数理解析研究所講究録
第 1975 巻 2015 年 15-22

平均場シュレーディンガー作用素のスペクトル解析

東京工業大学理工学研究科　数学専攻　清水翔之
Department of mathematics,
Tokyo institute of technology
(佐々木浩宣氏 (千葉大), 鈴木章斗氏 (信州大) との共同研究)

1 イントロ

本稿では, ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ 上の作用素

$$H_t = -\Delta + V * |u(t)|^2(x) \tag{1.1}$$

のスペクトルについて考察する. ここで $\Delta := \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $V * |u(t)|^2$ は $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数 V と $u(t) = u(t,x)$ の合成積

$$V * |u(t)|^2(x) := \int_{\mathbb{R}^d} V(x-y)|u(t,y)|^2 dy \tag{1.2}$$

を表す. $u(t)$ は以下の非線形偏微分方程式

$$\begin{cases} -i\frac{\partial}{\partial t}u(t) & = H_t u(t), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ u_0(x) & = u(0,x), x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.3}$$

の解である. この微分方程式は Hartree 方程式と呼ばれ, 量子力学的粒子のある種の近似方程式として用いられる (詳細は 2 節で説明する).

Hartree 方程式 (あるいは非線形 Schrödinger 方程式) の解の挙動は, (大雑把に言って) とる初期値に応じて散乱, 爆発, 定在波の三つのタイプに分類される (近年の画期的な仕事として [NaSch] を挙げておこう). 今回我々は H_t のスペクトル分布が t を動かす事でどの様に変容するかを考察した. 詳細は 4 節に譲るが, [HoRo] の結果を考慮にいれると, **H_t の負の離散固有値の分布と, $u(t)$ の時間大域的な漸近挙動が一対一に対応している様に思われるのである.** 現時点では示唆の段階に留まっているのだが, 今後の研究で明らかにしてきたいと思っている.

本稿は 4 節からなる. 2 節では, Hartree 方程式と我々の H_t が多体 Schrödinger 方程式から導出される事を発見法的に見る. 3 節では H_t について得られた結果と証明のスケッチを述べる. 4 節では我々の結果が非線形 Schrödinger 方程式の場合においても成立する事と, [HoRo] の結果を照らし合わせながら期待される描像について述べる.

謝辞. 本研究を行う上では, 共同研究者の佐々木, 鈴木両氏から多大な援助をして頂きました. この場を借りて厚くお礼申し上げます. また, 今回講演の機会を与えて下さったオーガナイザーの先生方, 並びに研究集会中に貴重な助言やコメントを下さった参加者の方々に深く感謝致します.

2 Hartree方程式の導出

考察する物理系は $\mathbb{R}^d$ 上を動く非相対論的な同種粒子が複数個ある系である. $\mathbb{R}^d$ をトーラスに変えた場合や, 半相対論的な場合 (一粒子の自由ハミルトニアンが $\sqrt{-\Delta+m^2}$ の場合) についても, 発見法的には同様の導出である事を指摘しておこう. ポテンシャルは全ての二粒子間に均一な相互作用 $V(x-y)$ のみが働いている場合を考える. この時粒子が N 個ある場合, 系のダイナミクスは N 体 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} -i\frac{\partial}{\partial t}\psi_N(t,\mathbf{x}) & = \hat{H}_N\psi_N(t,\mathbf{x}),\ t\in\mathbb{R},\ \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^{dN} \\ \psi_{0,N}(\mathbf{x}) & = \psi_N(0,\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dN} \end{cases} \tag{2.1}$$

で記述される. ここで $\hat{H}_N$ は $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の自己作用素

$$\hat{H}_N := -\sum_{j=1}^{N}\Delta_{x_j} + \sum_{1\le i<j\le N} V(x_i-x_j) \tag{2.2}$$

で N 個の粒子達の全エネルギー (Hamiltonian) を表す. この時 (2.1) の解は, $\hat{H}_N$ が生成する $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上のユニタリ群 $\{e^{-it\hat{H}_N}|t\in\mathbb{R}\}$ を用いて $e^{-it\hat{H}_N}\psi_{0,N}$ と書ける.

ここで $\hat{H}_N$ を

$$H_N := -\sum_{j=1}^{n}\Delta_{x_j} + \frac{1}{N-1}\sum_{1\le i<j\le N} V(x_i-x_j) \tag{2.3}$$

に変更したものを考える (相互作用項に付随する因子に注意). 更に今初期値を特別な $\psi_{0,N}(\mathbf{x}) := \Pi_{j=1}^{N}u_0(x_j) \equiv u_0^{\otimes N}(\mathbf{x}),\ u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ としてみよう. $V=0$ の時, 即ち自由なシュレーディンガー方程式であれば (2.1) の解 $\psi_N(t,\mathbf{x})$ は

$$\psi_N(t,\mathbf{x}) = e^{-itH_N}\psi_{0,N} = (e^{it\Delta}u_0)^{\otimes N}$$

とかける. だが $V\neq 0$ の時は相互作用の項が効いてこのようにテンソル積の形で書く事は期待出来ない. しかしながら $N\to\infty$ においてある $u(t)=u(t,x)$ が存在し

$$e^{-itH_N}\phi^{\otimes N} \approx u(t)^{\otimes N} \tag{2.4}$$

となる事を期待してみよう. 更に,$u(t)$ は Schrödinger 型の方程式

$$-i\frac{\partial}{\partial t}u(t) = -\Delta u(t) + W(t,x)u(t) \tag{2.5}$$

を満たすとすれば, ポテンシャル $W(t,x)$ はどの様なものであろうか?ここで,$|e^{-itH_N}u_0^{\otimes N}|^2$ は, 物理的には N 個の粒子の位置に関する確率密度関数であった事を思い出そう. すると (2.4) は, 十分大きな N において一つ当たりの粒子が位置 dx にいる確率は $|u(t)|^2(x)dx$ である事を表している. すると例えば粒子 x_1 が他の粒子から受ける相互作用は期待値として

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N} V(x_1-x_j)|u(t,x_i)|^2 &\approx \frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N}\int_{\mathbb{R}^d} V(x_1-x_j)|u(t,x_j)|^2 dx_j \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} V(x_1-y)|u(t,y)|^2 dy = W(t,x_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

となるであろう. 即ち (2.4) は (1.3) に他ならない. この様なスキームを**多体 Schrödinger 方程式の平均場近似**と呼ぶ. 標語的に言えば,

$$(N\text{ 体 Schrödinger 方程式}) + (\text{特殊な初期値}) \to (\text{Hartree 方程式}) \quad (N \to \infty)$$

という事になる. Hartree 方程式, あるいは非線形 Schrödinger 方程式を多体 Schrödinger 方程式から導出する厳密な議論については, 例えば [FGS] を参照されたい.

3 結果

以下関数 f の L^p ノルムは $\|f\|_{L^p}$ と記す事にする.
$V:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすものとする;

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A1}): V(x) = V(-x),\ x \in \mathbb{R}^d, \\ &(\mathrm{A2}): V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d),\ p = 2\ (d = 1,2,3),\ p > \frac{d}{2}\ (d \geq 4) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで $V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ とは任意の $\epsilon > 0$ に対し $V_{1,\epsilon} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $V_{2,\epsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在し, $\|V_{2,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon$ という事.

(A.2) から多体 Schrödinger 作用素 $\hat{H}_N$ は $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ の自己共役作用素である事が導かれる例えば [Ar1] の定理 2.7, 定理 6.42 の応用).

このとき次が成り立つ ([Ca]):

命題. 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, 0 を含むある開区間 I_{u_0} 上 (1.3) の解 $u \in C(I_{u_0}, H^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(I_{u_0}, L^2(\mathbb{R}^d))$ が一意に存在する. 更に以下の質量保存則及びエネルギー保存則が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2} &= \|u_0\|_{L^2}, \quad t \in I_{u_0}, \\ E(u(t)) :&= \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} V * |u(t)|^2(x)|u(t)|^2(x)dx \\ &= E(u_0), \quad t \in I_{u_0}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

例. (A.1),(A.2) を満たすものとして以下のクーロン型ポテンシャルが挙げられる:

$$V(x) = \frac{\lambda}{|x|^a}; \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}\ (n=1) \\ 0 < a < 1\ (n=2) \\ 0 < a < \frac{3}{2}\ (n=3) \\ 0 < a < 2\ (n \geq 4) \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{3.3}$$

まずは, H_t の基本的と思われる性質について述べていこう. 以下 Haretree 方程式の解 $u(t)$ に対し

$$V_t := V * |u(t)|^2$$

とおく.

定理 1. (i) $H_t,\ t \in I_{u_0}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素で $D(H_t) = D(-\Delta)$.
(ii) 真性スペクトル集合 $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_t)$ は I_{u_0} 上常に $[0,\infty)$.
(iii) 任意の $t_0 \in I_{u_0}$ を固定した時に H_t は H_{t_0} にノルムレゾルベント収束する. 即ち, $\|(H_t - z)^{-1} - (H_{t_0} - z)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))}, t \to t_0, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ここで $B(L^2(\mathbb{R}^d))$ は $L^2(\mathbb{R}^d$ 上の有界作用素全体がなす Banach 空間.

鍵となるのは以下の補題である:

補題 2. $V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ とする. この時 $V_t \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ である. 更に $s \in I_{u_0}$ を任意に固定した時,

$$\|(V_t - V_s)(1-\Delta)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \to 0,\ t \to s. \tag{3.4}$$

証明. 仮定により任意の $\epsilon > 0$ に対し $V = V_{1,\epsilon} + V_{2,\epsilon}$ と分解出来て $V_{1,\epsilon} \in L^p(\mathbb{R}^d), V_{2,\epsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ である. 従って Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} \|V_{1,\epsilon} * |u(t)|^2\|_{L^p} &\le \|V_{1,\epsilon}\|_{L^p}\|u(t)\|_{L^2} \\ &= \|V_{1,\epsilon}\|_{L^p}\|u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで最後の等式で質量保存則 (3.2) を用いた. 全く同様にして

$$\|V_{2,\epsilon} * |u(t)|^2\|_{L^\infty} \le \|V_{2,\epsilon}\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^2}^2 \le \epsilon\|u_0\|_{L^2}^2 \tag{3.6}$$

である. よって $V_t \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. 次に (3.4) を示そう. $V_{i,\epsilon}(t) := V_{i,\epsilon} * |u(t)|^2, i = 1, 2$ と置き, 不等式 ([Is] の第一章補題 2.9 の証明を参照)

$$\|Vf\|_{L^2} \le \|\langle x\rangle^{-2}\|_{L^p}\|V\|_{L^p}\|1-\Delta f\|_{L^2},\ V \in L^p, f \in D(-\Delta)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \|(V_t - V_s)f\|_{L^2} &\le \|(V_{1,\epsilon}(t) - V_{1,\epsilon}(s))f\|_{L^2} + \|(V_{2,\epsilon}(t) - V_{2,\epsilon}(s))f\|_{L^2} \\ &\le (\|\langle x\rangle^{-2}\|_{L^p}B_1(t,s) + B_2(t,s))\|f\|_{L^2}, \\ B_1(t,s) &:= \|V_{1,\epsilon}(t) - V_{1,\epsilon}(s)\|_{L^p}, \\ B_2(t,s) &:= \|V_{2,\epsilon}(t) - V_{2,\epsilon}(s)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

そこで,$B_1(t,s), B_2(t,s)$ を評価しよう. 再び Hölder の不等式より

$$B_1(t,s) \le \|V_{1,\epsilon}\|_{L^p}\||u(t)|^2 - |u(s)|^2\|_{L^1}. \tag{3.8}$$

$|u(t)|^2 - |u(s)|^2 = (|u(t)| + |u(s)|)(|u(t)| - |u(s)|)$ と見て質量保存則と Schwarz の不等式を用いれば

$$B_1(t,s) \le 2\|u_0\|_{L^2}\|V_{1,\epsilon}\|_{L^p}\|u(t) - u(s)\|_{L^2} \tag{3.9}$$

を得る. 同様にして

$$B_2(t,s) \le 2\|u_0\|_{L^2}\|V_{2,\epsilon}\|_{L^p}\|u(t) - u(s)\|_{L^2}. \tag{3.10}$$

(3.7),(3.9),(3.10) を併せて

$$\|(V_t - V_s)f\|_{L^2} \le C\|u(t) - u(s)\|_{L^2}\|(1-\Delta)f\|_{L^2} \tag{3.11}$$

を得る. 命題における $u \in C(I_{u_0}, H^2(\mathbb{R}^d))$ である事実と f を $(1-\Delta)^{-1}f, f \in L^2$ と置きなおせば題意を得る.

定理 1 の証明. 補題 2 より $V_t \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^{\infty,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ であるから V_t は H_0 コンパクトである. これにより (i),(ii) が従う ([Ar1] の定理 2.7, 定理 6.34 の応用). (iii) については $(H_t - z)^{-1} - (H_s - z)^{-1} = (H_t - z)^{-1}(V_s - V_t)(H_s - z)^{-1}$ と見て

$$\|(H_t - z)^{-1} - (H_s - z)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \le \frac{1}{|\mathrm{Im} z|}\|(V_t - V_s)(H_s - z)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \tag{3.12}$$

であるが (3.4) より

$$\|(V_t - V_s)(H_s - z)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \le \|(V_t - V_s)(1-\Delta)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))}\|(1-\Delta)^{-1}(H_s - z)^{-1}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \to 0 (t \to s) \tag{3.13}$$

となる事により従う.

次に離散固有値の時刻 t に関する安定性関する事実を述べよう:

定理 3. (i) $t_0 \in I_{u_0}$ とし, H_{t_0} は (a, b) 上重複度込みで m 個の離散固有値を有するとする. この時ある $\delta > 0$ が存在し任意の $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_{u_0}$ において H_t は (a, b) 上重複度込みで m 個の離散固有値を有する.
(ii) 特に (i) で $m = 1$ の時, $\sigma(H_{t_0}) \cap (a, b) = \{E_{t_0}\}$, $\sigma(H_t) \cap (a, b) = \{E_t\}$, $H_{t_0}\Omega_{t_0} = E_{t_0}\Omega_{t_0}$, $H_t\Omega_t = E_t\Omega_t$, $\|\Omega_{t_0}\| = \|\Omega_t\| = 1$ とすれば, $E_t \to E_{t_0}$, $\|\Omega_t - \Omega_{t_0}\| \to 0$, $t \to t_0$.

実は定理 3-(ii) での E_t, Ω_t を explicit に書く事が出来る. 定理 3-(ii) における E_{t_0}, Ω_{t_0} をそれぞれ E_0, Ω_0 と置き, $(a, b) = (E_0 - r_0, E_0 + r_0)$ とする. また, $C_{r_0}(E_0)$ を複素平面上の反時計回りに向き付けられた中心 E_0 , 半径 r_0 の円とし, 自己共役作用素 H の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ におけるレゾルベントを $R_H(z)$ と置く: $R_H(z) = (H - z)^{-1}$.

定理 4. ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ に対し H_t は $(E_0 - r_0, E_0 + r_0)$ において単純固有値 E_t のみを有し, それは以下の表示を持つ.

$$E_t = E_0 + \frac{\langle\Omega_0, (V_t - V_{t_0})\Omega_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)}.$$

ここで

$$c_n(t) := \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C_{r_0}(E_0)} dz\langle\Omega_0, [(V_t - V_{t_0})R_{H_{t_0}}(z)]^{n+1}\Omega_0\rangle,$$
$$d_n(t) := \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C_{r_0}(E_0)} dz\frac{\langle\Omega_0, [(V_t - V_{t_0})R_{H_{t_0}}(z)]^{n}\Omega_0\rangle}{E_0 - z}$$

とおいた. 更に E_t に付随する H_t の正規化された固有ベクトル Ω_t は

$$\Omega_t = \frac{\Omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{t,n}}{\sqrt{1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)}}$$

と表示出来る．ここで

$$\Omega_{t,n} := \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C_{r_0}(E_0)} dz R_{H_{t_0}}(z)[(V_t - V_{t_0})R_{H_{t_0}}(z)]^n\Omega_0$$

とおいた．

定理 3,4 の証明の概略． (3.12) から $s \in I_{u_0}$ を固定した時，H_s のレゾルベント集合の部分集合 K でコンパクトなるものを任意に持ってきた時,$z \in K$ 上 $\|(V_t - V_s)R_{H_s}(z)\|$ は $t \to s$ で 0 に一様収束する事が示される．これは [Ar2] の Appendix における Hypothesis（A）に他ならない．故に [Ar2] の Theorem A.3, Corollary A.4 が適用出来て題意を得る．

4 H_t の負の離散固有値

定理 1-(ii) から H_t の離散固有値はあるとすれば $(-\infty, 0)$ に位置する事になる．それではそれらは t によってどの様に分布するだろうか? 以下ではこの点について得られた結果を紹介しよう．まず (A.1),(A.2) の仮定の下で, $\inf\sigma(H_t)$ が固有値となる十分条件を与えよう:

定理 5. 初期エネルギー ((3.2) を参照) が $E(u_0) < 0$ を満たす時, H_t は I_{u_0} 上常に基底状態を持つ．即ち, $\inf\,\sigma(H_t)$ は H_t の固有値である．

証明. 定理 1-(ii) より $\inf\sigma_{\mathrm{ess}} = 0$ である事を知っている．ところが

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \langle u(t), V_t u(t)\rangle &\le 2\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \langle u(t), V_t u(t)\rangle \\ &= 2E(u(t)) = 2E(u(0)) < 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる事と [Ar2] の定理 6.9 より題意が示される．

****

最後に，三次元非線形シュレーディンガー (NLS) 方程式の場合に，本節冒頭で述べた事柄について考察していこう．ここで NLS 方程式とは

$$\begin{cases} -i\frac{\partial}{\partial t}u(t) &= H_t u(t), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3 \\ u_0(x) &= u(0,x), x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4.2}$$

であり今の場合

$$H_t = -\Delta - |u(t)|^2(x) \tag{4.3}$$

である．これは形式的には $V(x) = \delta(x)$(ディラックのデルタ関数) の場合を考えている事に相当する．

NLS の場合にも，命題，定理 1, 定理 3, 定理 4, 定理 5 は (証明に若干の修正を施す事で) そのまま成立する．更に，次の事実が成り立つ:

定理 5. $N(H_t)$ は H_t の負の離散固有値の個数 (重複度込み) を表すものとする. この時,

$$N(H_t) \leq a\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u(t)\|_{L^2} \tag{4.4}$$

が成り立つ. ここで $a > 0$ は universal constant を表す.

証明. ソボレフの埋め込み定理により $H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq 6$ で

$$\|v\|_{L^p} \leq C(n,p)\|v\|_{L^2}^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{p}} \tag{4.5}$$

が成立する. ここで $C(n,p)$ は v に依存しない定数 ([Tu] の命題 4.7). これと [Si] の Theorem 9.3 を併せれば

$$\begin{aligned} N(H_t) \leq a\|V_t\|_{L^{\frac{3}{2}}} &= a\|u(t)\|_{L^3}^2 \\ &\leq a\|u(t)\|_{L^2}\|\nabla u(t)\|_{L^2} \\ &= a\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

さてイントロで述べた様に NLS は初期値に応じて散乱, 爆発, 定在波の 3 パターンに分かれると述べた. この事と我々の H_t のスペクトルがどの様に関わっているのだろうか?

(A) 良く知られている様に, $u(t)$ は u_0 が " 十分小さければ" $t \to +\infty$ で $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \to 0$ である ($u(t)$ は散乱解である) 従って (4.4) から H_t の離散スペクトルは $t \to +\infty$ において " 消失する".

(B) 他方, 定理 4 によれば $E(u_0) < 0$ であれば H_t は必ず離散固有値を持つのであった. 実はこの条件と $|x|^2 u_0 \in L^2$ を満たせば $u(t)$ は大域解とならず有限時刻で爆発する. また $N(H_t)$ がある $T > 0$ が存在し $t \nearrow T$ で $N(H_t) \to +\infty$ となれば $u(t)$ は爆発解である.

(C) 三次元 cubicNLS 方程式においては次の非線形固有値方程式

$$-\Delta Q - |Q|^2 Q = -Q \tag{4.6}$$

の解 $Q \in H^2$ が無数に存在する事が知られている ([Ca]). そして $u(t) = e^{-it}Q$ は NLS の解である. この様な解を定在波解と呼ぶ. 今の場合 $H_t = -\Delta - |Q|^2$ であるからスペクトルは t によらず一定であり, しかも負の離散スペクトルが存在する.

(A),(B),(C) を併せると

・$N(H_t)$ が $t \to +\infty$ 消失 $\leftrightarrow$ $u(t)$ は散乱

・$N(H_t)$ が有限時刻で $+\infty$ $\leftrightarrow$ $u(t)$ は爆発

・$N(H_t)$ が一定 $\leftrightarrow$ $u(t)$ は定在波

という picture を想像したくなるのは筆者の思い込みであろうか. この事と関連すると思われる結果を紹介して本稿を終えることにする.

Theorem([HoRo]). u_0 は球対称とし, $\|u_0\|_{L^2}E(u_0) \leq \|Q\|_{L^2}E(Q)$ としよう. この時次が成り立つ:

(1) $\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}\|\nabla Q\|_{L^2}$ ならば $u \in H^1$ は大域解であり, 散乱解となる.

(2) 逆に $\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2} > \|Q\|_{L^2}\|\nabla Q\|_{L^2}$ ならば $u \in H^1$ は有限時刻で爆発する.

参考文献

[Ar1] 新井朝雄: 量子現象の数理, 朝倉書店 (2007).

[Ar2]: A. Arai, Spectral analysis of an effective Hamiltonian in nonrelativistic quantum electrodynamics, *Ann.Henri Poincaré.*, **12**, 119–152 (2011).

[Ca] Cazenave, T.: Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes **10**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[FGS] Frölich, J., Graffi, S., Schwarz, S.: Mean-Field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons. Commun. Math. Phys. **271**, 681-697 (2007)

[HoRo] Holmer, J., Roudenko, S.: A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation . Commun. Math. Phys. **282**(2), 435-467 (2008)

[Is] 磯崎洋, 多体シュレーディンガー方程式, 丸善, 2004.

[NaSch] Nakanishi, K., Schlag, W.: Global dynamics above the ground state energy for the cubic NLS equation 3D. Calc.Var.**44**, 1-45, (2012)

[Si] B. Simon, Functional integration in quantum physics, New York, Academic Press, 1979.

[Tu] 堤誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館, 2004.