

Extracting the geometry of an acoustic enclosure from dynamical back-scattering data: an inverse problem for the wave equation

群馬大学大学院工学研究科 池畠 優 (Masaru IKEHATA)
Graduate School of Engineering, Gunma University
Kiryu 376-8515, Japan

AMS: 35R30

KEY WORDS: inverse obstacle scattering problems, enclosure method, wave equation, modified Helmholtz equation, dynamical data, back-scattering data

1 序

この論文では、波動方程式によって支配される波の散乱の逆問題についての著者の最近の研究の概要と、今後の解決すべき問題について論じる。

1.1 問題

ここで考える問題はきわめて素朴であり、次のように述べられる。壁面で囲まれた閉じた領域内において、ある瞬間に波を発生させる。波は壁へ向かって進み、やがて壁面にぶつかり反射波を生成する。反射波の一部は、波を発生させた場所にやがて戻ってくる。その戻ってきた波の波形に、壁面の場所や形状についてのどんな情報が埋もれているだろうか。これについては部屋の幾何を音波を用いて推測する問題を論じている [35] が興味深い。しかし、冒頭から、用いるデータは TOA (time of arrival) のみで、そのデータを使って部屋の形状をどう推測するかという話に問題が置き換えられ、音波の支配方程式の解を用いた議論は一切あらわれない。また、壁面の形状については、平坦であるとかいろいろ単純な設定に置き換えて議論しているようである。詳しくは [35] およびそこにある文献を参照していただきたい。

我々は、正面からこれを偏微分方程式に対する逆問題として定式化する。壁面で囲まれた閉じた領域として、 \mathbf{R}^3 内の滑らかな境界をもつ有界かつ連結な開集合 D を考える。こ

の論文では、波は次の初期境界値問題の解 $u = u_f(x, t)$ を意味する:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \text{ in } D \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= 0, \quad \partial_t u(x, 0) = f(x) \text{ in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ on } \partial D \times]0, T[. \end{aligned}$$

ここで、 $0 < T < \infty$, ν は ∂D 上の外向き単位法線ベクトル場、波は初期データ f によって発生したとし $f \in L^2(D)$ かつその台 $\text{supp } f$ は D の中に含まれるとする。境界条件は壁面が音響的に硬いことを意味する。他の境界条件も考えられるが (例えば [28]), 今回はこれに限定する。解のクラスは弱解とするが、すでに出来上がっていることであり、ここではその詳細の叙述は省略する ([3] および [14, 17] を参照せよ)。

すると問題は、与えられた f に対する $u_f(x, t)$ の $x \in \text{supp } f$ および $t \in]0, T[$ における値から ∂D についての情報を抽出することと述べられる。ここでは、 f として、その閉包が D に含まれる開球 B の特性関数 χ_B で与えられる場合に限ることにする:

$$f(x) = \chi_B(x).$$

B の中心を p , その半径は η とする。 η は非常に小さいことを想定していて、点 p に集中した Dirac の delta 関数 $\delta(x - p)$ の不連続性に重点を置いた荒い近似が f (の定数倍) と考えればよい (軟化子では不連続性がないので我々の目的には適当ではない)。distribution $\delta(x - p)$ をそのまま実現することは現実には不可能であるから、この関数 f でどうなるかを考えるほうがより実際的ではないかと考えている。

まず気になるのは一意性があるかということである。 $f = \chi_B$, $D = D_1, D_2$ に対する u_f をそれぞれ u_f^1, u_f^2 と書く。十分大きい $T < \infty$ を固定したとき $u_f^1 = u_f^2$ on $B \times]0, T[$ から $D_1 = D_2$ が言えるかが問題である。これに対してはまだ結果はないと思う。一つの部屋内の固定した一点近くにおける有限時間での観測データからそれに蟻の巣のようなトンネルでつながったすべての部屋の情報を完全に抽出することは極めて難しいと思う。数学的には何らかの超越的な論法が必要になるであろう。[22, 23, 31, 32] ではさまざまな一意性の定理が証明されているがそこで展開されている証明の議論がこの問題に適用できるのか筆者にはわからない。

この論文では、全体についての再構成は目的とせず、問い方を控え目にする。 ∂D のどんな情報が u_f on $B \times]0, T[$ に含まれているのか?

この問題に対して著者が創始した囲い込み法を適用してみる。その前に囲い込み法についてのここ五年間ぐらいにおける研究状況について簡単に振り返ってみよう。

1.2 時間に依存したデータを用いた囲い込み法概観

囲い込み法は、支配方程式が楕円型である場合における逆問題が出発点であった [5, 7]。現在でもその適用範囲は拡大するとともに深化し続けており (例えば [19, 16, 34]), 止まることはないであろう。しかし、時間に依存した観測データがあらわれる、熱方程式あるいは

は波動方程式に対する逆問題のように、支配方程式が楕円型でない重要で興味深い逆問題がたくさん存在し、これらに対して囲い込み法がどうなるかは、筆者にとって、当初から興味のあるところであった。そのとっかかりになったのが、次に述べる逆源泉問題である。

1.2.1 逆源泉問題

熱方程式に対する逆源泉問題は基本的な問題であり、さまざまな応用が期待される。熱伝導体中の未知熱源の場所や形についての情報を、物体表面における有限観測時間における温度および熱流束の組から抽出する逆問題は基本的で重要な逆問題で逆源泉問題と呼ばれる。[10]では、囲い込み法が熱方程式に対する逆源泉問題へ適用できることを指摘した。この論文の意義は、逆向き熱方程式の指数関数解の、熱方程式に対する逆問題への応用の方法を与えた点にある。指数関数解とは

$$v(x, t) = e^{-\tau t} e^{x \cdot z}$$

という形の解で、 τ はパラメータ、 z は $x \in \mathbf{R}^n$ および $t \in \mathbf{R}$ に独立なベクトルで、

$$z = \sqrt{\tau} \omega, \tau > 0 \quad (1.1)$$

または

$$z = c\tau \left(\omega + i \sqrt{1 - \frac{1}{c^2\tau}} \omega^\perp \right), \tau > 1/c^2 \quad (1.2)$$

という形で与えられる。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ 、 ω は実の単位ベクトル、 ω^\perp は ω に直交する実の単位ベクトルである。 $c > 0$ は後に [15] で仮想 slowness と呼んだパラメータである。そう呼んだ理由は、(1.2) の z に対して、等式 $|v(x, t)| = e^{\tau(-t+cx \cdot \omega)}$ が成り立ち、この右辺にあらわれた関数は、波動方程式 $c^2 \partial_t^2 u - \Delta u = 0$ を満たすからである。

(1.1) および (1.2) で与えられる z は方程式 $z \cdot z = \tau$ を満たし、したがって v は、熱方程式の形式的共役である逆向き熱方程式 $\partial_t v + \Delta v = 0$ を全時空で満たすことに注意しよう。

この源泉問題の結果を受けて、囲い込み法の可能性を追求するために次に進むべきは、Laplace 方程式に対する Cauchy 問題の熱方程式版を考えることである。それは [6] から [9] をたどることに対応する。それが次に述べる熱伝導における非適切問題と呼ばれる問題である。

1.2.2 熱伝導における非適切問題

熱伝導体の表面の一部における有限観測時間における温度および熱流束の組から、その表面からできるだけ離れた、内部の指定した点における温度の時間発展についての情報を抽出する問題は、応用上重要な典型的な逆問題である。[13]では、支配方程式が熱方程式に帰着される場合においてこの問題を考察し、囲い込み法の考え方による具体的な抽出公式を確立した。その核心は、逆向き熱方程式の通常の基本解とは異なる、大きなパラメータを持った特別な基本解を構成しパラメータを無限大にしたときの挙動を調べることでなされ

た。副産物として熱方程式に対する Carleman 型の公式も得られたが、これは Laplace 方程式の場合の Yarmukhamedov の結果 [36] の熱方程式版になっている。

さて、ここまで来ると、楕円型方程式に対する境界値逆問題における囲い込み法の展開 [5, 7, 8] に対応して、本丸である、熱や波動方程式における不連続性の抽出問題への囲い込み法の可能性を追求したくなる。

1.2.3 熱伝導体内の不連続性の抽出

熱伝導体中の未知の介在物、あるいは中に発生した、腐食による空洞、亀裂の場所や形についての情報を物体表面における有限観測時間における温度および熱流束の有限個の組から抽出する逆問題もまた基本的で重要な逆問題で熱方程式等を使って定式化される。この問題を、まずは空間 1 次元の場合について考察し、囲い込み法を使ったそれらの情報の抽出公式を [11] で確立した。

この論文で提出された鍵となるアイデアは、一般に複素数 z をパラメタとする、解の時間に関する次の積分変換を考えることである：

$$w(x, z) = \int_0^T e^{-zt} u(x, t) dt.$$

こうすることで、非同次変形 Helmholtz 方程式に対する逆問題へ帰着されるのであるが、 $\text{Re } z \rightarrow \infty$ のとき非同次項が熱の場合は任意の T 、波動の場合は十分大きい T に対して無視できることがわかり囲い込み法が適用できるということである。

さらに進んで、このアイデアは空間二、三次元の場合にも適用できることがわかり [20]、空洞の凸包および物体外部の任意の点と空洞との距離の情報を抽出する公式を得た。この結果は [12] で提起したいくつかの予想に答えている。

一方 [21] では、[20] の方法を介在物の場合へ適用し、介在物の凸包、物体外部の任意の点と介在物との距離および物体内の任意の点を中心とし介在物を含む最小の球の情報を抽出する公式を確立するとともに、後述する [14] のアイデアを取り入れ、一組の境界上の温度および熱流束から介在物の表面からの“深さ”という新たな情報も抽出できることがわかった。この最後に述べた結果はおおむね [8] に対応していると言えよう。

これらの研究から、時間に依存したデータを使った逆問題における、囲い込み法的应用において、変形 Helmholtz 方程式の解の漸近挙動が、大きな役割を果たすことを理解できた。それらを踏まえて一般的枠組みに纏め上げたのが [15] である。さらにこの論文では、背景となる物体が非均質かつ等方的で既知の場合に、その中に埋め込まれた非均質かつ非等方的な介在物の凸包の抽出公式を変形 Helmholtz 方程式の複素幾何光学解を構成して与えた。その際、仮想 slowness というパラメタを導入し、それを大きくとってゼロ階項の増大を防ぐ、というアイデアを導入して、予想された解の構成の困難を克服した。

1.2.4 物体による波の散乱の逆問題

物体から離れた場所で、初期データを与えて波を発生させ、その波を物体に当て散乱させる。散乱された波を物体から離れた場所で有限時間観測し、得られたデータから物体の

位置あるいは形状についての情報を抽出する問題は典型的な逆問題である。[14]では、この問題に対して、未知の物体を囲む既知の曲面上における、有限観測時間における波形データから、曲面の外部においた初期データの台（発信源）と物体との距離を、陽に与える簡潔な公式を確立した。さらに進んで[17]では、初期データを発生させた場所で観測された波、すなわち、後方散乱データから物体のどんな情報が抽出できるかについて考察した。その結果、この場合でも囲い込み法が適用できて、物体の表面における境界条件が消散的または物体の内と外で屈折率が異なる場合について、ある一定時間以上観測された後方散乱データから、初期データの台と物体との距離が抽出できることがわかった。データを発生させる場所と観測する場所が局所化されている場合における囲い込み法の新しい展開を与えた点にこの結果の意義がある。

これらはすべて外部問題あるいは全空間における問題であったのだが、ここで展開した方法は、今後この型の逆問題への基本的方法を与えると期待される。

2 アイデアと獲得した知見

次の二つからなる。

(1) 次の $x \in D$ の関数を導入する:

$$w_f(x; \tau) = \int_0^T e^{-\tau t} u_f(x, t) dt, \quad \tau > 0.$$

w_f の支配方程式は次のようになる。

$$(\Delta - \tau^2)w + f(x) = e^{-\tau T}(\partial_t u_f(x, T) + \tau u_f(x, T)) \text{ in } D,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial D.$$

非同次項 $e^{-\tau T}(\partial_t u_f(x, T) + \tau u_f(x, T))$ および w_f の定義域の境界 ∂D が未知となる。

(2) 囲い込み法を $w = w_f$ に適用する。もちろんここが工夫を要するところである。

結果として得られた知見は主に次の二つである:

- データから、 ∂D と $\text{supp } f$ との距離 $\text{dist}(\partial D, \text{supp } f) = \inf_{x \in \partial D, y \in \text{supp } f} |x - y|$ を抽出できる。このとき $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}$ は $\text{dist}(\{x\}, \text{supp } f) > \text{dist}(\partial D, \text{supp } f)$ を満たす $x \in \mathbf{R}^3$ に含まれる。これが $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}$ の上からの評価である。これは外部問題において展開した[17]のアイデアをほぼ踏襲して得られる。

- データから、波が最初にあたる ∂D 上の点における Gauss 曲率と平均曲率を含んだ量を抽出できる。これが主結果であるが、[17]よりも踏み込んだ考察が必要になる。

ところで、なぜ囲い込み法を用いるのか? 例えば、もともとの時間依存の問題の解の固有関数展開から ∂D の情報を抽出してはどうか。これは大変困難な接近の方法であると思われる。熱方程式に対する類似の問題に対してその方法を適用した経験からすると、固有値、固有関数から作られるある特殊関数の漸近挙動を調べることになるが、一次元の問題ですら ([11] の Appendix) すでに固有値、固有関数の詳しい知識を使ってようやくなされる。

また, 例えば [33] の第三章で展開されている, 時間依存の問題の解を振動積分で書く方法 (C^∞ を法として) を応用してはどうかについては検証したわけではないが, その適用にかなり制限があると思う.

3 距離の抽出

まず特別な解 v を用意する. $f \in L^2(D)$ の \mathbf{R}^3 全体への 0 拡張を \tilde{f} によってあらわす. このとき次の方程式の弱解 $v = v_f(x; \tau) \in H^1(\mathbf{R}^3)$ がただ一つ存在する:

$$(\Delta - \tau^2)v + \tilde{f}(x) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3.$$

実際 v は次の積分表示をもつ:

$$v_f(x) = v_f(x; \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

$f = \chi_B$ としていたからより具体的に

$$v_f(x) = v_f(x; \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_B \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbf{R}^3$$

と書かれる. v_f はすべての $x \in \mathbf{R}^3$ において $\tau \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. この点は楕円型方程式において用いた複素指数関数解 [5] とは決定的に違うところである. しかも固定した初期データ f に依存して定めていることに注意されたい. このアイデアは [14] に始まる.

この節では次の定理を説明する.

定理 A ([18]). 観測時間 T は

$$T > 2 \text{dist}(\partial D, B) \tag{3.1}$$

を満たすとせよ. このとき $\tau_0 > 0$ が存在してすべての $\tau \geq \tau_0$ に対して

$$\int_B (w_f - v_f) dx > 0.$$

そして公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log \int_B (w_f - v_f) dx = -\text{dist}(\partial D, B) \tag{3.2}$$

が成り立つ.

いくつかの注意を述べる.

- (3.2) は, B と ∂D との距離 $\text{dist}(\partial D, B)$ を B 上の w_f から, したがって $B \times]0, T[$ 上の u_f から抽出する. 単に波形を '見る' のではなく, その処理の仕方を与えている. $\text{dist}(\partial D, B)$ が得られれば $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}$ の上からの評価 (囲い込み) が得られるのは言わずもがなである. B の場所を少し変えて同じ観測をすればその評価はよりよくなるはずである (図 1 を見よ).

- T の下からの制限 (3.1) は自然である. なぜなら, $2\text{dist}(\partial D, B)$ は $t = 0$ において ∂B 上の点を発し, ∂D 上の点で反射し, ∂B 上の点に戻ってくる, 速さが 1 の信号の最短到達時間であるから.

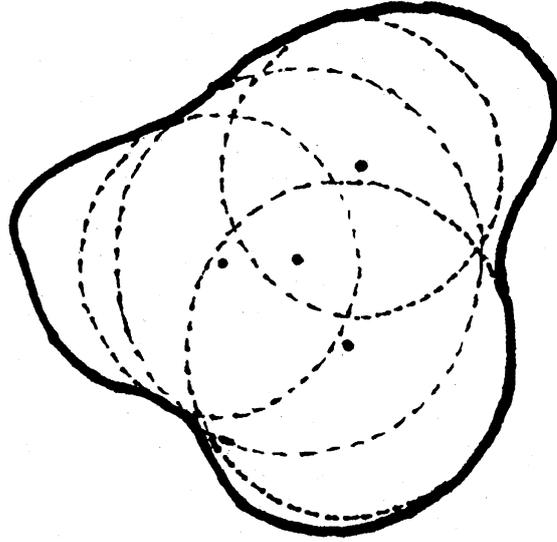


図 1: 黒丸は球の中心の位置をあらわす。

定理 A の応用として, 初期データを B で与えるだけでなく, さらに点 p の近くで無限個与えて同じ場所で波を観測することをすれば, もとの B から発した波が最初にぶつかる ∂D 上の点の位置をすべて抽出できることを述べよう。

点 p に最も近い ∂D 上の点全体の集合を $\Lambda_{\partial D}(p)$ であらわす。すなわち, $d_{\partial D}(p) = \inf_{x \in \partial D} |x - p|$ とおいたとき, $\Lambda_{\partial D}(p) \equiv \{x \in \partial D \mid |x - p| = d_{\partial D}(p)\}$ と書ける。 B から発した波が最初にぶつかる ∂D 上の点は $\Lambda_{\partial D}(p)$ の各点である。

T は (3.1) を満たすとする。まず $f = \chi_B$ に対する u_f を $B \times]0, T[$ 上で観測して得られたデータから, (A) により $\text{dist}(\partial D, B)$ を得る。簡単な公式

$$d_{\partial D}(p) = \text{dist}(\partial D, B) + \sqrt{\frac{|\partial B|}{4\pi}},$$

により $d_{\partial D}(p)$ が得られたと言ってもよい。問題は, $\Lambda_{\partial D}(p)$ 上の各点の位置の決定である。アイデアは, 点 p から各方向 $\omega \in S^2$ に向かって進んで, その方向に $\Lambda_{\partial D}(p)$ 内の点があるかどうかを判定することである。その手続きは以下のようである。

叙述の簡単のため T は十分大きいとする。

(i) $\omega \in S^2$ を選ぶ。 p から ω 方向へ少し進んだ点 $p + s\omega$ ($0 < s < d_{\partial D}(p)/2$) を考える。

(ii) 点 $p + s\omega$ を中心とする, 十分小さい半径を持つ開球 B' の特性関数を初期データ $f = \chi_{B'}$ として波を発生させ, u_f を $B' \times]0, T[$ 上で観測する。そして定理 A と上の説明により $d_{\partial D}(p + s\omega)$ を抽出する。

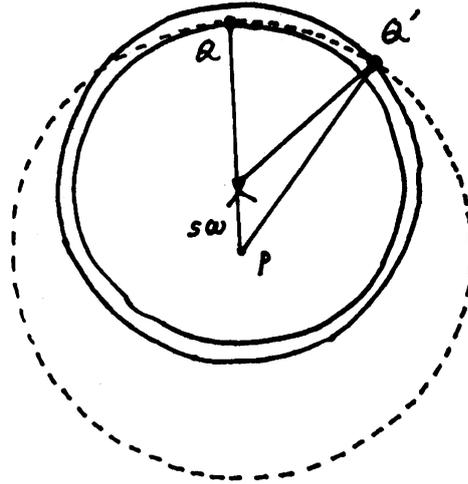
(iii) このとき次のことがわかる (図 2 を見よ):

もし $p + d_{\partial D}(p)\omega$ が ∂D 上にあれば, $d_{\partial D}(p + s\omega) = d_{\partial D}(p) - s$ が成り立つ;

もし $p + d_{\partial D}(p)\omega$ が ∂D 上になければ, $d_{\partial D}(p + s\omega) > d_{\partial D}(p) - s$ が成り立つ。

したがって $d_{\partial D}(p + s\omega) = d_{\partial D}(p) - s$ かどうかで $p + d_{\partial D}(p)\omega \in \Lambda_{\partial D}(p)$ かどうか判定できる. 任意の $\Lambda_{\partial D}(p)$ 上の点 q はかならず適当な方向 ω を用いて $q = p + d_{\partial D}(p)\omega$ と書けるからこれで完全に $\Lambda_{\partial D}(p)$ の各点をとらえることができる.

$q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ がわかれば, $\nu_q = (q - p)/d_{\partial D}(p)$ より ν_q がわかり, したがって q における ∂D の接平面が決定される. p に最も近い ∂D 上の点とその点における ∂D の‘線形近似’がわかるということである.



$$\overline{p\bar{a}} = \overline{p\bar{a}'} = d_{\partial D}(p)$$

図 2: 黒い線であらわされる 2 本の閉曲線は $p + s\omega$ を中心とする二つの球面の断面である.

3.1 定理 A の証明の概略

定理 A は次の評価からの直接の帰結である.

定数 $C_i > 0$, $\mu_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ および $\tau_0 > 0$ が存在してすべての $\tau \geq \tau_0$ に対して

$$C_1 \tau^{\mu_1} \leq e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx \leq C_2 \tau^{\mu_2}. \quad (3.3)$$

証明は [17] と同じ線に沿ってなされる. 特に下からの評価が本質的で工夫を要するところである.

下からの評価は次のようになされる.

- 指示関数

$$\tau \mapsto \int_B (w_f - v_f) dx,$$

の積分表現と $v_f \in H^1(\mathbf{R}^3)$ であることを使って, すべてを次の積分の下からの評価に帰着させる:

$$J_f(\tau) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (|\nabla v_f|^2 + \tau^2 |v_f|^2) dx.$$

- 部分積分により $J_f(\tau)$ を

$$J_f(\tau) = - \int_{\partial D} \frac{\partial v_f}{\partial \nu} v_f dS$$

と書き Laplace の方法を適用する. その際あくまで下からの評価で十分であることに注意する.

ではもう少し具体的にみよう. まず上からの評価を簡単に説明しよう. 指示関数の積分表現とは次のような等式である:

$$\begin{aligned} \int_B (w_f - v_f) dx &= J_f(\tau) + \int_D (|\nabla \epsilon_f|^2 + \tau^2 |\epsilon_f|^2) dx \\ &\quad - e^{-\tau T} \int_D F_\tau(x, T) (v_f(x) - \epsilon_f(x)) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで $\epsilon_f = w_f - v_f$ および $F_\tau(x, T) = \partial_t u_f(x, T) + \tau u_f(x, T)$ である. この右辺に, $\tau \rightarrow \infty$ のときの以下の評価を適用する:

$$\int_D (|\nabla \epsilon_f|^2 + \tau^2 |\epsilon_f|^2) dx = O(\tau^2 e^{-2\tau \text{dist}(\partial D, B)} + e^{-2\tau T});$$

$$\int_D (|\nabla v_f|^2 + \tau^2 |v_f|^2) dx = O(\tau^{-2}).$$

すると次の評価を得る:

$$\begin{aligned} e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx &= e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} J_f(\tau) \\ &\quad + O(\tau^2 + e^{-2\tau(T - \text{dist}(\partial D, B))}) + O(\tau^{-1} e^{-\tau(T - 2\text{dist}(\partial D, B))}) \\ &\quad + O(\tau e^{-\tau(T - \text{dist}(\partial D, B))} + e^{-2\tau(T - \text{dist}(\partial D, B))}). \end{aligned}$$

これと

$$|J_f(\tau)| = O(\tau e^{-2\tau \text{dist}(\partial D, B)})$$

を使うと, $T \geq 2\text{dist}(\partial D, B)$ であれば

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-2} e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx < \infty$$

を結論する. これが指示関数の上からの評価である.

下からの評価は (3.4) において正の部分をとって

$$\begin{aligned} e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx &\geq e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} J_f(\tau) + O(\tau^{-1} e^{-\tau(T - 2\text{dist}(\partial D, B))}) \\ &\quad + O(\tau e^{-\tau(T - \text{dist}(\partial D, B))} + e^{-2\tau(T - \text{dist}(\partial D, B))}). \end{aligned}$$

ここでこの右辺の $J(\tau)$ を部分積分で

$$J_f(\tau) = \frac{\tau}{(4\pi)^2} \int_{\partial D \times B \times B} K_\tau(x, y, y') dS(x) dy dy'$$

と書く。ここで

$$K_\tau(x, y, y') = \left(\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{\tau|x-y|^2} \right) \frac{(y-x) \cdot (-\nu_x)}{|x-y||x-y'|} e^{-\tau(|x-y|+|x-y'|)}.$$

これに Laplace の方法を適用するのであるが、下からの評価のみでよく、例えば [21] の Appendix の論法で $\mu \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \tau^\mu e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} J_f(\tau) > 0$$

が成り立つことがわかる。よって $T > 2\text{dist}(\partial D, B)$ であれば指示関数の下からの次の評価を得る:

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \tau^\mu e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx > 0.$$

以上が (3.3) の証明の概略である。

なお定理 A と変形 Helmholtz 方程式に対する平均値定理を使うと (例えば [1]), w_f を B の中心に局所化した公式も得られる。

系 A([18]). 観測時間 T は

$$T > 2\text{dist}(\partial D, B) + \eta \quad (3.5)$$

を満たすとする。このとき $\tau_0 > 0$ が存在してすべての $\tau \geq \tau_0$ に対して

$$(w_f - v_f)(p) > 0$$

が成り立つ。そして公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log(w_f - v_f)(p) = -(2\text{dist}(\partial D, B) + \eta)$$

が成り立つ。

楕円型方程式の解の内部正則性と Sobolev の埋め込みにより、 w_f の一点における値は意味があることに注意しておく。 T についての下からの制限 (3.5) は自然であろう。なぜなら、(3.5) の右辺は、 $t = 0$ において ∂B 上の点を発し、 ∂D 上の点で反射し、点 p に戻ってくる、速さが 1 の信号の最短到達時間であるから。

4 波と幾何

この節では前節よりもさらに踏み込んだ結果を述べる。問題は次の積分の $\tau \rightarrow \infty$ の主要項を決定することである:

$$e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx.$$

前節によればこれは τ の代数冪であることが期待でき、その係数にどんな情報が入っているかを明らかにすることである。

結論は、 p を中心とする球面 $S(p) : |x - p| = d_{\partial D}(p)$ の ∂D 上の接触点 $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ における ∂D の幾何と $S(p)$ の幾何との‘ずれ’をあらわす量があらわれるということである。 p を中心とする球面を基準にして、 ∂D の幾何を調べているのである。

4.1 主結果

結果を述べるため、唐突ではあるが、次の λ の 2 次多項式を導入する：

$$P_{\partial D}(\lambda; q) = \lambda^2 - 2H_{\partial D}(q)\lambda + K_{\partial D}(q), \quad q \in \partial D.$$

ここで、 $K_{\partial D}(q)$ および $H_{\partial D}(q)$ は、それぞれ、 $q \in \partial D$ における、 $-\nu_q$ に関する Gauss 曲率および平均曲率である (ν_q は D に対して外向きであったことに注意)。 $k_1(q)$ および $k_2(q)$ は、 $-\nu_q$ に関する $q \in \partial D$ における主曲率とする。等式 $K_{\partial D}(q) = k_1(q)k_2(q)$ および $H_{\partial D}(q) = (k_1(q) + k_2(q))/2$ によれば、等式

$$P_{\partial D}(\lambda; q) = (\lambda - k_1(q))(\lambda - k_2(q))$$

を得る。 $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ であれば $k_j(q) \leq 1/d_{\partial D}(p)$ であることは容易に見てとれるから、 $P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); q) \geq 0$ が成り立つ。

定理 B([18]). ∂D は C^3 であると仮定する。 $\Lambda_{\partial D}(p)$ は有限集合で、すべての $x \in \Lambda_{\partial D}(p)$ において

$$P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x) > 0$$

であると仮定する。観測時間 T は (3.1) を満たすとせよ。このとき公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^4 e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\text{diam } B}{2d_{\partial D}(p)} \right)^2 \sum_{x \in \Lambda_{\partial D}(p)} \frac{1}{\sqrt{P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x)}}$$

が成り立つ。

球面 $S(p)$ の $-\nu_q$ に関する主曲率は $1/d_{\partial D}(p)$ 、そしてすべての q における $S(p)$ の接ベクトルが主曲率方向であるから、等式

$$P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); q) = \left(\frac{1}{d_{\partial D}(p)} - k_1(q) \right) \left(\frac{1}{d_{\partial D}(p)} - k_2(q) \right)$$

に注意すると、定理 B の公式の右辺の各項は、 $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ において、曲面 ∂D の球面 $S(p)$ からの‘ずれ’の情報を与えているとみれる (図 3 を見よ)。波が最初に当たる壁面上の点における幾何学的な情報を得たことになる。

数 $(\text{diam } B / 2d_{\partial D}(p))^2$ も ∂B の面積と $S(p)$ の面積の比の 2 乗と解釈し、球面波の強さの広がりかたを思い出すとなるほどと思われる。

次の系は系 A のより踏み込んだ版で、やはり変形 Helmholtz 方程式に対する平均値定理と定理 B からの帰結である。

系 B([18]). ∂D は C^3 であると仮定する. $\Lambda_{\partial D}(p)$ は有限集合で, すべての $x \in \Lambda_{\partial D}(p)$ において

$$P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x) > 0$$

であると仮定する. 観測時間 T は (3.5) を満たすとせよ. このとき公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^4 e^{\tau(2 \text{dist}(\partial D, B) + \eta)} (w_f - v_f)(p) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\eta}{d_{\partial D}(p)} \right)^2 \sum_{x \in \Lambda_{\partial D}(p)} \frac{1}{\sqrt{P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x)}}$$

が成り立つ.

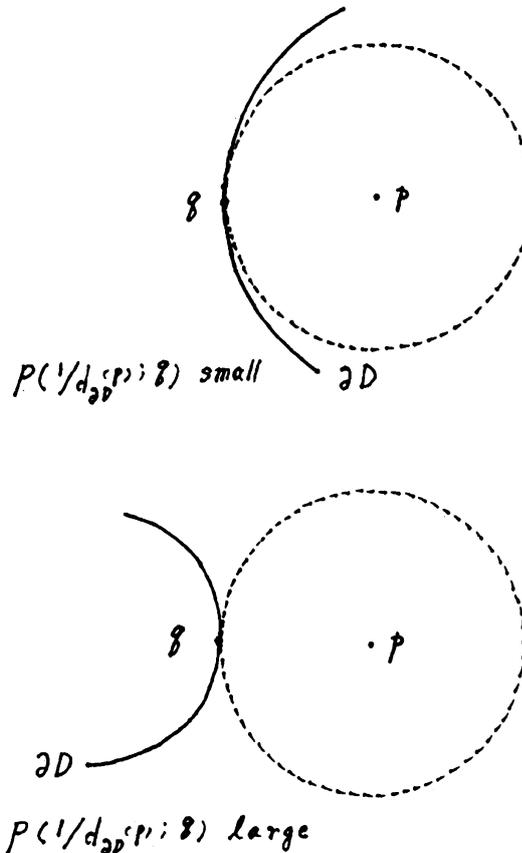


図 3: 点線であらわされる図形は $S(p)$ の断面である.

定理 B および系 B にあらわれた次の数は, 熱方程式の解を用いた球面の特徴づけの問題にもあらわれる:

$$\frac{1}{\sqrt{P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x)}}, x \in \Lambda_{\partial D}(p).$$

詳しくは [25, 26, 27] を参照せよ.

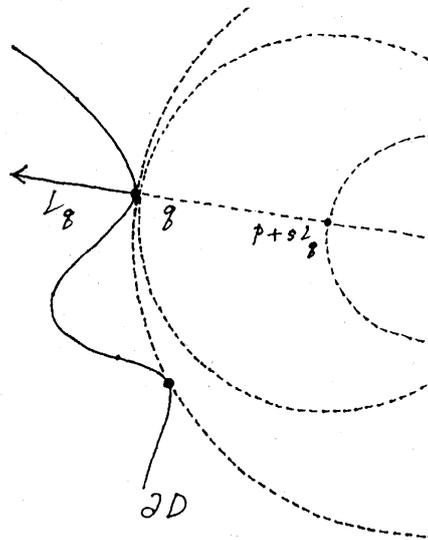
4.2 Gauss 曲率と平均曲率の抽出

定理 B はいろいろ条件がついてあまり有用ではないように見えるかもしれない. 実は, $\Lambda_{\partial D}(p)$ 上の点 q が既知である場合, その点における Gauss 曲率と平均曲率を抽出できる ([18]). ただし 2 個の初期データを使う. これを説明しよう.

$q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ であるから $\nu_q = (q - p)/|q - p|$. $\omega = \nu_q$ ととる. $s > 0$ を十分小さくとると $d_{\partial D}(p + s\omega) = d_{\partial D}(p) - s$ であつて $\Lambda_{\partial D}(p + s\omega) = \{q\}$ である (図 4 を見よ). $d_{\partial D}(p + s\omega) < d_{\partial D}(p)$ より $S(p + s\omega)_q = (1/d_{\partial D}(p + s\omega))I > (1/d_{\partial D}(p))I = S(p)_q$. いつでも $S(p)_q \geq S_q(\partial D)$ であつたから $S(p + s\omega)_q - S_q(\partial D)$ は正定値となる. よつて定理 B の条件が p を $p + s\omega$ に置き換えた場合について成り立つ. したがつて T を十分大きくとつて, $p + s\omega$ を中心とする十分小さい半径を持つ開球の特性関数を初期データとして波を発生させると同じ場所における観測データから定理 B により量

$$P(1/(d_{\partial D}(p) - s); q)$$

を得る. これを異なる二つの $s = s_1, s_2$ に対して得れば, $K_{\partial D}(q)$ および $H_{\partial D}(q)$ を未知数とする連立一次方程式を得る. それはいつでも一意可解で, それを解いて $K_{\partial D}(q)$ および $H_{\partial D}(q)$ を得る. したがつて, 微分幾何学の教えるところによれば, q における接平面よりも踏み込んだ情報を得ることが出来る.



- $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$,
- $\Lambda_{\partial D}(p + s\nu_q) = \{q\}$,
- $d_{\partial D}(p + s\nu_q) = d_{\partial D}(p) - s$.

図 4: $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ が孤立点の場合の例である.

4.3 定理 B の証明の概略

証明は、指示関数の $\tau \rightarrow \infty$ のときの次の漸近表現を基礎としている:

$$\int_B (w_f - v_f) dx = 2J_f(\tau)(1 + O(\tau^{-1/2})) + O(\tau e^{-\tau T} e^{-\tau \text{dist}(\partial D, B)}) + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}).$$

この概略をまず説明しよう. (3.4) を次のように書き換える:

$$\begin{aligned} \int_B (w_f - v_f) dx &= J_f(\tau) + \int_D (|\nabla \epsilon_0|^2 + \tau^2 |\epsilon_0|^2) dx \\ &\quad - e^{-\tau T} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial v_f}{\partial \nu} \rho dS + \int_D F_\tau v_f dx \right). \end{aligned}$$

ここで $\epsilon_0 \in H^1(D)$ は次の境界値問題

$$(\Delta - \tau^2)\epsilon_0 = 0 \text{ in } D,$$

$$\frac{\partial \epsilon_0}{\partial \nu} = -\frac{\partial v_f}{\partial \nu} \text{ on } \partial D$$

の解で, $\rho \equiv e^{\tau T}(\epsilon_f - \epsilon_0)$ である. ρ は方程式

$$(\Delta - \tau^2)\rho = F_\tau \text{ in } D,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial D.$$

を満たすので, $\|\rho\|_{H^1(D)} = O(1)$ であることは容易にわかる. 他の項の評価も容易である.

そこで問題は

$$\int_D (|\nabla \epsilon_0|^2 + \tau^2 |\epsilon_0|^2) dx = J_f(\tau)(1 + O(\tau^{-1/2})) \quad (4.1)$$

を示すことである.

これのより一般的な示し方を考えることは、他の問題への適用を考えると、今後の目標の一つであるがここでは Lax-Phillips[24] による折り返しの論法を使う. ちなみに Lax-Phillips はそこで何をやったかという、無限の彼方 ω 方向から入射した平面波が、物体にあたって生成された反射波の θ 方向の成分を、無限の彼方から観測すると、その中に、法線ベクトルが $\theta - \omega$ 方向にむいている物体表面上の点の情報が入っているということを示した. これは、幾何光学における反射の Snell の法則の波動版とみれるであろう.

では Lax-Phillips の折り返しの論法とはなにかを説明しよう. それは部分積分によって得られる次の等式が出発点である:

$$\int_D (|\nabla \epsilon_0|^2 + \tau^2 |\epsilon_0|^2) dx = J_f(\tau) + \int_D \epsilon_0 (\Delta - \tau^2) v^r dx. \quad (4.2)$$

ここで

- $v^r(x) = \phi(x)v(x^r)$, $\epsilon_0^r(x) = \phi(x)\epsilon_0(x^r)$;
- 十分小さい固定した $\delta_0 > 0$ に対して $x^r = 2q(x) - x$, $d_{\partial D}(x) < 2\delta_0$;

• $q(x) \in \partial D$ は $|q(x) - x| = d_{\partial D}(x)$ を満たすただ一つの ∂D 上の点, ただし $d_{\partial D}(x) < 2\delta_0$.
例えば [4] を参照せよ.

• $\phi(x) = \phi_\delta(x)$ は $0 < \delta < \delta_0$ を満たす δ をパラメータにもつ隆起関数で次の条件を満たす: $0 \leq \phi(x) \leq 1$; $d_{\partial D}(x) < \delta$ ならば $\phi(x) = 1$; $d_{\partial D}(x) > 2\delta$ ならば $\phi(x) = 0$; $|\nabla\phi(x)| = O(\delta^{-1})$; $|\nabla^2\phi(x)| = O(\delta^{-2})$.

(4.2) の証明には折り返しの次の性質を使っていることに注意しよう:

$$\frac{\partial v^r}{\partial \nu} = -\frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad v^r = v \text{ on } \partial D.$$

次に $\delta = \tau^{-1/2}$ とおくと, 次の評価が得られることを示す:

$$\left| \int_D \epsilon_0 (\Delta - \tau^2) v^r dx \right| \leq O(\tau^{-1/2}) J_f(\tau)^{1/2} \left(\int_D (|\nabla \epsilon_0|^2 + \tau^2 |\epsilon_0|^2) dx \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

(4.1) はこれと (4.2) より少しの議論で従う.

では (4.3) はどうやって示すのかを簡単に説明しよう. まず等式

$$(\Delta - \tau^2)(v^r) = \phi(x) \sum_{i,j} a_{ij}(x) (\partial_i \partial_j v)(x^r) + \sum_j b_j(x) (\partial_j v)(x^r) + (\Delta \phi)(x) v(x^r)$$

を使って左辺の被積分関数を具体的に書く. ここで注意すべきは $a_{ij}(x) = O(d_{\partial D}(x))$ ととれていることである. 2階微分の項が ∂D 上消えそれが $O(\delta)$ で評価されていることである. 次に変数変換 $x = y^r$ をし, v の2階微分を含む項を部分積分して1階微分におとし, それぞれを上から素直に $J_f(\tau)$ と ϵ_0 のエネルギーに関係づけて評価すると (4.3) を得る.

以上より定理 B は $J_f(\tau)$ の漸近展開を計算することに帰着された. $f = \chi_B$ であることを使うと v_f が詳しくわかり, その結果, $\tau \rightarrow \infty$ のとき

$$J_f(\tau) = \frac{1}{4\tau^3} \left(\eta - \frac{1}{\tau} \right)^2 \int_{\partial D} \frac{e^{-2\tau d_B(x)}}{|x-p|^2} \left(1 + \frac{1}{\tau|x-p|} \right) \frac{p-x}{|p-x|} \cdot (-\nu_x) dS(x) \\ + O(\tau^{-1} e^{-2\tau \text{dist}(\partial D, B)} e^{-\tau \text{dist}(\partial D, B) C_2})$$

と書けることがわかる. ここで $d_B(x) = |x-p| - \eta$, C_2 は正の定数である. 後は Laplace の方法をこの右辺第一項に適用する. 定理 B の条件はそのためのものである.

詳しくは, 局所座標で, q において接平面上の関数 $z = f(\sigma)$ のグラフとして ∂D を $x = x_q(\sigma) = q + \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 - f(\sigma) \nu_q$ と表現する ($e_1 \times e_2 = -\nu_q$; e_1, e_2 は長さが1の互いに直交する q における ∂D の接ベクトル; $f(0) = \partial f / \partial \sigma_j(0) = 0$, $j = 1, 2$). このとき相関数の Hesse 行列は

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma_k \partial \sigma_j} (|x_q(\sigma) - p|) |_{\sigma=0} = \frac{1}{d_{\partial D}(p)} \delta_{kj} - \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_k \partial \sigma_j}(0)$$

となる. $S(p)$ の $-\nu_q$ に関する q における Shape operator (Weingarten map) は

$$S(p)_q \sim \left(\frac{1}{d_{\partial D}(p)} \delta_{kj} \right)$$

という局所表現をもち、 ∂D の $-\nu_q$ に関する q における Shape operator は

$$S_q(\partial D) \sim \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_k \partial \sigma_j} (0) \right)$$

という局所表現をもつ. 主曲率 $k_1(q)$, $k_2(q)$ はこの固有値であるから, $P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); q)$ は相関数の Hessian である.

5 いくつかの未解決問題

この節では, 時間に依存したデータを用いた逆問題における囲い込み法についていくつか問題を述べよう.

• この論文で取り上げた問題で境界条件 $\partial u / \partial \nu = 0$ on ∂D を ∂D 上エネルギーが失われる次の型の境界条件で置き換えたらどうか:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma(x) \partial_t u + \beta(x) u = 0 \text{ on } \partial D \times]0, T[.$$

ただし γ は $\gamma \geq 0$ および $\gamma \neq 0$ を満たす. 定理 A については, 外部問題において [17] で展開した方法でうまくゆくと思う. しかし定理 B については, $\gamma \neq 0$ の場合には, 考える必要がある. 筆者は, γ の $\Lambda_{\partial D}(p)$ における値が抽出できると予想しているが今後の課題である. memory 型の境界条件等 ([28]) についてはどうかというのも, 興味ある問題である.

• [29, 30, 37] では, Colton-Kirsch の linear sampling method [2] を使って frequency domain での電磁波をもちいた類似の問題を考察している. 時間領域での問題でここで展開した囲い込み法を実現してみよ. 定理 B に相当する定理を確立することが主問題となろう.

• 波を発生させる場所と受け取る場所が異なる場合, 得られたデータは bistatic data と呼ばれる. この場合にも, 内部, 外部それぞれで, 類似の問題を考えることが出来る. どんな情報が bistatic data には含まれているだろうか. 興味ある問題である. 球面が演じた役割を今度は回転楕円面が演じることになるだろう.

謝辞

この研究は日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究 (C) (課題番号 21540162) 「偏微分方程式に対する逆問題の探針法および囲い込み法による研究」 (研究代表者 池島 優) の援助を受けている.

参考文献

- [1] Courant, R. and Hilbert, D., Methodden der Mathematischen Physik, Vol 2 (Berlin:Springer), 1937.
- [2] Colton, D. and Kirsch, A., A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, Inverse Problems, **12**(1996), 383-393.

- [3] Dautray, R. and Lions, J-L., Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology, Evolution problems I, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, second.ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [5] Ikehata, M., Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, Inverse Problems, **15**(1999), 1231-1241.
- [6] Ikehata, M., Reconstruction of a source domain from the Cauchy data, Inverse Problems, **15**(1999), 637-645.
- [7] Ikehata, M., Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Problems, **8**(2000), 367-378.
- [8] Ikehata, M., On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement, Inverse Problems, **16**(2000), 785-793.
- [9] Ikehata, M., Exponentially growing solutions and the Cauchy problem, Appl. Anal. no.1-2, **78**(2001), 79-95.
- [10] Ikehata, M., An inverse source problem for the heat equation and the enclosure method, Inverse Problems, **23**(2007), 183-202.
- [11] Ikehata, M., Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, Appl. Anal., **86**(2007), no. 8, 963-1005.
- [12] Ikehata, M., Virtual signal in the heat equation and the enclosure method, Inverse problems in applied sciences-towards breakthrough-, Journal of Physics: Conference series, **73** (2007)012010.
- [13] Ikehata, M., Two analytical formulae of the temperature inside a body by using partial lateral and initial data, Inverse Problems, **25**(2009), 035011(21pp).
- [14] Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval, Inverse Problems, **26**(2010) 055010(20pp).
- [15] Ikehata, M., The framework of the enclosure method with dynamical data and its application, Inverse Problems, **27**(2011) 065005(16pp).
- [16] Ikehata, M., Inverse obstacle scattering problems with a single incident wave and the logarithmic differential of the indicator function in the enclosure method, Inverse Problems, **27**(2011) 085006(23pp).
- [17] Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval: II. Obstacles with a dissipative boundary or finite refractive index and back-scattering data, Inverse Problems, **28**(2012) 045010(29pp).

- [18] Ikehata, M., An inverse acoustic scattering problem inside a cavity with dynamical back-scattering data, *Inverse Problems*, **28**(2012) 095016(24pp).
- [19] Ikehata, M. and Itou, H., Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data, *Inverse Problems*, **25**(2009) 105005(21pp).
- [20] Ikehata, M. and Kawashita, M., The enclosure method for the heat equation, *Inverse Problems*, **25**(2009), 075005(10pp).
- [21] Ikehata, M. and Kawashita, M., On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval, *Inverse Problems*, **26**(2010) 095004(15pp).
- [22] Isakov, V., On uniqueness for a discontinuity surface of the speed of propagation, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **4**(1996), 33-38.
- [23] Isakov, V., *Inverse problems for partial differential equations (Second Edition)*, Springer, New York, 2006.
- [24] Lax, P. D. and Phillips, R. S., The scattering of sound waves by an obstacle, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **30**(1977), 195-233.
- [25] Magnanini, R. and Sakaguchi, S., Matzoh ball soup: Heat conductors with a stationary isothermic surface, *Annals of Mathematics*, **156**(2002), 931-946.
- [26] Magnanini, R. and Sakaguchi, S., Interaction between degenerate diffusion and shape of domain, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **137**(2007), 373-388.
- [27] Magnanini, R. and Sakaguchi, S., Interaction between nonlinear diffusion and geometry of domain, *J. Differential equations*, **252**(2012), 236-257.
- [28] Propst, G. and Prüss, J., On wave equations with boundary dissipation of memory type, *Integral Equations Appl.*, **8**(1996), no.1, 99-123.
- [29] Qin, H.-H. and Colton, D., The inverse scattering problem for cavities, *Applied Numerical Mathematics*, **62**(2012), 699-708.
- [30] Qin, H.-H. and Colton, D., The inverse scattering problem for cavities with impedance boundary condition, *Adv Comput Math*, **36**(2012), 157-174.
- [31] Rakesh, An inverse impedance transmission problem for the wave equation, *Comm. in partial differential equations*, **18**(1993), 583-600.
- [32] Rakesh, Some results on inverse obstacle problems for the wave equation, *Algebra i Analiz*, **8**(1996), no.2, 157-161.

- [33] Safarov, Yu. and Vassiliev, D., The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators, *Translations of mathematical monographs*, **155**(1996), AMS, Providence, Rhode Island.
- [34] Sini, M. and Yoshida, K., On the reconstruction of interfaces using complex geometrical optics solutions for the acoustic case, *Inverse Problems*, **28**(2012) 055013.
- [35] Tervo, S., Pätynen, J. and Lokki, T., Acoustic reflection localization from room impulse responses, *Acta Acoustica United with Acoustica*, **98**(2012) 418-440.
- [36] Yarmukhamedov, Sh., On a Cauchy problem for Laplace's equation, *Mathematicheskije Zametki*, **18**(1975), 57-61.
- [37] Zeng, F., Cakoni, F. and Sung, J., An inverse electromagnetic scattering problem for a cavity, *Inverse Problems* **27**(2011) 125002(17pp).

e-mail address

ikehata@math.sci.gunma-u.ac.jp