

Decomposition formula of the braid zeta function

九州大学 数理学府 岡本 健太郎*
Kentaro Okamoto
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

Abstract

有限集合上の力学系からゼータ関数が定義できる。このようなゼータ関数の性質は黒川、小山、Kim らによって詳しく調べられており、代数体のデデキント・ゼータ関数の性質と類似した多くの性質を持っていることが知られている。本稿ではまず、この力学系ゼータ関数の一般化として、組み紐群の元に関するゼータ関数を定義し、その性質として、留数に結び目の古典的な不変量である Alexander 多項式が現れることや、ある条件の下でリーマン予想の類似が成り立つことを説明する。また、組み紐間に特殊な積を導入し、その積で表される組み紐のゼータ関数は本質的に 2 つのゼータ関数に分解することがわかった。後半ではこの分解公式とそれから得られる系を紹介する。

1 Introduction

1.1 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数

$X := \{1, 2, \dots, n\}$ を有限集合とし、 $\sigma \in \text{Aut}(X) \simeq S_n$ とする。このとき (σ, X) は力学系であり、この力学系に関するゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta_\sigma(s) := \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\text{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m \right\},$$

ここで $\text{Fix}(\sigma^m) := \{x \in X \mid \sigma^m x = x\}$ とする。これを σ に関する \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数とよぶ。このゼータ関数は次のような性質をもつことが知られている ([7])。

命題 1.1.1. (1) $\text{Cycle}(\sigma)$ と書いて $\sigma \in S_n$ の中の互いに素なサイクル全体の集合を表し、 $P \in \text{Cycle}(\sigma)$ に対して $l(P)$ でそのサイクルの長さを表すことにする。このとき $\zeta_\sigma(s)$ は次のようなオイラー積表示をもつ：

$$\zeta_\sigma(s) = \prod_{P \in \text{Cycle}(\sigma)} \frac{1}{1 - s^{l(P)}}.$$

(2) $p_n : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ を対称群の置換表現とする。このとき $\zeta_\sigma(s)$ は次のような行列式表示をもつ：

$$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}.$$

(3) $\zeta_\sigma(s)$ は次のような関数等式を満たす：

$$\zeta_\sigma(s) = \text{sgn}(\sigma)(-s)^{-n} \zeta_\sigma(1/s),$$

*Kyushu University, e-mail:k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

ここで、 $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ は σ の符号を表す。
 (4) $\zeta_\sigma(e^{-s})$ は、リーマン予想の類似を満たす。つまり、 $\zeta_\sigma(e^{-s})$ のすべての極について

$$\text{Re}(s) = 0.$$

が成り立つ。

このように、 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数は代数体に対して定義されるデデキント・ゼータ関数と非常に類似した性質をもっている。しかし、デデキント・ゼータ関数は、 $s = 1$ における留数にその代数体の不変量（類数や判別式、レギュレーターなど）が現れるという性質をもつが、一方で \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数においては、これに類似した性質はない。本研究では、対称群の元によって定まる \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数を一般化し、「組み紐に関するゼータ関数」を定め、類似の性質が成り立つかを検証する。そして組み紐の位相幾何学的な不変量の抽出を目指す。

1.2 組み紐群

まずは組み紐群について簡単にまとめる（詳細は [3],[6],[10] を参照）。

定義 1.2.1. B_n を次のように定める。

$$B_n := \langle \sigma_i (i = 1, 2, \dots, n-1) \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i-j| \geq 2), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-2) \rangle.$$

これを n 次組み紐群という。

生成元 σ_i は、Figure 1 のように i 番目と $i+1$ 番目の紐の交差であるとする ([3])。また、紐を下につなげることを積とする。さらに、Figure 2 のように組み紐の上と下をつなぎ合わせることによってできる絡み目を組み紐の閉包といい、 σ の閉包を $\hat{\sigma}$ と書くことにする。

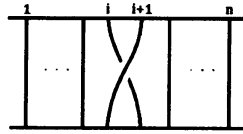


Figure 1: 生成元 σ_i

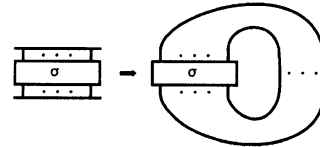


Figure 2: σ の閉包

以下、基本事項をいくつか述べる。

(1) 全射 $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$ が次のようにして自然に定まる。

$$\pi_n(\sigma_i) := (i, i+1).$$

(2) $\sigma \in B_n$ に対し、 $\pi_n(\sigma) \in S_n$ が長さ n のサイクルであるとき、 $\hat{\sigma}$ は結び目になる。

(3) 組み紐 $\sigma \in B_n$ が生成元を用いて $\sigma = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$ と表されるとき、準同型写像 $\varepsilon : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ を次で定める。

$$\varepsilon(\sigma) := e_1 + e_2 + \cdots + e_r.$$

このとき、 $\varepsilon(\sigma)$ を、組み紐 σ の指数和という。

1.3 表現のゼータ関数

一般に、群とその表現が与えられるときゼータ関数が定義できる。

定義 1.3.1. 群の表現 (G, ρ, V) が与えられているとき、元 $g \in G$ に対し、次の関数を考える。

$$\zeta(s, g; \rho) := \det(I - \rho(g)s)^{-1}.$$

これを g の、表現 ρ に付随するゼータ関数と呼ぶ。

上の定義により、 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数は対称群 S_n の置換表現 p_n に付随するゼータ関数であると考えることができる。つまり、 $\sigma \in S_n$ に対し

$$\zeta_\sigma(s) = \zeta(s, \sigma; p_n)$$

と表すことができる。そこで、組み紐群の表現から同様にゼータ関数を構成する。

1.4 組み紐群の Burau 表現とゼータ関数

定義 1.4.1. 組み紐群 B_n の生成元 σ_i に関して写像 $\beta_{n,q}$ を次のように定義する。

$$\beta_{n,q}(\sigma_i) := I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} \in \mathrm{GL}_n(\Lambda). \quad (1.1)$$

ここで $\Lambda := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ (\mathbb{Z} 係数の一変数 Laurent 多項式環) とする。この $\beta_{n,q}$ を、組み紐群の **Burau 表現** と呼ぶ。

この Burau 表現を用いて、組み紐 $\sigma \in B_n$ に関するゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}. \quad (1.2)$$

また、組み紐群の Burau 表現と対称群の置換表現との間には次のような関係が成り立っている。

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\beta_{n,q}} & \mathrm{GL}_n(\Lambda) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow q \rightarrow 1 \\ S_n & \xrightarrow{p_n} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \end{array} \quad (1.3)$$

この可換図式から、極限公式

$$\lim_{q \rightarrow 1} \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \zeta(s, \pi_n(\sigma), p_n) = \zeta_{\pi_n(\sigma)}(s). \quad (1.4)$$

が成り立ち、組み紐 $\sigma \in B_n$ のゼータ関数は、 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数の q -変形であると思える。

2 組み紐のゼータ関数の性質

2.1 命題 1.1.1 に類似した性質

組み紐のゼータ関数の基本的な性質として、次が得られた。

定理 2.1.1. (1) 組み紐 $\sigma \in B_n$ に対して、次のような関数等式が成り立つ。

$$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \mathrm{sgn}_q(\sigma)^{-1} (-s)^{-n} \zeta(1/s, \sigma^{-1}; \beta_{n,q}).$$

ここで、 $\mathrm{sgn}_q(\sigma) := \det(\beta_{n,q}(\sigma))$ とする。

(2) 組み紐の閉包 $\hat{\sigma}$ が結び目である (つまり $\pi_n(\sigma) \in S_n$ が長さ n のサイクルである) とき、 $\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q})$ の $s = 1$ における留数は次で与えられる。

$$\mathrm{Res}_{s=1} \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q} \Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}.$$

ここで $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$ は結び目 $\hat{\sigma}$ に関する Alexander 多項式であり、 $[n]_q$ は q -整数で、次のように定める。

$$[n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(3) q は複素平面上の単位円周上の点 (このとき q は $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と表される) であり、 q の偏角が不等式 $|\theta| < 2\pi/n$ を満たしていると仮定する。このとき任意の組み紐 $\sigma \in B_n$ に関するゼータ関数はリーマン予想の類似を満たす。つまり、 $\zeta(e^{-s}, \sigma; \beta_{n,q})$ のすべての極に関して次が成り立つ。

$$\operatorname{Re}(s) = 0.$$

(1) に関しては行列式表示 (1.2) から直ちに示されるので、以下 (2)、(3) の証明を簡潔に述べる。Burau 表現 $\beta_{n,q}$ は 1 次元の自明表現 $\mathbf{1}$ と、 $n-1$ 次元の既約な Burau 表現 $\beta_{n,q}^r$ に分解される。また、 $\beta_{n,q}^r$ を用いて、結び目 $\hat{\sigma}$ の Alexander 多項式が次のように得られることが知られている ([3])。

$$\det(I_{n-1} - \beta_{n,q}^r(\sigma)) = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})\Delta_{\hat{\sigma}}(q).$$

この結果を用いて、(2) が示される。

(3) に関しては、既約な Burau 表現 $\beta_{n,q}^r$ のユニタリ性から得られる。ユニタリ性は Squire により示されている ([11])。具体的に、

$$\Omega_n^r := \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} & -q^{-\frac{1}{2}} & & & \\ -q^{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -q^{-\frac{1}{2}} & \\ & & -q^{\frac{1}{2}} & q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} & \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}]).$$

という行列を用いて、次のような等式を満たすことが示されている。

$$\beta_{n,q}^r(\sigma) \cdot \Omega_n^r \cdot \beta_{n,q}^r(\sigma)^* = \Omega_n^r.$$

Ω_n^r が正定値であるとき、任意の $\sigma \in B_n$ に対して $\beta_{n,q}^r(\sigma)$ の固有値の絶対値が 1 となることからリーマン予想の類似が示される。

2.2 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数との比較

(1.4) と定理 2.1.1 からわかるように、(1.2) で定義された組み紐のゼータ関数は \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数の q -変形であり、多くの類似した性質をもつ。さらに、 \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数にはなかった性質として、組み紐のゼータ関数は $s=1$ における留数に (結び目の) 不変量が現れた。これは第 1 章で述べたように、代数体に対して定義されるデデキントゼータ関数の $s=1$ における留数に、代数体の不変量が現れる性質に対応するものと考えられる。

ゼータ関数	\mathbb{Z} -力学系ゼータ関数	組み紐のゼータ関数
元	$\sigma \in \operatorname{Aut}(X) \simeq S_n$	$\sigma \in B_n$
母関数表示	$\zeta_{\sigma}(s) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\operatorname{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr} \beta_{n,q}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$
行列式表示	$\zeta_{\sigma}(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}$
関数等式	$\zeta_{\sigma}(s) = \operatorname{sgn}(\sigma)(-s)^{-n} \zeta_{\sigma}(1/s)$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \operatorname{sgn}_q(\sigma)^{-1} (-s)^{-n} \zeta(1/s, \sigma^{-1}; \beta_{n,q})$
$s=1$ における留数	$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta_{\sigma}(s) = -\frac{1}{n}$	$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q} \Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}$
リーマン予想の類似	成立する	$q = e^{i\theta}$ ($ \theta < \frac{2\pi}{n}$) のとき成立する。

3 組み紐のゼータ関数の分解公式

3.1 組み紐の多重化（平行化）と特殊積

次に、組み紐の多重化（平行化）を定義する。

定義 3.1.1. $\sigma_i \in B_n (i = 1, \dots, n - 1)$ 、 $m \in \mathbb{N}$ に対し、写像 $w_m : B_n \rightarrow B_{nm}$ を

$$w_m(\sigma_i) := (\sigma_{im}\sigma_{im-1} \cdots \sigma_{im-(m-1)})(\sigma_{im+1}\sigma_{im} \cdots \sigma_{im-(m-2)}) \cdots (\sigma_{im+(m-1)}\sigma_{im+(m-2)} \cdots \sigma_{im})$$

と定める。また一般の組み紐 $\sigma \in B_n$ が $\sigma = \sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$ と表されるとき、

$$w_m(\sigma) := w_m(\sigma_{i_1})^{e_1}w_m(\sigma_{i_2})^{e_2} \cdots w_m(\sigma_{i_r})^{e_r}$$

と定義する。この写像 w_m を m 重化写像と呼ぶ。

生成元 $\sigma_1 \in B_2$ の多重化は次の図で説明される。

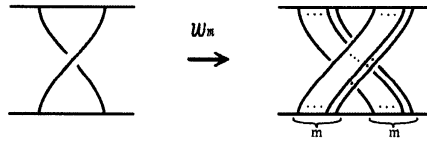


Figure 3: σ_1 の m 重化

w_m の定義は well-defined であり、準同型写像となる。

次に 2 つの組み紐に対して特殊な積を定義する。

定義 3.1.2. $\sigma \in B_n, \tau \in B_m$ に対して次のような演算を考える。

$$\sigma * \tau := \iota_{m,nm}(\tau) \cdot w_m(\sigma).$$

ここで、

$$\iota_{m,nm} : B_m \hookrightarrow B_{nm}$$

は、 B_m の元である組み紐の右側に自明な紐を付け加えることで得られる自然な包含写像とする。この演算 $*$ を組み紐の特殊積という。

特殊積は次のような図で説明できる。また定義から、この特殊積は非可換であることが分かる。

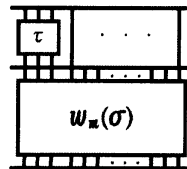


Figure 4: σ と τ の特殊積

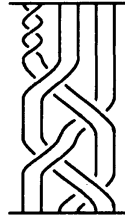
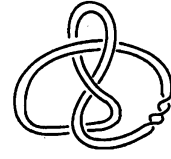
続いて、特殊積の例とその閉包を挙げる。

例 3.1.1. $\sigma = (\sigma_1\sigma_2^{-1})^2 \in B_3, \tau = \sigma_1^3 \in B_2$ のとき、

$$\iota_{2,6}(\tau) = \sigma_1^3 \in B_6,$$

$$w_2(\sigma) = \{ (\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2)(\sigma_4\sigma_3\sigma_5\sigma_4)^{-1} \}^2 \in B_6,$$

となり、特殊積 $\sigma * \tau$ とその閉包は次の図のようになる (Figure 5, 6)。

Figure 5: 特殊積 $\sigma * \tau$ Figure 6: $\sigma * \tau$ の閉包

3.2 組み紐のゼータ関数の分解公式

特殊積で表される組み紐のゼータ関数の公式について次の結果が得られた。

定理 3.2.1. $\sigma \in B_n, \tau \in B_m$ に対し、 $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ は結び目であるとする。このとき、

$$\zeta(s, \sigma * \tau; \beta_{nm, q}) = (1 - q^{m\varepsilon(\sigma)} s^n) \zeta(s, \sigma; \beta_{n, q^m}) \zeta(q^{m\varepsilon(\sigma)} s^n, \tau; \beta_{m, q})$$

が成り立つ。

この定理から、特殊積で表される組み紐 $\sigma * \tau$ は本質的に σ と τ のゼータ関数に分解されることが分かる。さらに、特殊積については次の命題が成り立つ。

命題 3.2.1. σ, τ の閉包がともに結び目であるとき、特殊積 $\sigma * \tau$ の閉包も結び目となる。

これは $\sigma \in B_n$ の閉包が結び目であることと、 $\pi_n(\sigma) \in S_n$ が長さ n のサイクルであることが同値であることに注意し、 $\pi_{nm}(\sigma * \tau) \in S_{nm}$ における \mathbb{Z} -力学系ゼータ関数を計算することで示すことができる。

命題 3.2.1 と定理 2.1.1(2) により、 $\sigma * \tau$ の閉包に関する Alexander 多項式も得ることができる。

系 3.2.1. $\sigma \in B_n, \tau \in B_m$ に対して、 $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ は結び目であるとき、 $\widehat{\sigma * \tau}$ の Alexander 多項式は、

$$\Delta_{\widehat{\sigma * \tau}}(q) = \frac{\Delta_{\hat{\sigma}}(q^m)}{[m]_q \zeta(q^{m\varepsilon(\sigma)}, \tau; \beta_{m, q})}$$

と表すことができる。特に、 $\varepsilon(\sigma) = 0$ のとき

$$\Delta_{\widehat{\sigma * \tau}}(q) = \Delta_{\hat{\sigma}}(q^m) \Delta_{\hat{\tau}}(q)$$

となる。

定理 3.2.1 の証明はゼータ関数の母関数表示と次の公式を用いることで示される。

補題 3.2.1. $\sigma \in B_n, \tau \in B_m$ で、 $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ は結び目であるとする。このとき特殊積 $\sigma * \tau$ に関して

$$\mathrm{tr} \beta_{nm, q}((\sigma * \tau)^j) = \begin{cases} \mathrm{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^j) & (j \not\equiv 0 \pmod{n}), \\ \mathrm{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^{nk}) - nq^{m\varepsilon(\sigma)k} + nq^{m\varepsilon(\sigma)k} \mathrm{tr} \beta_{m, q}(\tau^k) & (j = nk, k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

が成り立つ。

補題 3.2.1 により、

$$\begin{aligned}
\zeta(s, \sigma * \tau; \beta_{nm, q}) &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{nm, q}((\sigma * \tau)^j)}{j} s^j \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j \neq 0 \pmod{n}} \frac{\text{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^j)}{j} s^j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^{nk}) + nq^{m\epsilon(\sigma)k}(\text{tr} \beta_{n, q}(\tau^k) - 1)}{nk} s^{nk} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^j)}{j} s^j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{n, q}(\tau^k)}{k} (q^{m\epsilon(\sigma)} s^n)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^{m\epsilon(\sigma)} s^n)^k \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{n, q^m}(\sigma^j)}{j} s^j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr} \beta_{n, q}(\tau^k)}{k} (q^{m\epsilon(\sigma)} s^n)^k - \log(1 - q^{m\epsilon(\sigma)} s^n)^{-1} \right\} \\
&= \zeta(s, \sigma; \beta_{n, q^m}) \zeta(q^{m\epsilon(\sigma)} s^n, \tau; \beta_{n, q}) (1 - q^{m\epsilon(\sigma)} s^n)
\end{aligned}$$

と計算され、定理 3.2.1 は示される。

References

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.* 20 (1928) 275–306.
- [2] E. Artin. Theory of braids, *Ann. of Math. (2)* 48 (1947) 101–126.
- [3] J. S. Birman. Braids, links, and mapping class groups. *Ann. Math. Studies* 82. Princeton University. Press, 1974.
- [4] C. Blanchet and I. Marin. Cabling Burau representation. preprint, (2006) arXiv :math/0701189.
- [5] A. Deitmar and S. Koyama and N. Kurokawa. Absolute zeta functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 84 (2008) no. 8, 138–142.
- [6] C. Kassel and V. Turaev. *Braid Groups*. Springer, 2008.
- [7] S. Kim and S. Koyama and N. Kurokawa. The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over \mathbf{F}_1 , *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 85, (2009) no. 6, 75–80.
- [8] S. Koyama and S. Nakajima. Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* Volume 88, (2012) no. 8, 115–120.
- [9] B. I. Kurpita and K. Murasugi. A study of braids . *Mathematics and its Applications*, 484. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [10] T. Ohtsuki. Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets, *Series on Knots and Everything*, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [11] C. C. Squier. The Burau representation is unitary. *Proceedings of the Amer. Math. Soc.* 90(2) (1984) 199–202. MR 85b:20056.
- [12] T. Yamamoto. Inversion formulas for tridiagonal matrices with applications to boundary value problems, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 22, (2001) 357–385.