数理解析研究所講究録
第 1975 巻 2015 年 66-73

Maxwell方程式と弾性方程式の関係について

茨城大学　教育学部　曽我日出夫
Hideo Soga
Faculty of Education, Ibaraki University
E-mail: soga@mx.ibaraki.ac.jp

はじめに

本稿では次のことについて論じたい。

(a) Maxwell 方程式と弾性体の横波の方程式との同等性について

(b) 一般化された Maxwell 方程式とある２階双曲型方程式の同等性について

(c) 射影子写像による方程式の分解について

(d) 方程式のポテンシャル表示について

(a) について

電場 $E(t,x)$ と磁場 $H(t,x)$ の方程式である Maxwell 方程式は (真空中で)、次のような形をしている。

$$(0.1)\qquad \begin{cases} \partial_t(\varepsilon E) = \mathrm{curl}\ H, \\ \partial_t(\mu H) = -\mathrm{curl}\ E. \end{cases}$$

ここで、ε は誘電率、μ は透磁率である。

一方、(等方性線型) 弾性方程式は次のような形をしている。

$$(0.2)\qquad \rho\partial_t^2 u = (\lambda+\tilde{\mu})(\partial_x{}^t\partial_x)u + \tilde{\mu}\Delta u \qquad \big((\partial_x{}^t\partial_x)_{ij} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} \big).$$

ここで、$u(t,x)$ は変位ベクトルであり、$\lambda,\ \tilde{\mu}$ は Lamé 定数である。このうち、横波と呼ばれる解の方程式は

$$(0.3)\qquad \rho\partial_t^2 u = \tilde{\mu}(\Delta I - \partial_x{}^t\partial_x)u$$

である。

(0.1) と (0.3) は外見上は違っているが、横波は存在するが縦波は存在しないなど、解の振る舞いはよく似ている。第 1 章では、これらの方程式がある変換式で相互に移り合うことを示したい。

(b) について

方程式 (0.1) は縦波の解を含まないのであるが、この方程式にある 1 階の項を付け加えると、縦波の解が含まれ、方程式 (0.2) と同等になる。つまり、相互に変換できる。第 2 章では、このことについてもう少し一般的な設定で論じたい。考える方程式は、$v = {}^t(v_1, \ldots, v_n), \tilde{v} = {}^t(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ に関する次の方程式である。

$$(0.4) \qquad \begin{cases} D_t v(t,x) = A(D_x)v(t,x) + B(D_x)\tilde{v}(t,x), & (\ D = -i\partial\ ) \\ D_t \tilde{v}(t,x) = -B(D_x)v(t,x) + \tilde{A}(D_x)\tilde{v}(t,x). & \end{cases}$$

ここで、$A(\xi), \tilde{A}(\xi), B(\xi)$ は、(実数値) 1 次斉次関数の $n \times n$-行列であり、互いに可換で、${}^tA(\xi) = A(\xi),\ {}^t\tilde{A}(\xi) = \tilde{A}(\xi),\ {}^tB(\xi) = -B(\xi)$ をみたすとする。Maxwell 方程式では、$v = \varepsilon^{1/2}E,\ \tilde{v} = \mu^{1/2}H,\ A = \tilde{A} = 0, B(D_x) = -i\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1/2}\mathrm{curl}$ となっている (ε, μ はスカラー値とする)。方程式 (0.4) を Maxwell 型方程式と呼ぶことにする。

方程式 (0.4) は、次の 2 階の双曲型方程式と相互に変換できる。

$$(0.5) \qquad \left\{D_t^2 - (A(D_x) + \tilde{A}(D_x))D_t + A(D_x)\tilde{A}(D_x) + B(D_x)^2\right\}u(t,x) = 0.$$

弾性方程式 (0.2) は、この方程式において、$A(D_x) = -\tilde{A}(D_x)$ となっている特別の場合である。

(c) について

Ker $A(\xi)$ $(= \{\eta |\ A(\xi)\eta = 0\})$ への直交射影子を $P(\xi)$ とする。第 3 章では $P(D_x)$ を使って方程式 (0.4) を分解することを考える。

Ker $A(\xi)$ の直交余空間への射影子を $P^{\perp}(\xi)$ $(= I - P(\xi))$ とする。ある条件のもとで、方程式 (0.4) は、次のように、$P(D_x)v,\ P^{\perp}(D_x)v$ と $P(D_x)\tilde{v},\ P^{\perp}(D_x)\tilde{v}$ の方程式に分解できる。

$$(0.6) \qquad D_t(P^{\perp}v) = A(D_x)(P^{\perp}v),$$

$$(0.7) \qquad \begin{cases} D_t(Pv) = B(D_x)(P\tilde{v}), \\ D_t(P\tilde{v}) = -B(D_x)(Pv), \end{cases}$$

$$(0.8) \qquad D_t(P^{\perp}v) = \tilde{A}(D_x)(P^{\perp}v).$$

つまり、Maxwell 型方程式 (0.4) は、$P^{\perp}(D_x)v$ と $P^{\perp}(D_x)\tilde{v}$ それぞれの閉じた方程式 (0.6) と (0.8) および Maxwell 方程式 (0.1) に似た方程式 (0.7) とに分解できるのである。(0.6), (0.8) は、(0.7) と異なるモードの波を支配している。したがって、(0.4) において $A(D_x), \tilde{A}(D_x)$ の項を挿入するということは、「$B(D_x)$ によるものとは異なるモードの波 (例えば、横波に対して縦波) を存在させること」を意味している。

(d) について

ここでいうポテンシャル表示とは、$P^{\perp}(\xi)\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\left\{e_1(\xi), \ldots, e_k(\xi)\right\}$ をとり、方程式を $e(\xi) = (e_1(\xi), \ldots, e_k(\xi))$ に関する成分 φ $(= {}^te(D_x)v$, etc.) の方程式に書きかえることを意味する。そして、この φ をポテンシャルと呼ぶことにする。第 4 章では上記方程式 (0.6) と (0.8) とをポテンシャルで表示してみる。

さらに、Maxwell 型方程式 (0.4) を (0.6)～(0.8) とは少し違った方程式に書き変え、それをポテンシャルで表示してみる。このように表示した方程式は、2 階化方程式 (0.5)

が弾性方程式のとき、各項がすべて微分作用素になってる。すなわち、方程式 (0.4) の形では擬微分作用素が現れているのだが、ポテンシャル表示には微分作用素のみになっている。物理学的な立場からはこのような表示の方が望ましいといえるだろう。実際 Podgainy-Zaimidoroga [3] はこの方程式について物理学的な論究を行っている。また、Iguchi [2] は、本稿と同種の問題 ((a) と (d)) について物理学的な視点で論及している。さらに、電磁気学の総括的な論説も与えている。

1. Maxwell 方程式と弾性 (横波) 方程式の関係

curl v は、$\partial_x = {}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ と v の外積 $\partial_x \times v$ になっている。写像: $v \mapsto$ curl $v\ \big(= \partial_x \times v\big)$ を行列で表わしたものを $R(\partial_x)$ とすると、

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^tR(\xi) = -R(\xi),$$

$$R(\xi)R(\xi) = \xi\,{}^t\xi - |\xi|^2 I \tag{1.1}$$

となる。Maxwell 方程式 (0.1) は、次のように、$v = \varepsilon^{1/2}E,\quad \tilde{v} = \mu^{1/2}H$ に関する方程式に書きかえることができる。以後、Fourier 変換を想定して、∂_t, ∂_x の代わりに $D_t(= -i\partial_t), D_x(= -i\partial_x)$ を使うことにする。

$$D_t \begin{pmatrix} v \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1/2}R(D_x)\mu^{-1/2} \\ -\mu^{-1/2}R(D_x)\varepsilon^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

これは実係数対称方程式系の一種であり、Friedrichs [1] や Schulenberger-Wilcox [4] らにより調べられたものである。

弾性方程式 (0.2) はつぎのように書き変えることができる。

$$\rho\, \partial_t^2 u = (\lambda + 2\tilde{\mu})(\partial_x {}^t\partial_x)u + \tilde{\mu}(\Delta I - \partial_x {}^t\partial_x)u.$$

この右辺の第 1 項は、縦波を生み出すものであり、第 2 項は横波のものである (方程式を縦波と横波の成分に分解できる)。したがって、横波の方程式は、$\rho\, \partial_t^2 u = \tilde{\mu}(\Delta I - \partial_x {}^t\partial_x)u$ である。(1.1) より、これは $R(D_x)$ を使って次のように書きかえることができる。

$$D_t^2 u = -\rho^{-1}\tilde{\mu}\ R(D_x)^2\ u. \tag{1.3}$$

これ以後、ε, μ はスカラー値とし、$c_0 = \varepsilon^{-1/2}\mu^{-1/2},\ c_1 = \rho^{-1/2}\ \tilde{\mu}^{1/2}$ とおく。次の定理で示すように、方程式 (1.2) と (1.3) とは相互に移りあう。

定理 1. 写像 : ${}^t(u(t,\cdot), D_t u(t,\cdot)) \mapsto {}^t(v(t,\cdot), \tilde{v}(t,\cdot))$ を

$$\begin{cases} v(t,x) = D_t u(c_0 t/c_1, x) + c_1 R(D_x) u(c_0 t/c_1, x), \\ \tilde{v}(t,x) = D_t u(c_0 t/c_1, x) - c_1 R(D_x) u(c_0 t/c_1, x) \end{cases}$$

と定義すると、この写像は ${}^tD_x u(t,x) = 0,\ {}^tD_x D_t u(t,x) = 0$ をみたす空間で一対一となる。さらに、この写像により、方程式 (1.2) と (1.3) は相互に移りあう。

(1.2) 方程式において、$w(s,x)=v(s/c_0,x)$, $\tilde{w}(s,x)=\tilde{v}(s/c_0,x)$ とおき、$w(s,x)$, $\tilde{w}(s,x)$ の方程式に書き変えると、$D_s w - R\tilde{w}=0$, $D_s\tilde{w}-Rw=0$ が得られる。したがって、(1.2) において、$c_0=\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1/2}=1$ としても本質的には変わらない。同様に、(1.3) おいても、$c_1=\rho^{-1/2}\,\tilde{\mu}^{1/2}=1$ としても本質的には変わらない。これらのことに留意して、$c_0=c_1=1$ と仮定して定理 1 を簡単に確かめておこう。

$v=D_tu+Ru$ より、$D_tv=D_t^2u+RD_tu$ となる。$\tilde{v}=D_tu-Ru$ より、$R\tilde{v}=RD_tu-R^2u$ となる。ゆえに、

$$D_tv-R\tilde{v}=\left(D_t^2u+R^2u\right)$$

が得られる。同様にして次式が得られる。

$$D_t\tilde{v}+Rv=\left(D_t^2u+R^2u\right).$$

以上のことから、定理 1 が成り立つことが分かる。定理 1 の主張を図示すると下のようになる。

$$\left\{\begin{array}{l} D_tv-R\tilde{v}=0,\\ D_t\tilde{v}+Rv=0.\end{array}\right.$$

$$\Updownarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} v=D_tu+Ru,\\ \tilde{v}=D_tu-Ru.\end{array}\right.$$

$$D_t^2u+R^2u=0.$$

上述の変換式は唯一のものではない。$\tilde{v}'=D_tu$, $v'=Ru$ とおくと $D_tv'-R\tilde{v}'=0$ がなりたつ。また、方程式 $D_t^2u+R^2u=0$ より、$D_t^2u+R^2u=D_t(D_tu)+R(Ru)$ であることに注意すると、$D_t\tilde{v}'+Rv'=0$ が得られる。つまり、次の式がなりたつ。

$$\left\{\begin{array}{l} D_tv'-R\tilde{v}'=0,\\ D_t\tilde{v}'+Rv'=0.\end{array}\right. \tag{1.4}$$

この方程式は、v, $\tilde{v}$ の方程式と全く同じ形をしており、定理にある変換式とは違うものが得られたことになる。この変換 (すなわち v' と $\tilde{v}'$) は、Iguchi [2] で取りあげているものと同じアイデアのものである。実は

$$\left\{\begin{array}{l} v'=(v-\tilde{v})/2,\\ \tilde{v}'=(v+\tilde{v})/2\end{array}\right.$$

であり、v, $\tilde{v}$ と v', $\tilde{v}'$ の関係は自然なものである。

2．Maxwell 方程式の一般化とその２階化変換

$A(\xi)$, $\tilde{A}(\xi)$, $B(\xi)$ を、(実数値) 1 次斉次関数の $n\times n$-行列とし、次の式をみたすとする。

$${}^tA(\xi)=A(\xi),\quad {}^t\tilde{A}(\xi)=\tilde{A}(\xi),\quad {}^tB(\xi)=-B(\xi).$$

さらに、$A(\xi)$, $\tilde{A}(\xi)$, $B(\xi)$ は互いに可換だとする。$v={}^t(v_1,\dots,v_n)$, $\tilde{v}={}^t(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_n)$ に対する次の方程式を Maxwell 型方程式と呼ぶことにする。

$$\left\{\begin{array}{l} D_tv(t,x)=A(D_x)v(t,x)+B(D_x)\tilde{v}(t,x),\\ D_t\tilde{v}(t,x)=-B(D_x)v(t,x)+\tilde{A}(D_x)\tilde{v}(t,x).\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Maxwell 方程式は $A(\xi)=\tilde{A}(\xi)=0,\ B(\xi)=\varepsilon^{-1/2}R(\xi)\mu^{-1/2}$ となっている特別な場合である。Maxwell 型方程式 (2.1) は、Friedrichs [1], Schulenberger-Wilcox [4] らによって調べられた (実対称) 双曲型方程式系の 1 種である。

方程式 (2.1) は、以下の定理 2 でいうように、次の 2 階双曲型方程式に変換できる。

$$\big(D_t^2-(A+\tilde{A})D_t+(A\tilde{A}+B^2)\big)u(t,x)=0. \tag{2.2}$$

この特性根はすべて実数になる。弾性方程式は

$$\big\{D_t^2-\rho^{-1}(\lambda+2\tilde{\mu})D_x{}^tD_x+\rho^{-1}\tilde{\mu}(D_x{}^tD_x-|D_x|^2I)\big\}u=0$$

というものであった。線型空間 $\big\{c\xi\mid c\in\mathbb{R}\big\}$ への直交射影子を $P(\xi)$ とすると、$P(\xi)=(\xi/|\xi|)\ {}^t(\xi/|\xi|)$ となる。さらに、$R(\xi)^2=\xi{}^t\xi-|\xi|^2I$ であるので、上記の方程式は

$$\big\{D_t^2-\rho^{-1}(\lambda+2\tilde{\mu})|D_x|^2P(D_x)^2+\rho^{-1}\tilde{\mu}R(D_x)^2\big\}u=0.$$

とかける。したがって、弾性方程式は、(2.2) において、

$$\begin{aligned}A(\xi)&=-\tilde{A}(\xi)=\rho^{-1/2}(\lambda+2\tilde{\mu})^{-1/2}|\xi|P(\xi),\\ B(\xi)&=\rho^{-1/2}(\lambda+2\tilde{\mu})^{-1/2}R(\xi)\end{aligned}$$

とおいたものになっている。

定理 2. $A(\xi)\tilde{A}(\xi)\le 0$ かつ $\mathrm{Ker}\ A(\xi)\cap\mathrm{Ker}\ \tilde{A}(\xi)\cap\mathrm{Ker}\ B(\xi)=\{0\}$ と仮定する。$v(t,x),\tilde{v}(t,x)$ を

$$\begin{cases}v(t,x)=\big(D_t-\tilde{A}(D_x)+B(D_x)\big)u(t,x),\\ \tilde{v}(t,x)=\big(D_t-A(D_x)-B(D_x)\big)u(t,x)\end{cases}$$

と定義すると、写像：${}^t(u(t,\cdot),D_tu(t,\cdot))\mapsto{}^t(v(t,\cdot),\tilde{v}(t,\cdot))$ は一対一であり、これにより、方程式 (2.1) と (2.2) は相互に移りあう。

上の定理の主張を図示すると下図のようになる。

$$D_t\begin{pmatrix}v\\ \tilde{v}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A & B\\ -B & \tilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=0$$

$$\Big\Updownarrow\quad\begin{cases}v=(D_t-\tilde{A}+B)u\\ \tilde{v}=(D_t-A-B)u\end{cases}$$

$$\big(D_t^2-(A+\tilde{A})D_t+(A\tilde{A}+B^2)\big)u=0$$

3. 射影子写像による方程式の分解

本章では、Maxwell 型方程式 (2.1) において、次のことを仮定する。

$$A(\xi)B(\xi)=0,$$

$$\mathrm{Ker}\ A(\xi)\subset\mathrm{Ker}\ \tilde{A}(\xi), \tag{3.1}$$

$$\dim\mathrm{Ker}\ A(\xi)\ \text{は常に一定である}. \tag{3.2}$$

(3.2) は $A(\xi)$ の 0-固有値の重複度が一定であることと同等である。これは、Ker $A(\xi)$ への直交射影子 $P(\xi)$ などの滑らかさを得るための仮定である。Maxwell 型方程式の 2 階化方程式 (2.2) が弾性方程式のとき（すなわち $A(\xi)=-\tilde{A}(\xi)=\rho^{-1/2}(\lambda+2\tilde{\mu})^{-1/2}|\xi|P(\xi)$, $B(\xi)=\rho^{-1/2}(\lambda+2\tilde{\mu})^{-1/2}R(\xi)$)、上記の仮定はすべてみたされる。また、$\tilde{A}(\xi)=0$ のとき (3.1) は常に成立することに注意しよう。

$P^{\perp}(\xi)=I-P(\xi)$ とおく。$P(D_x)$, $P^{\perp}(D_x)$ を使って，Maxwell 型方程式は次の定理で示すように分解できる。

定理３．１． 方程式 (2.1) は、次の連立方程式と同等になる。

$$D_t(P^{\perp}(D_x)v)=A(D_x)(P^{\perp}(D_x)v), \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} D_t(P(D_x)v)=B(D_x)(P(D_x)\tilde{v}), \\ D_t(P(D_x)\tilde{v})=-B(D_x)(P(D_x)v), \end{cases} \tag{3.4}$$

$$D_t(P^{\perp}(D_x)\tilde{v})=\tilde{A}(D_x)(P^{\perp}(D_x)\tilde{v}). \tag{3.5}$$

$D_t, A(D_x), B(D_x), P(D_x), P^{\perp}(D_x)$ は互いに可換であること、$P(D_x)A(D_x)=A(D_x)$ $P(D_x)=0, P^{\perp}(D_x)B(D_x)=B(D_t)P^{\perp}(D_x)=0$ となることを使うと、定理 3 は証明できる。

(3.3) と (3.5) は $P^{\perp}(D_x)v$ と $P^{\perp}(D_x)\tilde{v}$ に関する閉じた方程式なっていること、また (3.4) は Maxwell 方程式によく似た形であることに注意したい。弾性方程式のとき、縦波の方程式は (3.3) と (3.5) に変換され、横波の方程式は (3.4) に変換されている。

次に、方程式 (2.2) において $A(\xi)=-\tilde{A(\xi)}$ となっているとき、すなわち、方程式

$$\big(D_t^2-A(D_x)^2+B(D_x)^2\big)u=0 \tag{3.6}$$

に対して定理 2 とは少しちがった一階化変換を考え、その変換方程式において定理 3．1 と同種の分解を行ってみたい。その一階化のアイデアは第 1 章の (1.4) に対するものに近い。(3.6) において、$(D_t^2-A^2+B^2)u=D_t(D_tu)-A(Au)+B(Bu)$ と書き、$v'=D_tu$ とおく。さらに、$\tilde{v}'$ を

$$\tilde{v}'=\frac{1}{2}P(D_x)(\tilde{v}-v)-\frac{1}{2}P^{\perp}(D_x)(\tilde{v}-v)$$

と定義する。ここで、$(1/2)P(D_t)(\tilde{v}-v)=Bu$, $(1/2)P^{\perp}(D_x)(\tilde{v}-v)=Au$ となることに注意しよう。

$A(D_t)P(D_x)=B(D_t)P^{\perp}(D_x)=0$ であることに注意すると、方程式 (3.6) より $D_tv'-A\tilde{v}'+B\tilde{v}'=0$ が得られる。したがって、下記の定理のように方程式 (3.6) は $v', \tilde{v}'$ の方程式に変換できることが分かる。

定理３．２． 方程式 (3.6) は、次の連立方程式と同等になる。

$$\begin{cases} D_tv'-A(D_x)\tilde{v}'-B(D_x)P(D_x)\tilde{v}'=0, \\ D_t(P(D_x)\tilde{v}')+B(D_x)v'=0, \\ D_t(P^{\perp}(D_x)\tilde{v}')-A(D_x)v'=0. \end{cases} \tag{3.7}$$

この定理が定理３．１にない意味をもつと思えるのは、(3.6) が弾性方程式のとき、次の章で行うように $P^{\perp}(D_t)\tilde{v}'$ のポテンシャル表示を導入することによって、定理３．２の方程式がすべて微分方程式になることである。さらに、この方程式については、物理的な意味付けを行っている研究者がいる ([3] 参照)。

４．方程式のポテンシャル表示

本章では、第３章にある方程式をポテンシャルによって表示することを考える。本章では第３章と同じ仮定がみたされているとする。$\{e_i(\xi)\}_{i=1,\dots,k}$ を $P^{\perp}(\xi)\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする ($k = \dim P^{\perp}(\xi)\mathbb{R}^n$)。ここでいうポテンシャルとは、$e(\xi) = (e_1(\xi), \dots, e_k(\xi))$ としたとき、関数 $\varphi = {}^t e(D_t)v$ $(= {}^t eP^{\perp}v)$ のことである。(3.2) より $e(\xi)$ は ξ に関して滑らかにとれることに注意したい。また、

$$P^{\perp}(D_x)v = e(D_x)\varphi, \qquad {}^t e(D_x)e(D_x) = 1$$

が成立する。同様に、$\tilde{\varphi} = {}^t e(D_t)\tilde{v}$ とおくと、これに対して φ と同様のことがなりたつ。

これら $\varphi, \tilde{\varphi}$ を使って、(3.3), (3.5) はそれぞれ $D_t\varphi = {}^t eAe\varphi$, $D_t\tilde{\varphi} = {}^t e\tilde{A}e\tilde{\varphi}$ と表示されるので、定理３．１にある方程式群は、次の定理で示すように変換できる。

定理４．１． $w, \tilde{w}$ は ${}^t e(D_x)w = 0, {}^t e(D_x)\tilde{w} = 0$ をみたすとし、

$$\begin{cases} v = w + e(D_x)\varphi, \\ \tilde{v} = \tilde{w} + e(D_x)\tilde{\varphi} \end{cases}$$

とおく。この変換式により、方程式 (3.3)~(3.5) は、次の連立方程式と同等になる。

$$\begin{cases} D_t w = B(D_x)\tilde{w}, \\ D_t\tilde{w} = -B(D_x)w, \\ {}^t e(D_x)w = {}^t e(D_x)\tilde{w} = 0, \\ D_t\varphi = {}^t e(D_x)A(D_x)e(D_x)\varphi, \\ D_t\tilde{\varphi} = {}^t e(D_x)\tilde{A}(D_x)e(D_x)\tilde{\varphi}. \end{cases}$$

この定理は、Maxwell 型方程式 (2.1) の解がポテンシャル表示の部分と Maxwell 方程式に似た方程式の解との和で書けることを主張している。また、上記の $\varphi, \tilde{\varphi}$ に対する方程式は、次のように、ψ に関する２階の方程式で表すこともできる。

$$(D_t - {}^t eAe)(D_t - {}^t e\tilde{A}e)\psi = 0,$$
$$\begin{cases} \varphi = (D_t - {}^t e\tilde{A}e)\psi, \\ \tilde{\varphi} = (D_t - {}^t eAe)\psi. \end{cases}$$

次に、定理３．２にある方程式をポテンシャルで表示してみる。$\varphi' = {}^t e\tilde{v}'$ $(= {}^t eP^{\perp}\tilde{v}')$ とおくと、$P^{\perp}\tilde{v}' = e\varphi'$ となる。また、$\tilde{v}' = P^{\perp}\tilde{v}'$ と ${}^t eA\tilde{v}' = 0$ とは同等になる。したがって、次の定理が得られる。

定理４．２． 方程式 (3.7) は次の方程式と相互に移り合う。

$$\begin{cases} D_t v' - B\tilde{v}' - Ae\varphi' = 0, \\ D_t \tilde{v}' + Bv' = 0, \\ {}^t eA\tilde{v}' = 0, \\ D_t \varphi' - {}^t eAv' = 0. \end{cases}$$

方程式 (3.6) が弾性方程式のとき、定理４．２にある方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} D_t v' - c_2 R(D_x)\tilde{v}' - c_1 D_x \varphi' = 0, \\ D_t \tilde{v}' + c_2 R(D_x) v' = 0, \\ {}^t D_x \tilde{v}' = 0, \\ D_t \varphi' - c_1 {}^t D_x v' = 0. \end{cases}$$

定理４．１にある方程式では擬微分作用素が現れるが、この方程式ではすべて微分作用素のみとなっている。したがって、物理学的にはこの方が望ましい形であるといえる。実際、Podgainy-Zaimidoroga [3] はこの方程式に物理学的な意味付けを行っている。このように、ポテンシャル表示を導入することは、方程式を分解してその構成部分を取り出して表示するということだけでなく、方程式を微分作用素のみで書き表すことを可能にする。

文　献

[1] K.O. Friedrichs: Symmetric hyperbolic system of linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 7, 345-392, (1954).

[2] K. Iguchi (井口和基): スカラー波は存在するか？　第１部：既知のさまざまな電磁場理論, http://quasimoto.exblog.jp/18946831/ (にある資料), (2012).

[3] D.V. Podogainy and O.A. Zaimidoroga: Nonrelativistic theory of electroscalar field and Maxwell electrodynamics, http://arXiv.org/pdf/1005.3130.pdf, (2010).

[4] J.R. Schulenberger and C.H. Wilcox: Coerciveness inequalities for nonelliptic systems of partial differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 88, 229-305, (1972).