数理解析研究所講究録
第 1973 巻 2015 年 115-119

Regulator と Rankin-Selberg L 関数の特殊値

東北大学大学院理学研究科　千田雅隆

MASATAKA CHIDA

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOHOKU UNIVERSITY*

Abstract

In this article, we report a result on Beilinson conjecture for Rankin-Selberg products of elliptic modular forms. This is a joint work with François Brunault.

1 L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想

1.1 類数公式と regulator

一般の場合の Beilinson 予想について述べる前に，まず代数体の場合の regulator と Dedekind ζ 関数の特殊値との関係を復習しておこう．F を代数体とし，$\mathcal{O}_F$ を F の整数環とする．r_1 を F の実素点の個数，r_2 を複素素点の個数とする．

$$r_F : \mathcal{O}_F^{\times} = K_1(\mathcal{O}_F) \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

を Dirichlet の regulator 写像とし，これを少し修正した写像

$$\widetilde{r}_F : \mathcal{O}_F^{\times} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

を考える (ここで，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ に対角的に埋め込む)．すると Dirichlet の単数定理により $\widetilde{r}_F \otimes \mathbb{R}$ は同型になり，$\mathrm{Im}(\widetilde{r}_F)$ はその中の格子になる．R_F をその格子の基本領域の体積とすれば，類数公式により F の Dedekind ζ 関数の $s=0$ での Taylor 展開の先頭項は

$$\lim_{s\to 0} \zeta_F(s) s^{-(r_1+r_2-1)} = -\frac{h_F \cdot R_F}{w_F}$$

(h_F は F の類数，w_F は F に含まれる 1 の冪根の個数) と書けることがわかるので，特に

$$\lim_{s\to 0} \zeta_F(s) s^{-(r_1+r_2-1)} \equiv R_F \mod \mathbb{Q}^{\times}$$

となることがわかる．Beilinson はこの公式の一般化にあたる代数多様体の L 関数の整数点での特殊値 (Taylor 展開の先頭項) を mod $\mathbb{Q}^{\times}$ で記述する公式を予想した．

*chida@math.tohoku.ac.jp

1.2 Beilinsonによる予想

Lichtenbaum, Borel, Bloch らの先駆的な仕事の後, Beilinson は論文 [1] の中で代数多様体, より一般に Chow motive に対して定まる L 関数の整数点での値に関する予想を提出した. critical な整数点の場合には Deligne [5] による予想があり, その予想を critical ではない場合にも拡張したことになる. 以下, Beilinson 予想がどのようなものであったかということを簡単に復習する. ここで使われる記号などのより正確な定義は Beilinson の原論文 [1] や Beilinson 予想についてのサーベイ [9], [6], [8] などを参考にしていただきたい.

X を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする. $L(h^i(X), s)$ を X の étale cohomology $H^i_{ét}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用から定まる L 関数とする. 一般の場合の regulator 写像は motivic cohomology から Deligne cohomology への写像として定義される. X の motivic cohomology は代数的 K 群を用いて

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) = (K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Q}})^{(j)}$$

と定義することができる. さらに motivic cohomology $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))$ の中に integral part と呼ばれる部分空間 $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ を定義できる (Scholl [11]). これが上で述べた代数体の場合における単数群の一般化にあたる対象である. また, 代数体の場合の (少し修正した)regulator の定義にあらわれた $\mathbb{R}$ 線形空間 $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の一般化にあたるものとして Deligne cohomology $H^i_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$ を考えることができる. Hodge 理論を用いて Deligne cohomology を Betti cohomology 及び de Rham cohomology と関係付けることで $\det_{\mathbb{R}} H^i_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$ に $\mathbb{Q}$ 有理構造 $\mathcal{D}_{i,j}$ を入れることができる. さらに Beilinson は一般化された Chern 指標を用いて regulator 写像

$$r_{\mathcal{D}} : H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$$

を定義した. このとき Beilinson は次のような公式を予想した.

予想 1 (Beilinson). $j > \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

1. $r_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像

$$r_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$$

   は同型になる.

2. $\det_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$ の中での等式

$$L(h^i(X), j)\mathcal{D}_{i+1,j} = r_{\mathcal{D},\mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}})$$

   が成立する.

$j = \frac{i}{2} + 1$ のときは予想を少し修正する必要がある (類数公式はこの場合にあたる). $CH^{j-1}(X)_{\mathrm{hom}}$ を余次元が $j-1$ の X 上の代数的サイクルたちを homology 同値で割った群とする. $N^{j-1}(X) = CH^{j-1}(X)_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Q}$ とおく. $N^{j-1}(X)$ から Betti cohomology へのサイクル写像を用いることで, 修正した regulator 写像

$$\widetilde{r}_{\mathcal{D}} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \oplus N^{j-1}(X) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$$

が定まる. このとき $j = \frac{i}{2} + 1$ の場合の Beilinson の予想は次のように述べられる.

予想 2 (Beilinson). $j = \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

1. $\widetilde{r}_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $(H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像
$$\widetilde{r}_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : (H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$$
は同型になる.

2. $\det_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(j))$ の中での等式
$$L(h^i(X), j)\mathcal{D}_{i+1,j} = \widetilde{r}_{\mathcal{D},\mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X))$$
が成立する.

これらの予想は Chow motive の場合にも自然に拡張される. F を代数体とするとき, $X = \operatorname{Spec} F$, $i = 0$, $j = 1$ の場合の Beilinson 予想は類数公式から従い, j が一般の場合も Borel の結果から予想が成立していることがわかる. さらに Beilinson はこの予想を提出した論文 [1] の中で X が modular 曲線の場合 ($i = 1$, $j = 2$ のとき) や modular 曲線の二つの直積の場合 ($i = j = 2$ のとき) にも予想の evidence を与えている. X が modular 曲線の場合は実質的に重さが 2 の楕円保型形式の L 関数の特殊値を考えていることになる. この結果の重さ $k \geqq 2$ の楕円保型形式の場合への拡張は Deninger-Scholl [6] で解説されている. X が二つの modular 曲線の直積の場合は重さが 2 の楕円保型形式の組から定まる Rankin-Selberg L 関数の特殊値を考えることになる. 以下では, この結果の一般化について説明したい.

2 Rankin-Selberg L 関数の特殊値と regulator

N を 5 以上の整数として $Y = Y_1(N)$ を $\mathbb{Q}$ 上の modular 曲線とする. このとき Y の $\mathbb{C}$ 値点は
$$Y(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}$$
と記述することができる. ただし, $\mathfrak{H}$ は上半平面を表す. E を Y 上の普遍楕円曲線とし, E の Y 上の k 重 fiber 積 $E^k = E \times_Y \cdots \times_Y E$ を考える. このとき E^k の $\mathbb{C}$ 値点は
$$E^k(\mathbb{C}) = (\mathbb{Z}^{2k} \rtimes \Gamma_1(N))\backslash \left(\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^k\right)$$
と記述することができる. Beilinson 予想は滑らかな射影的代数多様体に対する予想であったが, E^k は射影的代数多様体にはなっていない. $X = X_1(N)$ を Y のコンパクト化として, $\overline{E}$ を X 上の普遍広義楕円曲線とする. 先ほどと同様に $\overline{E}$ の X 上の k 重 fiber 積 $\overline{E}^k = \overline{E} \times_X \cdots \times_X \overline{E}$ を考える. しかし k が 2 以上のときは $\overline{E}^k$ は滑らかになっていない. そこで Deligne による特異点解消 $\overline{\overline{E}}^k \to \overline{E}^k$ を考える. このとき $\overline{\overline{E}}^k$ は $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体になる.

k_1, k_2, j を $0 \leqq j \leqq k_1 \leqq k_2$ を満たす整数とする.
$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \in S_{k_1+2}(\Gamma_0(N_f), \chi_f)^{\mathrm{new}}$$
及び
$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) q^n \in S_{k_2+2}(\Gamma_0(N_g), \chi_g)^{\mathrm{new}}$$

を正規化された固有形式とし, $K_{f,g}=\mathbb{Q}(\{a_n(f),a_n(g)\})$ とおく. このとき $K=K_{f,g}$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体になる. 簡単のため N_f と N_g は素であると仮定する. $f^*(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n(f)}q^n$, $g^*(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n(g)}q^n$ とおく. ℓ を素数とし, $\overline{\mathbb{Q}}$ から $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ への埋め込みを一つ固定する. $E_{f,g}=\mathbb{Q}_\ell(\{a_n(f),a_n(g)\})$ とおき, V_f, V_g をそれぞれ f, g に伴う $E_{f,g}$ 係数の ℓ 進 Galois 表現とする ($E_{f,g}$ 上の 2 次元線形空間になる). $L(f\otimes g,s)$ を Galois 表現 $V(f\otimes g)=V_f\otimes_{E_{f,g}}V_g$ に伴う L 関数とする. $L(f\otimes g,s)$ は不分岐な素点では 4 次の Euler 因子を持ち, 関数等式をみたすことが知られている. $L(f^*\otimes g^*,s)$ は $s=j+1$ $(0\leqq j\leqq k_1)$ で一位の零点を持つことが関数等式の形からわかる.

$N=N_fN_g$ とおく. $E^{k_1}(\mathbb{C})$ および $E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の正則微分形式 ω_{f^*}, ω_g を

$$\begin{aligned}\omega_{f^*}&=(2\pi i)^{k_1+1}f^*(\tau_1)d\tau_1\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_{k_1},\\ \omega_g&=(2\pi i)^{k_2+1}g(\tau_2)d\tau_2\wedge dz_{k_1+1}\wedge\cdots\wedge dz_{k_1+k_2}\end{aligned}$$

により定めると, $\omega_{f^*}\otimes\overline{\omega_g}$ は $E^{k_1}(\mathbb{C})\times E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の微分形式になる. この微分形式は $\overline{\overline{E}}^{k_1}(\mathbb{C})\times\overline{\overline{E}}^{k_2}(\mathbb{C})$ 上に滑らかに延びる. それを $\Omega_{f,g}$ と書くことにする. このとき Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(\overline{\overline{E}}^{k_1}\times\overline{\overline{E}}^{k_2},\mathbb{R}(k_1+k_2+2-j))$ の元 α との間に自然な pairing $\langle\alpha,\Omega_{f,g}\rangle$ が定まる. 以上の準備の元で主結果は次のように述べられる.

定理 3 (Brunault-Chida [4]). $0\leqq j\leqq k_1\leqq k_2$ とする. $k_1=k_2=j$ の場合は $g\neq f^*$ で $N>1$ と仮定する. このとき $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(\overline{\overline{E}}^{k_1}\times\overline{\overline{E}}^{k_2},\mathbb{Q}(k_1+k_2+2-j))\otimes K_{f,g}$ の元 ξ が存在して,

$$\langle r_{\mathcal{D}}(\xi),\Omega_{f,g}\rangle\equiv(2\pi i)^{k_1+k_2-2j}L'(f^*\otimes g^*,j+1)\mod K_{f,g}^{\times}$$

となる.

注意. 同様の結果は Scholl (unpublished), Kings-Loeffler-Zerbes [7] でも与えられている. [7] では $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(E^{k_1}\times E^{k_2},\mathbb{Q}(k_1+k_2+2-j))\otimes K_{f,g}$ に元を構成しており, 我々の場合は boundary まで元を拡張している点が異なる. また, [7] では Beilinson 予想の p 進類似についても結果を与えている.

この結果と Beilinson 予想との関係について補足しておく. $M(f)$, $M(g)$ を Scholl [10] によって構成された f, g に対応する Grothendieck motive とし, $n=k_1+k_2+2-j$ とおく. このとき $M=M(f)\otimes M(g)$ に対する Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ が定まる. $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ は階数が 1 の $K_{f,g}\otimes\mathbb{R}$ 加群となり, 短完全系列

$$0\to F^nH_{dR}^{k_1+k_2+2}(M)\otimes\mathbb{R}\to H_B^{k_1+k_2+2}(M(n-1))^+\otimes\mathbb{R}\to H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))\to 0$$

を用いると $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ の $K_{f,g}$ 有理構造 $\mathcal{B}_{k_1+k_2+3,n}(M)$ が定まる. この $K_{f,g}$ 基底 t をとると

$$\langle t,\Omega_{f,g}\rangle\equiv(2\pi i)^{k_1+k_2-2j}\mod K_{f,g}^{\times}$$

となることが証明できるので, 上の定理と合わせると motivic cohomology の元から定まる $K_{f,g}$ 有理構造と Hodge 理論により定まる $K_{f,g}$ 有理構造のずれに Rankin-Selberg L 関数の微分値が現れることがわかる. Rankin-Selberg L 関数の関数等式と有理構造 $\mathcal{B}_{k_1+k_2+3,n}(M)$ 及び $\mathcal{D}_{k_1+k_2+3,n}(M)$ の比較を用いることで

$$L(f\otimes g,n)\mathcal{D}_{k_1+k_2+3,n}(M)=r_{\mathcal{D}}(\xi)\cdot K_{f,g}$$

となることがわかり, §1 で述べた Beilinson 予想に結びついていることがわかる. ただし, 構成された元が integral part に属しているかどうかはまだわかっていない.

証明は大きく分けて三つの部分 (motivic cohomology の元の構成とその regulator の計算, boundary への拡張) からなる. 元の構成は Beilinson [2] によって導入された Eisenstein symbol の理論と対角埋め込みをうまく用いることで行われる. regulator の計算は志村 [12] による Rankin-Selberg 法を用いた計算結果を用いて行われる. 構成された元の boundary への拡張は Voevodsky による motivic cohomology の記述や Scholl [10] による久賀-佐藤多様体の motivic cohomology の計算が使われる.

参考文献

[1] A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. **30** (1985), 2036–2070.

[2] A. A. Beilinson, *Higher regulators of modular curves*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, Proceedings of Summer Research Conference held June 12–18, 1983, in Boulder, Colorado, Contemporary Mathematics 55, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1–34.

[3] M. Bertolini, H. Darmon and V. Rotger, *Beilinson-Flach elements and Euler systems I: syntomic regulators and p-adic Rankin L-series*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), 355–378.

[4] F. Brunault and M. Chida, *Regulators of Rankin-Selberg products of modular forms*, to appear in Ann. Sci. Math. Québec, Special issue marking the 60th birthday of Glenn Stevens.

[5] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, In: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33. Automorphic Forms. Representations and L-functions (Oregon State Univ. Corvallis. 1977), Part 2, Amer. Math. Soc. Providence. R.1., 1979, pp. 313–346.

[6] C. Deninger and A. Scholl, *The Beilinson conjectures*, In: L-functions in Arithmetic, ed. Coates-Taylor (Cambridge, 1991), 173–209.

[7] G. Kings, D. Loeffler and S. L. Zerbes, *Rankin-Eisenstein classes for modular forms*, Preprint.

[8] J. Nekovář, *Beilinson's conjectures*, In: Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Symp. Pure Math., **55** Part I, 537–570, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[9] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures*, In: Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 1–35, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[10] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.

[11] A. J. Scholl, *Integral elements in K-theory and products of modular curves*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 467–489, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[12] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 6, 783–804.