  $k_1$  を変えても、軌道は一定であるから、 $k_1 = 1.0$  としても一般性は失われない。また、 $N$  と  $\epsilon$  についても、比例関係を保ったまま値を変えれば、軌道は相似形となり、 $(P(t)/N, U(t)/N)$  の軌道は変化しない。そこで、 $k_1 = 1.0, N = 100$  のもとで、2つのパラメータ  $k_2$  と  $k_3$  を変えて、式(8)についてシミュレーションした。 $k_2$  については0.1から9.9の範囲で0.1刻み、 $k_3$  については、 $k_1 > k_3$  をみたすように、0.05から0.95の範囲で0.05刻みで変化させ、合計1881セットのパラメータについてシミュレーションした。初期値は  $\epsilon = 10^{-3}$  とした。微分方程式の数値解を得るためには、1ステップの長さ  $\Delta t = 0.01$  として、4次のルンゲ=クッタ法を用いた。シミュレーションは  $0 \leq t \leq 1000$  の範囲で行った。

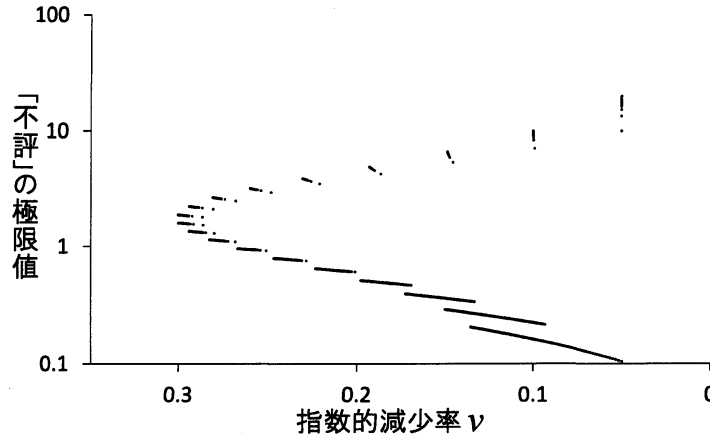


図2 式(8)について、 $U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ の近似値をシミュレーションによって得て、そこから計算された、漸近的な「不評」 $k_2 U_\infty$ と「組織人数の減少速度」 $v_\infty$ の関係を、散布図にプロットした。横軸は反転されていて、右の方が「組織がなくなる」までに長い時間を要することに注意。 $k_1 = 1.0, N = 100$ のもので、 $k_2$ を0.1から9.9の範囲で0.1刻み、 $k_3$ を0.05から0.95の範囲で0.05刻みでシミュレーションした。一列に連なって見えるのが、 $k_3$ の値を一定にしながら $k_2$ を変えたときの変化にあたる。漸近的「不評」は、 $k_2$ が大きくなると高くなり、 $k_3$ が大きくなると低くなる。

図2に、シミュレーションで得られた $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ の近似値より計算された、漸近的な「不評」 $k_2 U_\infty$ と「組織人数の減少速度」 $v_\infty$ の関係を示した。 $t = 1000$ においては、どの場合にも $P(t) < 10^{-19}$ であったから、 $U(1000)$ の値は $U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ に十分な精度で近いと考えられる。

図2からは、モデル上「不評」が蓄積され、その記憶が減少しない場合、「不評」と「組織人数の減少速度」の関係の関係は単純ではないことが読み取れる。「不評の強度」を表す $k_2$ だけが変化する場合、 $k_2$ が大きく、「不評」が大きいくほど、組織が消滅に向かう速さは大きかった。一方、「組織からの脱退率」を表す $k_3$ についてみると、最終的には $k_3$ が小さい場合の方が「不評」は高くなって終わった。 $k_3$ が大きい場合は、組織メンバーがすぐに脱退してしまうので、 $k_3$ が小さい場合と比べて「不評」 $k_2 U$ が早い段階で大きくなるが、それによって加入者数がすぐに減少し、不評 $k_2 U$ の増大も早い段階で減速した。「指数的減少率」についてみると、最も組織の縮小が激しいのは、 $k_3 \sim k_1/2$ で、漸近的「不評」が中程度の場合であった。

## 3.2 モデル2: 記憶が指数的に減衰する場合

### 3.2.1 2変数微分方程式への変形

式(5)のもとでは、式(2)は、

$$U(t) = \int_0^t f(s-t)J(s)ds$$

とおくことにより、

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = (k_1 \frac{N-P(t)}{N} \exp[-k_2 U(t)] - k_3)P(t) \\ \frac{dU(t)}{dt} = k_3 P(t) - aU(t) \end{cases} \quad (10)$$

と変形することができる。 $U(t)$ はモデル上、時刻 $t$ までの間に対象とする組織から脱退したもののうち、不評を広めるものの総人数を意味している。初期条件は、式(9)と同じく

$$(P, U) = (\epsilon, 0) \quad (0 < \epsilon \ll N)$$

である。

### 3.2.2 相図と線形安定性解析

モデル 1 と同様に、図 3 に式 (10) に対する定性的解析の結果を示した。

式 (10) の各変数についてアイソクラインを求めると、

$$P: \quad P = 0 \quad \text{or} \quad U = \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{k_1}{k_3} \left( \frac{N-P}{N} \right) \right), \quad (11)$$

$$U: \quad U = \frac{k_3 P}{a}. \quad (12)$$

$k_1 > k_3$  のときには、図 3 に示したように、非自明な平衡点が  $P > 0$  かつ  $U > 0$  の領域に 1 つ存在する。このとき、初期条件 (式 (9)) に対応する解の軌道は  $P = 0$  を横切ることがないから、この軌道は、 $P > 0$  の平衡点のまわりを 1 周するごとに、この平衡点に近づくことになる。したがって、初期条件 (式 (9)) に対しては、 $P > 0$  のまま安定する解が得られる。ただし、リミットサイクルの可能性は排除されない。 $k_1 \leq k_3$  のときは、 $t = 0$  で  $dP(t)/dt < 0$  となり、軌道が初期条件の近傍に収まる。

$k_1 > k_3$  のときに存在する、 $P > 0$  の非自明な平衡点について、線形安定性解析を行うと、以下のように、この平衡点が安定平衡点であることが確認される。

$P$  と  $U$  の相空間を 2 変数ベクトル場と見なしたときのヤコビ行列  $\mathbf{J}$  は、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} M - k_3 - LP & -k_2 MP \\ k_3 & -a \end{pmatrix}.$$

ただし、

$$M = k_1 \frac{N-P}{N} \exp[-k_2 U], \quad L = k_1 \frac{1}{N} \exp[-k_2 U].$$

ここで、 $(P, U)$  に非自明な平衡点のときの値  $(P^*, U^*)$  を代入すると、まず

$$M^* = k_3, \quad L^* = \frac{k_3}{N - P^*}$$

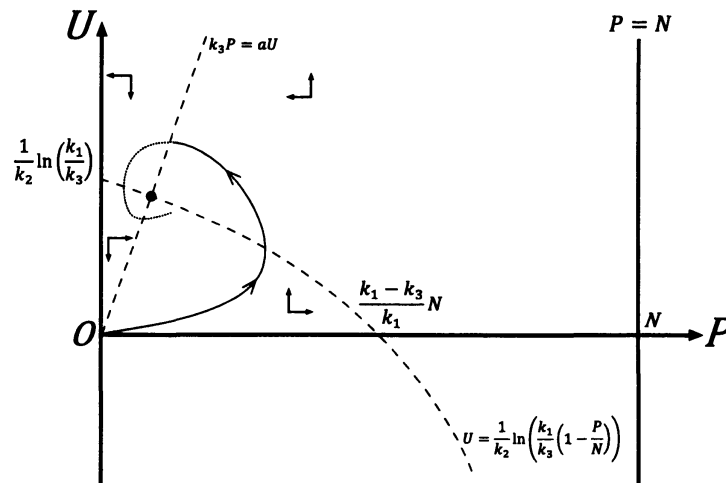


図 3 式 (10) について、 $k_1 > k_3$  のときの定性的相図。破線はアイソクライン、実線とそれに続く点線は、初期条件 (式 (9)) に対応する解の軌道の概形を示す。また、黒丸は安定平衡点を表す。パラメータを変えたときに、初期条件に対応する解が  $t \rightarrow \infty$  において常に安定平衡点に収束するかどうかは未知である。

を得るから、

$$J^* = \begin{pmatrix} -\frac{k_3 P^*}{N - P^*} & -k_2 k_3 P^* \\ k_3 & -a \end{pmatrix}.$$

したがって、特性方程式は

$$\lambda^2 + \left( k_3 \frac{P^*}{N - P^*} + a \right) \lambda + \left( k_2 k_3^2 P^* + a k_3 \frac{P^*}{N - P^*} \right) = 0$$

であるが、 $0 < P^* < N$  により、 $\lambda$  の 1 次の項と定数項がいずれも正であることから、 $J^*$  の固有値はすべて実部が負である。すなわち、平衡点  $(P^*, U^*)$  は安定である。

また、平衡点  $(P, U) = (0, 0)$  に対して同様の分析を行うと、平衡点におけるヤコビ行列の固有値は  $-a, k_1 - k_3$  である。したがって、 $a > 0$  より、この平衡点は、 $k_1 > k_3$  のときは必ず不安定であり、 $k_1 < k_3$  のときは必ず安定である。また、 $k_1 = k_3$  の場合についても、2 次以上の項を考慮すると、平衡点  $(P, U) = (0, 0)$  が安定であることがわかる。

### 3.2.3 平衡における「組織人数」と「不評」の関係

モデル 2 については、パラメータを変化させたときの、安定な平衡状態における「組織人数」 $P^*$  と「不評」 $k_2 U^*$  との関係調べることができる。

定数  $k_3$  と比例関係を保ったまま定数  $k_1$  を変えても、軌道は一定であるから、 $k_1 = 1.0$  としても一般性は失われない。また、 $N, \epsilon, a$  についても、比例関係を保ったまま値を変えれば、軌道は相似形となり、 $(P(t)/N, U(t)/N)$  の軌道は変化しない。そこで、パラメータ  $k_2, k_3$  と  $a$  についてだけ調べても、一般性は失われず、十分である。以下、特に  $k_1 > k_3$  である場合について、パラメータの変化により、 $P > 0, U > 0$  なる安定平衡点における  $(P^*, k_2 U^*)$  がどのように変化するかについて調べる。

■ $k_2$  について  $k_2$  の小さな変化  $\Delta k_2$  に対して、平衡点の移動  $\Delta P^*, \Delta U^*$  と、「不評」の変化  $\Delta(k_2 U^*)$  は、 $\Delta k_2$  の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \Delta P^* &\sim \left( -\frac{1}{k_2} U^* / \left( \frac{k_3}{a} + \frac{1}{k_2(N - P^*)} \right) \right) \Delta k_2, \\ \Delta U^* &\sim \left( -k_3 \frac{U^*}{k_2} / \left( k_3 + \frac{a}{k_2(N - P^*)} \right) \right) \Delta k_2, \\ \Delta(k_2 U^*) &\sim \left( 1 - k_3 / \left( k_3 + \frac{a}{k_2(N - P^*)} \right) \right) U^* \Delta k_2. \end{aligned}$$

したがって、「不評の強度」を表す  $k_2$  の増加に対しては、平衡での「組織人数」 $P^*$  が減少し、平衡での「不評」は増加する。

■ $k_3$  について  $k_3$  の小さな変化  $\Delta k_3$  に対して、「組織人数」の変化  $\Delta P^*$  と「不評」の変化  $\Delta(k_2 U^*)$  は、 $\Delta k_3$  の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \Delta P^* &\sim \left( - \left( P^* + \frac{a}{k_2 k_3} \right) / \left( k_3 + \frac{a}{k_2(N - P^*)} \right) \right) \Delta k_3, \\ \Delta(k_2 U^*) &\sim \left( \left( \frac{P^*}{N - P^*} - 1 \right) / \left( k_3 + \frac{k_2}{N - P^*} \right) \right) \Delta k_3. \end{aligned}$$

したがって、「組織からの脱退率」を表す  $k_3$  の増加に対しては、平衡での「組織人数」 $P^*$  は減少し、平衡での「不評」 $k_2 U^*$  は、 $P^* > N/2$  のときは増加、 $P^* < N/2$  のときは減少する。

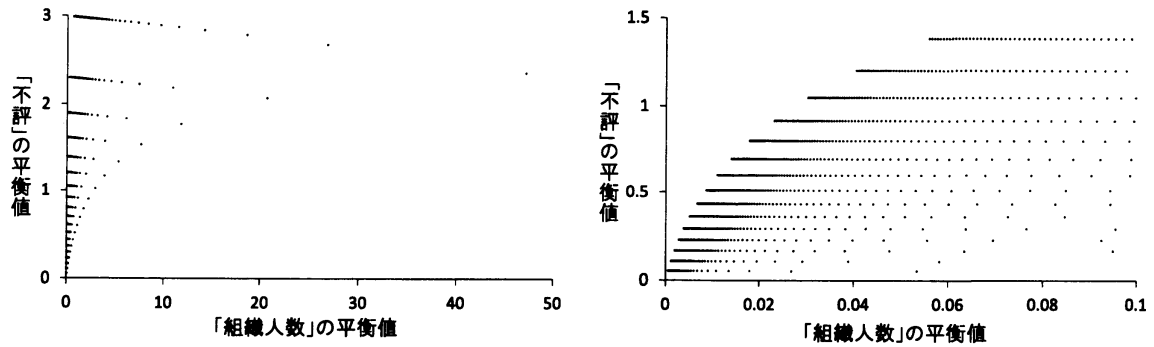


図4 式(10)について、 $a = 0.1$ ,  $k_1 = 1.0$ のもとで、 $k_2$ を0.1から9.9の範囲で0.1刻み、 $k_3$ を0.05から0.95の範囲で0.05刻みでシミュレーションしたときの、 $t = 1000$ における「組織人数」 $P^{(*)}$ と「不評」 $k_2U^{(*)}$ の値を散布図にプロットした。左は全範囲、右は(0, 0)の近くのみについてのプロット。水平方向に一列に連なって見えるのが、 $k_3$ の値を一定にしながらか $k_2$ を変えたときの変化にあたる。 $k_2$ のみを大きくすると、 $P^{(*)}$ は減少したが $k_2U^{(*)}$ は増加した。一方、 $k_3$ のみを大きくすると、 $P^{(*)} < N/2$ で $P^{(*)}$ も $k_2U^{(*)}$ も減少した。

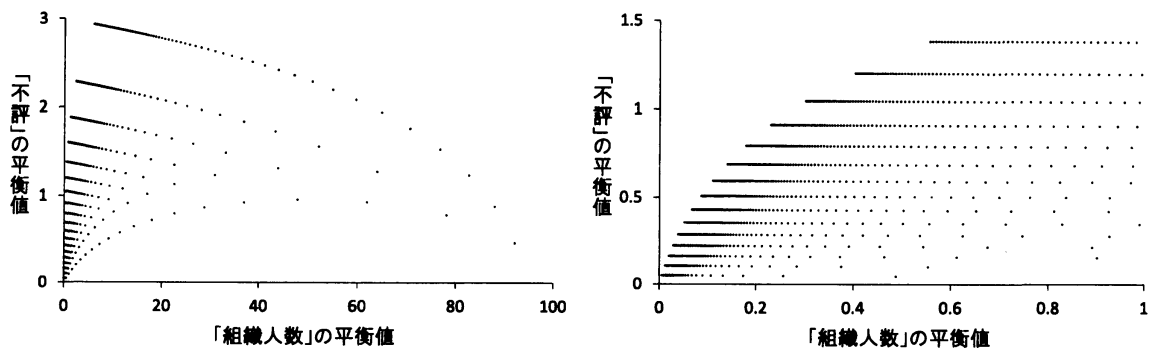


図5 式(10)について、 $a = 1.0$ ,  $k_1 = 1.0$ のもとで、 $k_2$ を0.1から9.9の範囲で0.1刻み、 $k_3$ を0.05から0.95の範囲で0.05刻みでシミュレーションしたときの、 $t = 1000$ における「組織人数」 $P$ と「不評」 $k_2U$ の値を散布図にプロットした。詳細は図4と同じであるが、図4とは横軸のスケールが異なっていることに注意。 $P^{(*)} > N/2$ の場合も得られており、 $P^{(*)} < N/2$ の場合と異なって、 $k_3$ のみを大きくすると $P^{(*)}$ が減少して $k_2U^{(*)}$ は増大した。

■ $a$ について  $a$ を変化させることは、図3において、直線 $k_3P = aU$ の傾きのみを変えることに相当する。「脱退経験の忘れられやすさ」 $a$ の増加に対しては、平衡での「組織人数」 $P^*$ が増加し、平衡での「不評」は減少する。

以上のように、平衡における「組織人数」と「不評」の関係は、一般にはパラメータの変化のしかたによって様々である。以下では、どんな初期値によっても必ず安定な平衡点に達するとは示せなかったこと、および一般的な $(P^*, U^*)$ の解を初等関数によって得るのが難しかったことから、シミュレーションによって、平衡における「組織人数」と「不評」の関係を得た。シミュレーションは、 $a = 0.1$ と $a = 1.0$ の2つの場合について行った点を除いて、モデル1(3.1節)と同様に行った。

シミュレーション結果では、 $t = 1000$ において、調べたパラメータの範囲では、どの場合にも $|dP/dt| < 2.0 \times 10^{-6}$ 、 $|dU/dt| \leq 2.0 \times 10^{-5}$ であったから、得られた $P(1000), U(1000)$ の値は平衡の値 $P^*, U^*$ に十分な精度で近いと考えられる。数値的に得られた、漸近的な「組織人数」 $P^{(*)}$ と「不評」 $k_2U^{(*)}$ の関係を、図4および図5に示した。 $k_2, k_3$ および $a$ が変化したときの「組織人数」と「不評」の変化は、上で示された解析



的结果と合致していた。

図4および図5からも読み取れるように、 $P^* \ll N$  の場合には、 $k_2$  および  $a$  が変化したときの相対的傾き  $\frac{\Delta(k_2 U^*)/k_2 U^*}{\Delta P^*/P^*}$  の絶対値は、 $k_3$  が変化したときのそれに対して小さかった。したがって、対象とするそれぞれの組織に対してパラメータがランダムに決まっている場合を考えると、 $k_2$ 、 $k_3$  および  $a$  の標準的な相対的変動(例えば  $\Delta k_2/k_2$ ) が同程度であった場合には、 $P^*$  と  $k_2 U^*$  の間に正の相関があることが期待される。これに対し、 $k_2$  および  $a$  に比べて  $k_3$  の相対的変動が小さい場合は、 $P^*$  と  $k_2 U^*$  の相関は0に近づくだらう。 $P^*$  と  $k_2 U^*$  の相関が負となりうるのは、 $a$  と  $k_3$  に強い正の相関があり、かつ  $k_2$  と  $k_3$  にも強い負の相関がある場合に限られる。

### 3.3 モデル3: 記憶が冪則に従って減衰する場合

記憶が冪則に従って減衰する場合には、その冪指数  $-\gamma$  の値によって、質的に異なる結果が生じるのを示すことができる。具体的には、 $\gamma \leq 1$  の場合には、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\min_{t \in [0, t]} P(t)) = 0$  であるのに対して、 $\gamma > 1$  の場合には  $P(t)$  は非ゼロの平衡状態をもつ。以下、これを示す。

■  $\gamma \leq 1$  のとき

$$P_{\min, \infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \min_{t \in [0, t]} P(t) \right)$$

について考える。いま、 $P_{\min, \infty} > 0$  を仮定すると、 $P(t)$  には0より大きい下限値  $P_{\min, \infty}$  が存在する。 $J(s) = k_3 P(s)$  より、

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{1+a(t-s)^\gamma} J(s) ds &> \int_0^t \frac{1}{1+a(t-s)^\gamma} k_3 P_{\min, \infty} ds \\ &= k_3 P_{\min, \infty} \int_0^t \frac{1}{1+a(t-s)^\gamma} ds. \end{aligned}$$

である。 $\gamma \leq 1$  により右辺は  $t \rightarrow \infty$  で発散するから、左辺も発散する。すると、式(1)により、 $t \rightarrow \infty$  において、 $dP(t)/dt \rightarrow -k_3 P(t)$  であり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$  となって  $P_{\min, \infty} = 0$  が導かれる。これは最初の仮定条件と矛盾しているので、 $\gamma \leq 1$  のときは  $P_{\min, \infty} = 0$  である。

■  $\gamma > 1$  のとき 記憶の減衰が式(4)で表されるときは、式(2)を2変数の微分方程式に変形することはできない。しかしながら、 $t \rightarrow \infty$  において  $P(t)$  に非ゼロの平衡状態  $P^*$  があるならば、 $J(s) = k_3 P(s)$  より、

$$\begin{aligned} &k_1 \frac{N - P^*}{N} \exp \left[ -k_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+a(t-s)^\gamma} J(s) ds \right] - k_3 = 0 \\ \iff &\int_0^\infty \frac{1}{1+as^\gamma} k_3 P^* ds = \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{k_1}{k_3} \left( 1 - \frac{P^*}{N} \right) \right) \\ \iff &k_3 P^* \int_0^\infty \frac{1}{1+as^\gamma} ds = \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{k_1}{k_3} \left( 1 - \frac{P^*}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)の積分部が定数であることを考えると、この式が成り立つ  $P^* (> 0)$  については、そのような平衡が存在する。式(13)が、モデル2の2つのアイソクライン(式(11)、(12))を連立させたのと同様の形をしていることも注目される。モデル2と同様、大域的安定性の存在は解析的には求められないが、平衡における組織の人数と不評の高さの関係に関しては、モデル2の結果が再現されるかもしれないと予想できる。

## 4 結果に対する考察

本モデルにおいては、組織への加入と組織からの脱退を表すパラメータのほかに、社会的記憶の減衰を表す  $f(s-t)$  の減衰速度が、組織が持続的に存在しうるかどうかを決定していた。すなわち、 $k_1 > k_3$  であり、かつ  $f(s-t) < O((s-t)^{-1})$  である場合に限って、組織の人数  $P(t)$  が非ゼロであるような平衡点が存在していた。

ブログにおける様々な単語の書き込み頻度を調べた研究によると、大きな影響をもつニュースに関連する単語では、ニュースが初めて伝えられた後の書き込み頻度の減衰は、冪指数が大きく、特に  $-1$  よりも大きい ( $-1 < \gamma < 0$ ) 場合があったのに対し、影響の小さいニュースに関しては、減衰の冪指数は  $-1$  未満にとどまった [2]。したがって、本モデルからは、組織の脱退者の証言をもとに組織の実態が大きく報道されたような場合には、組織が長期的には存続しえないことが予測される。

$f(s-t)$  が指数関数の場合には、特に、安定平衡における「組織人数」と「不評」の関係が求められた。パラメータ  $k_2$  は、脱退者の存在が評判へ与える影響の率であったが、これが高い場合、組織が外部との良好な関係を築くのは難しいかもしれない。個人が利益を得る上では、組織の内部よりも外部との人間関係の方が重要であるという実証報告 [1] もある。組織に属することで得られる利益が小さければ、脱退の率は高くなることが予想されるため、 $k_2$  と  $k_3$  には正の相関が想定できる。平衡における組織人数と不評の関係は、 $f(s-t)$  が冪乗的に減衰する場合にも、指数的に減衰する場合と同様のものが予想された。したがって、本モデルからは、実際の社会でも、長期間存続している組織に関しては、組織人数と不評が正の相関を示すという逆説的状況が成り立っていることが推測される。

## 5 今後の展開

今回、2つの微分方程式から数理モデルを構築し、3つの場合分けをすることでモデルの解析を行った。その結果、目標の評判と組織の持続性との関係を明らかにできた。一方で、実社会は今回のモデル以上に複雑であるという問題点もあるため、まだ再構築し改善する必要がある。しかし、常微分方程式から得られる解の情報量には限界があり複雑な実社会に対応するには別の視点が必要である。そこで微分方程式以外の視点から考察していたところ、離散幾何学の分野において評判の伝播速度について興味深い結果が得られていることがわかった [3]。

定理 5.1  $n$  人の集合を考える。起点となる人から任意の他の人へ噂が伝わる時間は、ある定数  $K$  が存在して、最大で

$$\frac{K \log n}{\log(\log n)}$$

である。

この定理は人を頂点として、関係性を辺で結ぶことによってできるグラフを構成し、拡散する速度を確率的に定義することでグラフ理論を用いて証明をしている [4]。グラフ理論は幅広い分野で応用されており社会科学とも密接に関係している学問である。このグラフを使ってモデルを再度構築してシミュレーションを行うことで、本研究の数理モデルをより実社会に近いものに改善できると期待する。

## 参考文献

- [1] RS Burt, “Structural Holes Versus Network Closure as Social Capital”, in N Lin, K Cook, and RS Burt: Social Capital: Theory and Research. Sociology and Economics: Controversy and Integration series. New York: Aldine de Gruyter, 31-56, 2001
- [2] Y Sano, K Yamada, H Watanabe, H Takayasu, and M Takayasu, “Empirical analysis of collective human behavior for extraordinary events in the blogosphere”, Physical Review E 87 (1), 012805, 2013
- [3] B Doerr, M Fouz, T Friedrich, “Why Rumors Spread Fast in Social Networks”, Communications of the ACM 55 (6), 70-75, 2012
- [4] B Doerr, M Fouz, T Friedrich, “Social networks spread rumors in sublogarithmic time”, Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on theory of computing, 21-30, 2011