数理解析研究所講究録
第 1968 巻 2015 年 91-97

非特異な扇と閉曲面の三角形分割

大阪市立大学大学院理学研究科
日本学術振興会特別研究員 (DC1) 須山 雄介 *
Yusuke Suyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka City University

1 主定理

複素 n 次元の**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．

$\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトルではられる錐体 σ であって，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる線形部分空間も含まないものをいう．$\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，有理強凸多面錐からなる空でない有限集合であって，次の条件を満たすものをいう：

1. $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する；
2. $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

トーリック幾何の基本定理より，複素 n 次元のトーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇は 1 対 1 に対応する．この対応により，トーリック多様体の多くの幾何的な性質を扇の言葉に翻訳することができる．

$\mathbb{Z}^n$ の基底の一部ではられる錐体を**非特異**な錐体という．扇 Δ が**非特異**であるとは，Δ の各錐体が非特異であることをいう．Δ が**完備**であるとは，Δ の錐体たちが $\mathbb{R}^n$ を覆うことをいう：$\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma = \mathbb{R}^n$. すると，トーリック多様体が滑らか，コンパクトであるための必要十分条件は，対応する扇がそれぞれ非特異，完備であることである．

そこで，滑らかでコンパクトなトーリック多様体が対応する，非特異で完備な扇に注目する．Δ を m 本の edge vectors $v_1, \ldots, v_m$ ではられる非特異な扇とする．抽象的単体複体 K_Δ を

$$\{I \subset \{1, \ldots, m\} \mid \{v_i \mid i \in I\} \text{ は } \Delta \text{ の錐体をはる}\}$$

*d15san0w03@st.osaka-cu.ac.jp

で定め，Δ の **underlying simplicial complex** とよぶ．Δ が $\mathbb{R}^n$ の非特異で完備な扇ならば，K_Δ は単体的 $n-1$ 球面，すなわち $n-1$ 次元球面の三角形分割になる．

任意の単体的 1 球面は，$\mathbb{R}^2$ のある非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になる．一方，各 $n \geq 4$ に対し，単体的 $n-1$ 球面で，$\mathbb{R}^n$ のいかなる非特異で完備な扇の underlying simplicial complex にもならないものが無限に存在する [3, Corollary 1.23]．そこで，次の問題が自然に考えられる：

問題 1.1. 任意の単体的 2 球面は，$\mathbb{R}^3$ のある非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になるか．

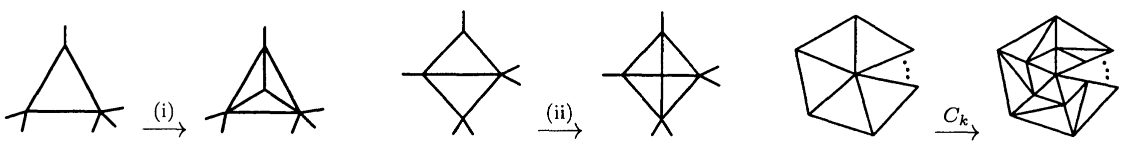
問題 1.1 の反例は知られていない．今回，問題 1.1 の部分的な肯定的結果を得た．単体的 2 球面 K の頂点の次数とは，その頂点を端点にもつ辺の個数をいう．K がもつ次数 k の頂点の個数を $p_K(k)$ で表す．

定理 1.2 (Suyama [6]). K を m_K 頂点の単体的 2 球面とする．$p_K(3)+p_K(4)+18 \geq m_K$ ならば，K は $\mathbb{R}^3$ のある非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になる．特に，18 頂点以下のすべての単体的 2 球面は，非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になる．

2 主定理の証明

単体的 2 球面の数は表 1 の通りである．オイラーの多面体定理より $\sum_{k\geq 3}(6-k)p_K(k) = 12$（たとえば [5, p.190]）だから，単体的 2 球面の最小次数は 3, 4, 5 のいずれかである．このうち，最小次数が 5 のものの数は Brinkmann-McKay [1] により求められた．これにより，ほとんどの単体的 2 球面の最小次数は 3 または 4 であり，定理 1.2 より，19 頂点の単体的 2 球面も，7,475,907,149 種類のうち少なくとも 7,475,907,126 種類は，非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になることがわかる．

補題 2.1. K が $\mathbb{R}^3$ のある非特異で完備な扇の underlying simplicial complex ならば，K に操作 (i), (ii), C_k ($k \geq 3$) を施して得られる単体的 2 球面も非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になる（図 1）．



（操作 C_k において，図の中心の頂点の次数は k であるものとする）

図 1: 操作 (i), (ii), C_k.

証明．K の面の 3 頂点が edge vectors $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^3$ に対応していたとすると，$\det(v_1, v_2, v_3) = 1$ である．操作 (i) で加えられる新しい点に $v_1+v_2+v_3$ を対応させると，$\det(v_1, v_2, v_1 + v_2 + v_3) = \det(v_2, v_3, v_1 + v_2 + v_3) = \det(v_3, v_1, v_1 + v_2 + v_3) = 1$ だから，対応する扇は非特異で完備である．ゆえに補題は操作 (i) に対し成り立つ（図 2）．

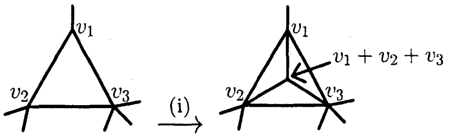


図 2: 操作 (i).

K が図 3 のような部分複体を含み，その頂点に edge vectors $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{Z}^3$ が図 3 のように対応していたとすると，$\det(v_1, v_2, v_3) = \det(v_4, v_3, v_2) = 1$ である．操作 (ii) で加えられる新しい点に v_2+v_3 を対応させると，$\det(v_1, v_2, v_2+v_3) = \det(v_3, v_1, v_2+v_3) = \det(v_2, v_4, v_2 + v_3) = \det(v_4, v_3, v_2 + v_3) = 1$ だから，対応する扇は非特異で完備である．ゆえに補題は操作 (ii) に対し成り立つ．

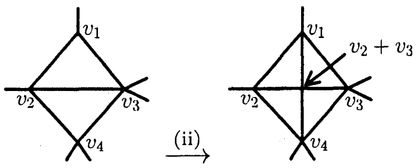


図 3: 操作 (ii).

K が図 4 のような部分複体を含み，その頂点に edge vectors $v, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^3$ が図 4 のように対応していたとすると，各 $i = 1, \ldots, k$ に対し $\det(v, v_i, v_{i+1}) = 1$ である（ただし $v_{k+1} = v_1$）．各 $i = 1, \ldots, k$ に対し，操作 C_k で v と v_i の間に加えられる点に $v+v_i$ を対応させると，$\det(v, v+v_i, v+v_{i+1}) = \det(v_i, v+v_{i+1}, v+v_i) = \det(v_i, v_{i+1}, v+v_{i+1}) = 1$ だから，対応する扇は非特異で完備である．ゆえに補題は操作 C_k に対し成り立つ． □

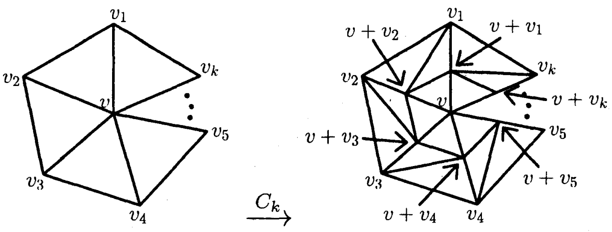


図 4: 操作 C_k.

頂点数	単体的 2 球面の数	うち最小次数 5 のものの数 [1]
4	1	0
5	1	0
6	2	0
7	5	0
8	14	0
9	50	0
10	233	0
11	1,249	0
12	7,595	1
13	49,566	0
14	339,722	1
15	2,406,841	1
16	17,490,241	3
17	129,664,753	4
18	977,526,957	12
19	7,475,907,149	23

表 1: 単体的 2 球面の数.

定理 1.2 は m_K に関する帰納法で示される．$m_K = 4$ の場合，K は正四面体の境界で，これは $\mathbb{C}P^3$ の扇の underlying simplicial complex になる．$m_K \geq 5$ を仮定する．

(1) K が次数 3 の頂点をもつ場合．その頂点に接する頂点はすべて次数 4 以上である（2 個の次数 3 の頂点が接していたとすると，K は正四面体の境界でなければならなくなり，$m_K \geq 5$ に反する）．ゆえに，K に操作 (i) の逆操作ができて，単体的 2 球面 K' を得る．$p_{K'}(3) + p_{K'}(4) \geq p_K(3) + p_K(4) - 1$ だから，$p_{K'}(3) + p_{K'}(4) + 18 \geq p_K(3) + p_K(4) + 18 - 1 \geq m_K - 1 = m_{K'}$ である．帰納法の仮定より，K' は非特異で完備な扇の underlying simplicial complex だから，補題 2.1 より K もそうである．

(2) K が次数 3 の頂点をもたず，次数 4 の頂点をもつ場合．仮定より，その頂点に接する頂点はすべて次数 4 以上だから，操作 (ii) の逆操作ができて，単体的 2 球面 K' を得る．$p_{K'}(3) + p_{K'}(4) \geq p_K(3) + p_K(4) - 1$ だから，(1) と同様の議論で K は非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になることがわかる．

(3) K が次数 3, 4 の頂点をもたない場合（最小次数 5 の場合）．定理 1.2 の仮定より $m_K \leq p_K(3) + p_K(4) + 18 = 18$ だから，表 1 より，K は 22 種類のいずれかになる．

次数 $k \geq 5$ の頂点 v であって，v に接する頂点がすべて次数 5 で，さらにそれらに接する頂点がすべて次数 5 以上であるものが存在する場合，操作 C_k の逆操作ができて，単体的 2 球面 K' を得る．$m_{K'} = m_K - k < 18 \leq p_{K'}(3) + p_{K'}(4) + 18$ だから，帰納法

の仮定より，K' は非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になる．ゆえに補題 2.1 より K もそうである．

22 種類の単体的 2 球面をリストアップすると，そのような単体的 2 球面は 22 種類のうち 12 種類であることがわかる．残りの 10 種類に対しては，補題 2.1 の操作のいかなる逆操作もできない．そこで 10 種類の単体的 2 球面のそれぞれに対し，コンピュータでベクトルをランダム生成することにより，それを underlying simplicial complex にもつ非特異で完備な扇を具体的に構成した (詳細は [6])．これで定理 1.2 の証明が完成した．

3 種数が正の閉曲面の場合

さらに，種数が正の向きづけ可能な閉曲面の場合でも，扇を多重扇に置き換えることで同様の問題が考えられる．多重扇とは，錐体の重なりや表裏も考えたような概念である．

$\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐全体を $\mathrm{Cone}(\mathbb{Z}^n)$ で表す．$\mathrm{Cone}(\mathbb{Z}^n)$ 上の狭義の順序 $\prec$ を，τ が σ の真の面であるとき $\tau \prec \sigma$ とすることにより定める．Σ を，狭義の順序 $<$ をもつ有限集合で，これに関し最小元 $*$ をもつものとする．$C : \Sigma \to \mathrm{Cone}(\mathbb{Z}^n)$ を，次を満たす写像とする：

1. $C(*) = \{0\}$;
2. $I < J \Rightarrow C(I) \prec C(J)$;
3. 各 $J \in \Sigma$ に対し，C の $\{I \in \Sigma \mid I \leq J\}$ への制限は $\mathrm{Cone}(\mathbb{Z}^n)$ の中への順序同型.

各 $0 \leq m \leq n$ に対し，$\Sigma^{(m)} = \{I \in \Sigma \mid \dim C(I) = m\}$ とおき，$w^+, w^- : \Sigma^{(n)} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を，w^+ と w^- の値が同時に 0 になることがないような写像の組とする．

定義 3.1 (Hattori-Masuda [4]). $\Delta = (\Sigma, C, w^{\pm})$ を n 次元の多重扇とよぶ.

多重扇 $\Delta = (\Sigma, C, w^{\pm})$ が非特異であるとは，$C(\Sigma)$ のすべての錐体が非特異であることをいう．Σ を Δ の **underlying simplicial complex** とよぶ.

Császár 多面体 [2] は 7 個の頂点，21 本の辺，14 個の面をもつ多面体で，その境界はトーラスの三角形分割を与える．これは，トーラスの三角形分割で 7 頂点をもつ，唯一のものである．Császár 多面体の境界は，頂点集合 $\{1, \ldots, 7\}$ 上の，次の 14 個の単体とその面単体からなる単体複体である：

$$\{1,2,6\}, \{2,3,5\}, \{3,5,6\}, \{3,4,6\}, \{4,6,7\}, \{2,3,7\}, \{2,6,7\},$$
$$\{1,5,6\}, \{2,4,5\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,3,7\}, \{4,5,7\}, \{1,5,7\}.$$

これが我々の問題に対する反例を与える．

定理 3.2. Császár 多面体の境界は，3 次元の非特異な多重扇の underlying simplicial complex にならない．

注意 3.3. 多重扇 Δ が多様体などの幾何的な対象と対応するのは Δ が完備（[4]）な場合であるが，この条件は証明には不要なので，ここでは仮定しない．

証明. そのような多重扇 Δ は，Császár 多面体の各面に対して，その 3 頂点に対応する edge vectors を並べた行列の行列式が ± 1 でなければならない．Császár 多面体の面は 14 個あるから，Δ の edge vectors の成分は，Császár 多面体の面に対応する 14 個の連立方程式を満たさなければならないことになる．しかし，この連立方程式の解が mod 2 で存在しないことを示すことができるので，これは整数解ももたない．ゆえに，そのような Δ は存在しない． $\square$

トーラスの三角形分割で，3 次元の非特異な多重扇の underlying simplicial complex にならないものが他にもあるかどうかは未解決である．一方，種数 2 以上ではそのようなものが無限に存在する．

定理 3.4. 各 $g \geq 2$ に対し，種数 g の向きづけ可能な閉曲面 gT の三角形分割であって，3 次元のいかなる非特異な多重扇の underlying simplicial complex にもならないものが無限に存在する．

証明. 頂点集合 $\{1,\dots,10\}$ 上の，次の 24 個の単体とその面単体からなる単体複体 K は $2T$ の三角形分割を与える：

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{1,5,7\},\{1,6,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},$$
$$\{2,3,6\},\{2,4,8\},\{2,5,7\},\{2,5,9\},\{2,6,9\},\{2,7,8\},\{3,5,6\},\{4,5,8\},$$
$$\{4,5,9\},\{4,6,7\},\{4,7,10\},\{4,9,10\},\{5,6,8\},\{6,7,9\},\{7,8,10\},\{8,9,10\}.$$

まず，K が 3 次元の非特異な多重扇の underlying simplicial complex にならないことが Császár 多面体の場合と同様の議論で示せる．この証明では，24 個の面に対応するすべての方程式を使う必要はない．たとえば，面 $\{8,9,10\}$ に対応する方程式がなくても解をもたないことが示せる．よって，任意の $n \geq 0$ と，nT の任意の三角形分割 K' に対し，K から面 $\{8,9,10\}$ を取り除いたものと，K' から面を 1 個取り除いたものとを境界で貼り合わせて得られる三角形分割もまた，3 次元の非特異な多重扇の underlying simplicial complex にならない．これの実現の種数は $n+2$ だから，各 $g \geq 2$ に対し，gT の三角形分割であって，3 次元の非特異な多重扇の underlying simplicial complex にならないものが無限に存在することになる． $\square$

参考文献

[1] G. Brinkmann and B. D. McKay, *Construction of planar triangulations with minimum degree 5*, Discrete Math., **301** (2005), 147–163.

[2] Á. Császár, *A polyhedron without diagonals*, Acta Sci. Math. Universitatis Szegediensis **13** (1949), 140–142.

[3] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.

[4] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math., **40** (2003), 1–68.

[5] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[6] Y. Suyama, *Simplicial 2-spheres obtained from non-singular complete fans*, to appear in Far Eastern Mathematical Journal.