

ルート系と graph associahedrons の facet vectors と の関係について *

大阪市立大学・理学研究科[†] 畑中 美帆

Miho Hatanaka

Department of Mathematics, Faculty of Sciences
Osaka City University

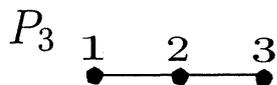
1 連結単純グラフからの graph associahedron の構成方法

この節では、連結単純グラフ G から graph associahedron P_G を構成する方法を紹介する。 G を $n+1$ 頂点を持つ連結単純グラフ、 $V(G)$ を G の頂点集合、 $B(G)$ を以下で定義される集合とする。

$$B(G) := \{I \subset V(G) \mid G|I : \text{connected}\}.$$

ここで、 $G|I$ はグラフ G を I に制限した誘導グラフである。この $B(G)$ を G の graphical building set という。

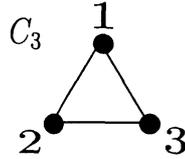
例 1 (1) 以下のパスグラフ P_3 を考える。このパスグラフ P_3 の graphical building set



は、 $\{1, 2, 3, 12, 23, 123\}$ となる。ここで、 1 は集合 $\{1\}$ 、 12 は集合 $\{1, 2\}$ (他同様) を表しているものとする。

出典：「新しい変換群論の幾何」数理解析研究所講究録。
〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138
(独) 日本学術振興会特別研究員 DC2

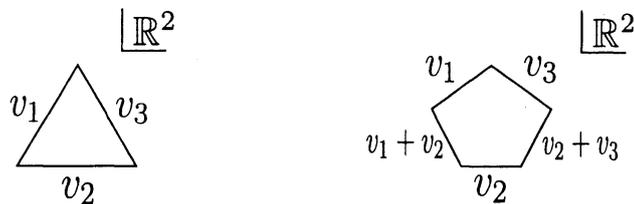
(2) 以下のサイクルグラフ C_3 を考える. このサイクルグラフ C_3 の graphical building



set は $\{1, 2, 3, 12, 23, 31, 123\}$ となる.

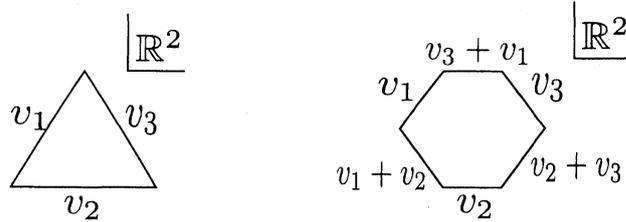
この graphical building set の情報を用いてユークリッド空間に埋め込んだ単体の面をカットすれば, graph associahedron P_G が構成できる. まず, n 次元の単体を用意すると, この単体の facet の数はちょうどグラフ G の頂点の数 $n+1$ と一致する. この単体を n 次元ユークリッド空間に埋め込み, 各 facet の facet vector を $v_1, \dots, v_n, v_{n+1} = -v_1 - \dots - v_n$ とする. ここで, facet vector とは, facet に垂直かつ内向きの primitive vector (i.e, $1, -1$ 以外で割り切れない格子点上のベクトル) のことである. また, v_1, \dots, v_{n+1} のうち, どの n 個も互いに独立になるようにする. facet vector が v_i である facet にグラフの頂点 i を対応させ, その facet を F_i で表す. 次に, graphical building set に元 $I = \{i_1 \dots i_k\}$ があれば, face $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ を k が大きい方から小さい方の順番でカットする. ただし, この face $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ をカットするときは, 新しくできる facet F_I の facet vector が $v_{i_1} + \dots + v_{i_k}$ になるようにカットする. また, グラフ G は連結なので, 頂点集合 $V(G)$ も graphical building set の元になるが, $V(G)$ に対応する face はないため, $V(G)$ は無視する. 従って, graphical building set $B(G)$ の $V(G)$ 以外の元 I に対して, P_G の facet F_I が一つ定まり, P_G の facets の数は $|B(G)| - 1$ となる.

例 2 (1) 上の 3 頂点パスグラフ P_3 の場合は, まず 2 単体を用意し, 2 次元のユークリッド空間に埋め込む (左図). facet vector が v_i となっている facet を F_i で表す. graphical building set に $12, 23$ があるので (123 は頂点集合なので無視), faces $F_1 \cap F_2, F_2 \cap F_3$ を新しい facet vector がそれぞれ $v_1 + v_2, v_2 + v_3$ となるようにカットする (右図).



(2) 上の 3 頂点サイクルグラフ C_3 の場合は, まず 2 単体を用意し, 2 次元のユークリッド

ド空間に埋め込む (左図). (1) と同様に, facet vector が v_i となっている facet を F_i で表す. graphical building set に 12, 23, 31 があるので (123 は頂点集合なので無視), faces $F_1 \cap F_2, F_2 \cap F_3, F_3 \cap F_1$ を新しい facet vector がそれぞれ $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ となるようにカットする (右図).



このようにして連結単純グラフ G から graph associahedron P_G を構成することができる.

2 主定理

この節では, 主定理に必要な補題と主定理を紹介する.

補題 3 G が $n+1$ 頂点を持つサイクルグラフの時, P_G 上の facet vector として A_n 型のルート系がとれる.

例 4 3 頂点サイクルグラフ C_3 を考える. 2次元のユークリッド空間を, 以下のような3次元ユークリッド空間の中の2次元超平面とする.

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

この超平面 H の中に 2 単体を facet vectors が以下になるように埋め込んだとする.

$$v_1 = e_1 - e_2, \quad v_2 = e_2 - e_3, \quad v_3 = e_3 - e_1.$$

ここで, e_1, e_2, e_3 は \mathbb{R}^3 の標準基底である. この時,

$$v_1 + v_2 = e_1 - e_3, \quad v_2 + v_3 = e_2 - e_1, \quad v_3 + v_1 = e_3 - e_2.$$

よって, 3 頂点サイクルグラフ C_3 のすべての facet vectors の集合は A_2 型ルート系と一致する.

補題 5 G を連結な有限単純グラフとする. graph associahedron P_G の facet vectors の集合があるルート系と一致する時, graphical building set $B(G)$ は以下の条件を満たす.

$$I \in B(G) \implies V(G) \setminus I \in B(G). \quad (2.1)$$

この補題の証明には, 以下のルート系 Δ の性質

$$\alpha \in \Delta \implies -\alpha \in \Delta$$

と, $I \in B(G)$ に対応する facet の facet vector が $V(G) \setminus I \in B(G)$ に対応する facet vector のマイナス倍になっていることを用いている.

補題 6 G を連結な有限単純グラフとする. $B(G)$ が (2.1) を満たす必要十分条件は, グラフ G がサイクルグラフか完全グラフであることである.

グラフ G がサイクルグラフか完全グラフであれば明らかに (2.1) を満たす. 逆の証明にはグラフ理論を用いる.

この補題 5, 6 から連結な有限単純グラフ G に対して, graph associahedron P_G の facet vectors の集合がルート系と一致する時, グラフ G はサイクルグラフか完全グラフになることがわかる. サイクルグラフからできる graph associahedron (cyclohedron という) の facet vectors の集合は A 型のルート系になる (補題 3) が, 完全グラフからできる graph associahedron (permutohedron という) の facet vectors の集合はどのルート系にも一致しないことを示す. $n+1$ 頂点を持つ完全グラフからできる graph associahedron の facets の数は $2^{n+1} - 2$ である. 一方で, B_m 型と C_m 型のルート数は $2m^2$, D_m 型のルート数は $2m(m-1)$ である.

もし, 完全グラフから B_m, C_m 型のルート系が現れたとすると,

$$2^n - 1 = m^2$$

を満たす自然数の組 (n, m) が存在する. m は奇数になるので, $m = 2k - 1 (k \in \mathbb{N})$ と表せる. よって

$$2^{n-1} = 2k^2 - 2k + 1$$

が成り立つが, 左辺は偶数, 右辺は奇数なので矛盾する.

もし完全グラフから D_m 型のルート系が現れたとすると,

$$2^n - 1 = m(m-1)$$

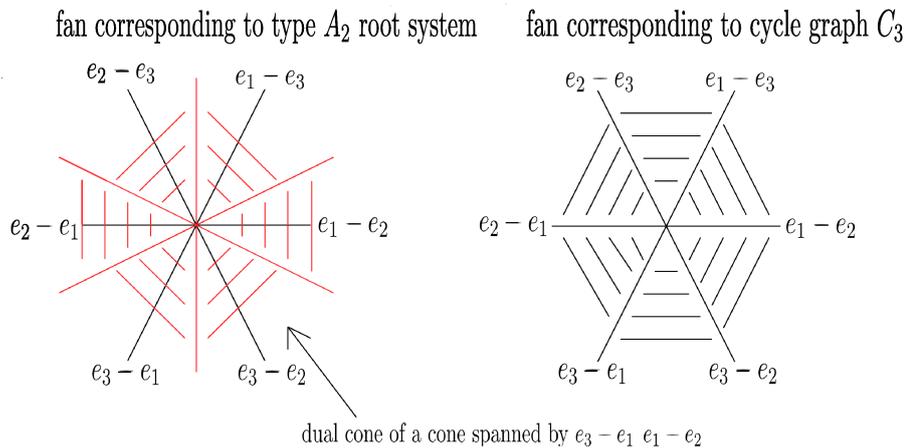
を満たす自然数の組 (n, m) が存在する. しかし両辺で偶奇が異なるので矛盾する.

これらのことから完全グラフから古典型ルート系は現れないことがわかる。例外型ルート系は係数が整数ではないルートがあるので、完全グラフからは現れない。よって以下の定理が成り立つ。

定理 7 G を連結な有限単純グラフとする。 G の graph associahedron P_G の facet vectors の集合がルート系と一致する必要十分条件は、 G がサイクルグラフであることである。 さらに $n+1$ 頂点を持つサイクルグラフからは A_n 型のルート系が現れる。

3 2種類の特異なトーリック多様体のトポロジーの比較

この節では、前節の定理を動機として、 A_n 型ルート系に対応するトーリック多様体 $X_{A_n}^n$ と、サイクルグラフ C_{n+1} から構成されるトーリック多様体 $X_{C_{n+1}}^n$ のトポロジー（主にベッチ数）の比較について述べる。 A_n 型ルート系に対応するトーリック多様体 $X_{A_n}^n$ とは、Weyl chambers を考えることで扇が作れ、その扇に対応するトーリック多様体のことである。この扇の各 maximal cone は、 A_n 型のある n 個のルートの dual cone になっている。サイクルグラフ C_{n+1} から構成されるトーリック多様体 $X_{C_{n+1}}^n$ とは、graph associahedron $P_{C_{n+1}}$ から作られる扇に対応するトーリック多様体のことである。つまり、 A_n 型ルート系に対応する扇は n 個の A_n 型のルートからできる cone の dual cone からできる扇であり、サイクルグラフに対応する扇は n 個の A_n 型のルートからできる cone からできる扇になっている。以下はトーリック多様体が 2 次元の場合のそれぞれの扇である。2 次元の場合は 2 つの扇は同型であるが、高次元では同型ではない。



A_n 型ルート系に対応するトーリック多様体 $X_{A_n}^n$ のベッチ数は以下のようになって

いる.

定義 8 S_{n+1} を $[n+1] := \{1, 2, \dots, n+1\}$ 上の対称群とし, その元を以下のように表す.

$$w = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n+1 \\ w_1 & \dots & w_{n+1} \end{pmatrix} =: w_1 \dots w_{n+1}.$$

また, $w_i > w_{i+1}$ となっている $i \in [n]$ を w の descent という.

$$\text{des}(w) := \#\{\text{descents of } w\}$$

で定義する.

命題 9 [1] A_n 型ルート系に対応するトーリック多様体 $X_{A_n}^n$ の $2i$ 番目のベッチ数は以下で表せる.

$$\beta_{2i}(X_{A_n}^n) = \#\{w \in S_{n+1} \mid \text{des}(w) = i\}.$$

例 10 2次元の場合に $X_{A_2}^2$ のベッチ数を調べる. 対称群 S_3 のすべての元 w と $\text{des}(w)$ を求めると以下ようになる.

$$\begin{array}{cccccc} S_3 \ni w = & 123, & 132, & 213, & 231, & 312, & 321 \\ \text{des}(w) = & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 2 \end{array}$$

よって, $X_{A_2}^2$ のベッチ数は,

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_2 = 4, \quad \beta_4 = 1$$

となる. 同様にすると, $X_{A_3}^3$ のベッチ数は, $\beta_0 = 1, \beta_2 = 11, \beta_4 = 11, \beta_6 = 1$ となる.

サイクルグラフ C_{n+1} から構成されるトーリック多様体 $X_{C_{n+1}}^n$ のベッチ数は以下のようになっている.

命題 11 [2] サイクルグラフ C_{n+1} から作られる graph associahedron $P_{C_{n+1}}$ の h -多項式は以下のようになっている.

$$h(P_{C_{n+1}}; t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 t^k.$$

例 12 2次元の場合に $X_{C_3}^2$ のベッチ数を調べる. Cyclohedron P_{C_3} の h -多項式は, $h(P_{C_3}; t) = 1 + 4t + t^2$. 従って, $X_{C_3}^2$ のベッチ数は, $\beta_0 = 1, \beta_2 = 4, \beta_4 = 1$ となる. 同様にすると, 3次元のトーリック多様体 $X_{C_4}^3$ のベッチ数は $\beta_0 = 1, \beta_2 = 9, \beta_4 = 9, \beta_6 = 1$ となり, $X_{A_3}^3$ のベッチ数と異なる.

参考文献

- [1] A. Postnikov, V. Reiner and L. Williams, *Faces of generalized permutohedra*, Doc. Math. 13 (2008) 207-273.
- [2] R. Simion, *A type-B associahedra*, Advances in Applied Mathematics, 30 (2003) 2-25.