数理解析研究所講究録
第1968巻 2015年 29-34

代数群のコホモロジーとSullivanの極小モデル

糟谷　久矢　(東京工業大学)*

1. 野水の定理

Gを単連結可解リー群とする。Gはココンパクト離散部分群(格子と呼ぶ) Γを持つと仮定する。コンパクト等質空間G/Γを可解多様体(solvmanifold)と呼ぶ。Gが冪零の時、G/Γを冪零多様体(nilmanifold)と呼ぶ。$\mathfrak{g}$をGのリー環とし、リー環の複体$\bigwedge \mathfrak{g}^*$を考える。この時$\bigwedge \mathfrak{g}^*$は可解多様体G/Γ上の左不変な微分形式の成す部分複体と見ることが出来る。

Nomizuは以下を示した。

定理 1.1 G/Γを冪零多様体とする。複体の埋め込み

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \subset A^*(G/\Gamma)$$

はコホモロジーの同型

$$H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$$

を導く。

Nomizuの定理はHattori[2], Mostow[10]等によって特別な可解多様体の場合に一般化されている。しかし、一般の可解多様体G/Γは同型$H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$を満たさない。

例 1.2 $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^2 \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}.$
$\Gamma = 2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$.

この時$\Gamma \cong \mathbb{Z}^3$より、$G/\Gamma$は3-トーラスであり、$\dim H^1_d(G/\Gamma) = 3$. 一方、$\mathfrak{g}$は非可換で、$\dim H^1(\mathfrak{g}) = 1$。よって、同型$H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$を満たさない。

よって、野水の定理のステートメントをそのまま可解多様体に適用することは出来ない。そこで、野水の定理の拡張問題として、まず以下を考えたい。

問題 1.3 一般の可解多様体のde Rhamコホモロジーが計算できるような、良い有限次元複体を与えよ。

野水の定理について、コホモロジーの計算以外に、今ひとつの視点を与えたい。de Rham複体のように、次数付き代数でライプニッツ則を満たす微分作用素を伴ったものをdifferential graded algebra(DGA)と呼ぶことにする。DGA$\mathcal{A}^*$に対して、$\mathcal{A}^*$とコホモロジーの同型を導くような射でつながれるDGAを$\mathcal{A}^*$のモデルと呼ぶ。DGAのモデルの中で"最小"のものを作ろうというのがSullivanの極小モデルの理論である。([13]) 野水の定理は、次のように言うことが出来る。

定理 1.4 G/Γを冪零多様体とする。この時、DGA$\bigwedge \mathfrak{g}^*$はG/Γのde Rham複体の"explicit"なSullivanの極小モデルである。

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1　東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: kasuya@math.titech.ac.jp
web: http://www.math.titech.ac.jp/~kasuya/

Sullivanの極小モデルはその"DGA構造"自体は，　元のDGAに対して一意的なものであるが、その"作り方"には様々な可能性があることに注意されたい。

この定理の可解多様体への拡張を考えてみたい。G/Γを可解多様体の場合、仮に同型$H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$が成り立ったとしても、DGA$\bigwedge \mathfrak{g}^*$はSullivanの意味での極小ではない。そこで、以下の問題についても考えてみたい。

問題 1.5 定理1.4の意味での野水の定理の拡張とは?

2. 野水の定理の拡張

$\mathfrak{g}$を可解リー環とする。$\mathfrak{n}$を$\mathfrak{g}$の極大冪零イデアルとする。この時、(部分リー環とは限らない) 部分空間$V \subset \mathfrak{g}$で以下を満たすものが取れる. ([1])

- $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{n}$ (ベクトル空間として)
- 線形写像$ad_s : \mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{n} \ni A + X \mapsto (\mathrm{ad}_A)_s \in D(\mathfrak{g})$がリー環の準同型写像。

  ただし$(\mathrm{ad}_A)_s$はAのadjointの$\mathfrak{g}$の線形作用素としてのジョルダン分解における半単純部分。

Gを$\mathfrak{g}$をリー環として持つ単連結可解リー群とする。上記準同型$ad_s : \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{g})$の拡張$\mathrm{Ad}_s : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$を取る。この時、$\mathrm{Ad}_s : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$は対角化可能な表現であるので、$\mathfrak{g} \times \mathbb{C}$の$X_1, \dots, X_n$で$\mathrm{Ad}_s(g) = \mathrm{diag}(\alpha_1(g), \dots, \alpha_n(g))$と書けるものが存在。

問題1.3に対して、これを用いて以下のことが言える。([4], [5])

定理 2.1 Gを単連結可解リー群で、格子Γを持つとする。このとき、上記の$x_1, \dots, x_n$と$\alpha_1, \dots, \alpha_n$を考える。$A^*(G/\Gamma) \otimes \mathbb{C}$の部分複体$A^*_\Gamma$を

$$A^p_\Gamma = \left\langle \alpha_{i_1 \cdots i_p} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \;\middle|\; \alpha_{i_1 \cdots i_p} \lfloor_\Gamma = 1 \right\rangle .$$

と定義する。ここで$\alpha_{i_1 \cdots i_p} = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p}$ and $(i_1, \dots, i_p) \subset \{1, \dots, n\}$。このとき、埋め込み$A^*_\Gamma \subset A^*(G/\Gamma) \otimes \mathbb{C}$は同型

$$H^*_d(A^*_\Gamma) \cong H^*_d(G/\Gamma)$$

を導く。

リー環$\mathfrak{g}$の微分作用素全体の空間$D(\mathfrak{g})$に対して、半直積$D(\mathfrak{g}) \ltimes \mathfrak{g}$を考える。この時、上記準同型$ad_s : \mathfrak{g} \to D(\mathfrak{g})$に対して、

$$\mathfrak{u} = \{X - \mathrm{ad}_{sX} \in D(\mathfrak{g}) \ltimes \mathfrak{g} | X \in \mathfrak{g}\}.$$

と定義すると$\mathfrak{u}$は冪零リー環となる。問題1.4に対して、以下のことが言える。([4], [5], [8])

定理 2.2 G/Γを可解多様体とする。次のようなDGA

$$\mathcal{A}^* = \bigoplus A^*(G/\Gamma, E_\alpha)$$

を考える:

- $\{E_\alpha\}$ は位相的に自明な複素1次元平坦ベクトル束の全体。

- $A^*(G/\Gamma, E_\alpha)$ は E_α に値を取る平坦接続から定まる外微分を持つ de Rham 複体。

- 平坦束のテンソル積により、積 $A^*(G/\Gamma, E_\alpha) \times A^*(G/\Gamma, E_\beta) \to A^*(G/\Gamma, E_\alpha \otimes E_\beta)$ を入れる。

  この時、DGA $\bigwedge \mathfrak{u}^*$ はDGA $\mathcal{A}^*$ の explicit な Sullivan 極小モデルとなる。

注意 2.3 定理2.1におけるコホモロジーを計算するための複体 A^*_Γ は $\bigwedge \mathfrak{u}^*$ の部分DGA になっている。よって、全ての可解多様体のコホモロジーは実は G から定まるある冪零リー環のコホモロジーの部分空間に同型であるということがわかる。

これは重要な気付きである。例えば、離散群 Γ の表現の"局所理論"について、冪零と可解の両方の場合を統一的に扱うことが出来るようになる。([9])

3. 野水の定理の拡張続論

可解多様体 G/Γ において同型 $H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$ が成り立たないことを見た。野水の定理は可解多様体にシンプルに拡張することは出来ない。可解多様体を考えることは野水の定理の拡張問題として、必ずしも良い設定ではないかもしれない。ここでは拡張の方向性として、新しい可能性を考えたい。

単連結可解リー群はユークリッド空間と同相なので、可解多様体 G/Γ は Eilenberg-Maclane 空間 $K(\Gamma, 1)$ である。よって、その de Rham コホモロジーは群コホモロジー $H^*(\Gamma)$ と同型である。ということで、次のような目標を定めておく。

問題 3.1 群コホモロジー $H^*(\Gamma)$ を何か"連続的な対象"だけを見て計算しよう。

ここで、入れ物の可解リー群 G は忘れてかまわないので、設定を代数的にし直すことにする。

定義 3.2 群 Γ が polycyclic であるとは部分群列

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_k = \{e\}$$

で各 Γ_i が Γ_{i-1} の正規部分群かつ Γ_{i-1}/Γ_i が cyclic であるものが取れることを言う. Γ のランクを $\operatorname{rank}\Gamma = \sum_{i=1}^{i=k} \operatorname{rank}\Gamma_{i-1}/\Gamma_i$ と定義する。

単連結可解リー群の離散部分群はトーションのない polycyclic 群であることが知られている。([12])

ここからは Γ はトーションのない polycyclic 群とする。

定義 3.3 Γ が $\mathbb{Q}$-"代数群"(一般線形群の中の Zariski 閉部分群)$\mathbf{G}$ に"full"に入るとは以下の条件を満たすことである:

1. Γ は $\mathbf{G}$ の部分群。

2. Γ の $\mathbf{G}$ における Zariski 閉包は $\mathbf{G}$ に一致する。

3. $\operatorname{rank}\Gamma = \dim \mathbf{U}(\mathbf{G})$。ここで $\mathbf{U}(\mathbf{G})$ は $\mathbf{G}$ の冪単根基 (unipotent radical)。

トーションのないpolycyclic群Γがfullに入る$\mathbb{Q}$-代数群は常に存在する。特に、Γがfullに入る$\mathbb{Q}$-代数群$\mathbf{G}$で、$\mathbf{U}(\mathbf{G})$の中心化群が$\mathbf{U}(\mathbf{G})$に含まれるものはΓに対して一意に存在する。([12])

注意 3.4 代数群$\mathbf{G}$は、極大簡約部分群$\mathbf{T}$を取ることによって、

$$\mathbf{G} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}(\mathbf{G})$$

と分解する。$\mathbf{U}(\mathbf{G})$の中心化群が$\mathbf{U}(\mathbf{G})$に含まれる、という条件は、$\mathbf{T}$が$\mathbf{U}(\mathbf{G})$に忠実に作用する、と言い換えることが出来る。

以下を示すことが出来る。([6])

定理 3.5 トーションのないpolycyclic群Γが$\mathbb{Q}$-代数群$\mathbf{G}$にfullに入っているとする。このとき、任意の$\mathbf{G}$の代数群としての表現Vに対して、埋め込み$\Gamma \subset \mathbf{G}$はコホモロジーの同型

$$H^*(\mathbf{G}, V) \cong H^*(\Gamma, V)$$

を導く。

ここで$H^*(\mathbf{G}, V)$は代数群の有理コホモロジー([3])と呼ばれるもので、形式的には$H^*(\mathbf{G}, V) = Ext_{\mathbf{G}}(V)$と定義される。簡単に言うと"代数的なカテゴリー"で考えた群コホモロジーである。

注意 3.6 この定理の設定において、$\mathbf{G}$は単連結可解リー群とは異なるものであるので、前章において考えた設定とは本質的に別物である。しかし、冪零の場合に限れば、Nomizuの定理における設定と同一のものであると言える。

Γが単連結冪零リー群Gの格子であるとすると次のことが言える([12]):

- Gはユニポテント$\mathbb{Q}$-代数群$\mathbf{G}$と"見なす"ことが出来る。
- ΓのZariski閉包は$\mathbf{G}$と一致する。

定理によって、コホモロジー$H^*(\Gamma)$は$\mathbf{G}$から、(Γのことを忘れても)計算することが出来る。$\mathbf{G}$の分解を$\mathbf{G} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}(\mathbf{G})$を考えると、コホモロジーの同型

$$H^*(\mathbf{G}, V) \cong H^*(\mathfrak{u}, V)^{\mathbf{T}}$$

が得られる。([3]) ここで、$\mathfrak{u}$は$\mathbf{U}(\mathbf{G})$のリー環。よって、同型

$$H^*(\mathfrak{u}, V)^{\mathbf{T}} \cong H^*(\Gamma, V)$$

が成り立つ。特に、上記注意のようにΓが単連結冪零リー群Gの格子であるとすると,$\mathbf{G} = \mathbf{U}(\mathbf{G})$つまり$\mathbf{T}$は自明より、この時、同型$H^*(\mathfrak{u}) \cong H^*(\Gamma)$が成り立つ。$H^*(\Gamma)$は冪零多様体$G/\Gamma$のコホモロジーに同型であるから,(細かいことを気にしなければ)この同型はNomizuの定理の同型(の有理係数版)である。よって定理は拡張されたNomizuの定理のように見ることが出来る。

ここで得られた定理は(証明も含めて)かなり純粋代数的なものである。そこで、これをNomizuの定理のような形で幾何学的に"表現"してみたい。

Nomizuの定理は多様体$G/\Gamma = K(\Gamma, 1)$のde RhamコホモロジーをGの不変微分形式によって計算する、というものであった。これに習って、次の対象を考える。

- 代数群$\mathbf{G}$に対して、分解$\mathbf{G}=\mathbf{T}\ltimes\mathbf{U}(\mathbf{G})$を考えて、$\mathbf{U}(\mathbf{G})$のリー環$\mathfrak{u}$の双対複体の$\mathbf{T}$-不変部分複体$(\bigwedge\mathfrak{u}^*\otimes V)^{\mathbf{T}}$を考えると、これは$\mathbf{U}(\mathbf{G})$上の$\mathbf{G}$-不変微分形式と見なすことが出来る。

- 群Γに対して、その各元を単体の頂点と見なし、対角作用で移り合う複体を同一と見なすような単体複体$B\Gamma$(Γの分類空間)を考えると、これは$K(\Gamma,1)$である。単体複体には多項式値の de Rham 複体が定義できるので ([13]), $B\Gamma$の de Rham 複体$A^*_{poly}(B\Gamma,V)$を考える。

この時、定理3.5から次のことが言える ([7])

定理 3.7 トーションのない polycyclic 群Γが$\mathbb{Q}$-代数群$\mathbf{G}$に full に入っているとする。このとき、任意の$\mathbf{G}$の代数群としての表現Vに対して、単体複体の射

$$\left(\bigwedge\mathfrak{u}^*\otimes V\right)^{\mathbf{T}}\to A^*_{poly}(B\Gamma,V)$$

でコホモロジーの同型

$$H^*(\mathfrak{u},V)^{\mathbf{T}}\cong H^*(B\Gamma,V)$$

を導くものを作ることが出来る。

$\mathbf{T}$上の多項式環$\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$を$\mathbf{T}$ー加群と考えると、$A^*_{poly}(B\Gamma,\mathbb{Q}[\mathbf{T}])$はDGAになる。また、

$$\left(\bigwedge\mathfrak{u}^*\otimes\mathbb{Q}[\mathbf{T}]\right)^{\mathbf{T}}=\bigwedge\mathfrak{u}^*$$

となるので、次のように言える。

定理 3.8 DGA $\bigwedge\mathfrak{u}^*$はDGA $A^*_{poly}(B\Gamma,\mathbb{Q}[\mathbf{T}])$の explicit な Sullivan 極小モデルである。

参考文献

[1] N. Dungey, A.F.M. ter Elst, D. W. Robinson, Analysis on Lie groups with polynomial growth, Progress in Mathematics **214**, Birkäuser Boston, 2003.

[2] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **8** 1960 289–331 (1960).

[3] G. Hochschild, Cohomology of algebraic linear groups. Illinois J. Math. **5** 1961 492–519.

[4] H. Kasuya, Minimal models, formality and hard Lefschetz properties of solvmanifolds with local systems. J. Differential Geom., **93**, (2013), 269–298.

[5] H. Kasuya, de Rham and Dolbeault Cohomology of solvmanifolds with local systems. Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 4, 781–805.

[6] H. Kasuya, Central theorems for cohomologies of certain solvable groups. arXiv:1311.1310

[7] H. Kasuya, Cohomology of algebraic groups and Sullivan's minimal models. Preprint arXiv:1410.3176

[8] H. Kasuya, Flat bundles and Hyper-Hodge decomposition on solvmanifolds, `arXiv:1309.4264v2 [math.DG]`.to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN

[9] H. Kasuya, Singularity of the varieties of representations of lattices in solvable Lie groups. J. Topol. Anal. DOI: 10.1142/S1793525316500114

[10] G. D. Mostow, Cohomology of topological groups and solvmanifolds. Ann. of Math. (2) **73** 1961 20–48.

[11] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. Ann. of Math. (2) **59**, (1954). 531–538.

[12] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[13] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 269–331 (1978).