

Realization of Homogeneous Cones through Oriented Graphs

九州大学数理学研究院 山崎 貴史 (Takashi YAMASAKI)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
九州大学数理学研究院 野村 隆昭 (Takaaki NOMURA)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 序文

等質錐は, N 次の正定値実対称行列全体からなる開凸錐 $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ の一般化であり, 等質錐を $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ のスライスとして記述する方法は, Rothaus [5] を始めとして, Graczyk–Ishi [2], Chua [1], Xu [7], Ishi–Nomura [3] などで扱われている.

例. Vinberg 錐 Ω_{Vin} は 5 次元の等質錐であり, Vinberg [6, p. 397] では次のような 2 次対称行列の順序対の集合として記述されている:

$$\Omega_{\text{Vin}} \cong \left\{ \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{21} \\ x_{21} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{31} \\ x_{31} & \lambda_3 \end{pmatrix} \right] \mid \text{共に正定値} \right\}. \quad (1.1)$$

この Ω_{Vin} は [5], [2] によると

$$\Omega_{\text{Vin}} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & x_{31} \\ x_{21} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & x_{31} & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \gg 0 \right\} \subset \mathcal{P}(4, \mathbb{R}) \quad (1.2)$$

と実現され, [3] の方法では次のように書かれる:

$$\Omega_{\text{Vin}} \cong \left\{ \text{diag} \left[(\lambda_1), \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{21} \\ x_{21} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{31} \\ x_{31} & \lambda_3 \end{pmatrix} \right] \gg 0 \right\} \subset \mathcal{P}(5, \mathbb{R}). \quad (1.3)$$

[7] の記述では (1.3) で現れる 3 つの行列で正定値なもの組からなる集合として得られる. [1] の実現法では, (1.3) または次の表記を選ぶことができる:

$$\Omega_{\text{Vin}} \cong \left\{ \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{21} \\ x_{21} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_{31} \\ x_{31} & \lambda_3 \end{pmatrix} \right] \gg 0 \right\} \subset \mathcal{P}(4, \mathbb{R}). \quad (1.4)$$

これら (1.2)–(1.4) はいずれも 1 枚の行列によって Ω_{Vin} を実現できているが, Vinberg の記述 (1.1) より大きなサイズの行列が必要である. 本稿では, 一般の等質錐から描かれる向き付けグラフを通して, (1.1) を一般化する実現を与える. この実現は, 最小な数の行列の組の集合として書かれ, さらにそれぞれの行列のサイズも最小となっている.

本稿は, 第一著者が [8] として講究録に発表したものを, クランによる再定式化で書き直し, グラフ理論や情報理論で使われる用語を使って内容を大幅に改良して洗練された形で著した論文 [9] に基づくものである. 詳細は [9] を参照してほしい.

2 準備

まず, 等質錐と同型を除いて 1 対 1 に対応する非結合的代数であるクランを定義する. V を双線型な積 Δ を持つ有限次元ベクトル空間として, $x \in V$ による左乗法作用素を $L(x) : y \mapsto x \Delta y$ と書く (Δ は結合的とは限らない). (V, Δ) がクランであるとは, 次の 3 条件を満たすことをいう:

$$(C1) [L(x), L(y)] = L(x \Delta y - y \Delta x) \quad (x, y \in V),$$

(C2) ある $s_0 \in V^*$ が存在して $s_0(x \Delta y)$ が V に内積を定義する,

(C3) すべての $x \in V$ に対して, $L(x)$ は実の固有値のみを持つ.

条件 (C1) は $x, y, z \in V$ に対して $x \Delta (y \Delta z) - (x \Delta y) \Delta z = y \Delta (x \Delta z) - (y \Delta x) \Delta z$ が成り立つことと同値であり, この条件を満たす代数を左対称代数と呼ぶ. 本稿では常にクランは単位元を持つと仮定する.

(V, Δ) を単位元 e_0 を持つクランとして, (C2) を満たす $s_0 \in V^*$ をとって内積 $\langle x | y \rangle := s_0(x \Delta y)$ を固定する. このとき r 個の直交原始冪等元 c_1, \dots, c_r が存在して, V は次のように分解される:

$$V = \bigoplus_{1 \leq j \leq k \leq r} V_{kj}, \quad (2.1)$$

$$V_{kk} = \mathbb{R}c_k, \quad V_{kj} := \{x \in V \mid L(c_i)x = 2^{-1}(\delta_{ji} + \delta_{ki})x, R(c_i)x = \delta_{ji}x\}.$$

この分解を c_1, \dots, c_r に関する正規分解という. V_{kj} について, 次の乗法則が成り立つ:

$$\begin{aligned} V_{ji} \Delta V_{lk} &= \{0\} \quad (\text{if } i \neq k, l), & V_{kj} \Delta V_{ji} &\subset V_{ki}, \\ V_{ji} \Delta V_{ki} &\subset V_{jk} \text{ or } V_{kj} \quad (\text{according to } j \geq k \text{ or } j \leq k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

条件 (C1), (C3) によって, V の左乗法作用素全体の空間 $\mathfrak{h} := \{L(x) \mid x \in V\}$ は分裂可解リー環である. $H := \exp \mathfrak{h}$ を \mathfrak{h} に対応する連結かつ単連結なリー群とすると, V の単位元 e_0 を通る H -軌道 $\Omega := He_0$ は H が単純推移的に作用する等質錐となる. 等質錐と単位元を持つクランは, この対応によって同型を除いて 1 対 1 に対応する.

正定値対称行列全体からなる等質錐 $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ には, 次のように定義されるクラン $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ が対応する $A \in \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の狭義下三角部分を X , 対角部分を T として, $\underline{A} = X + 2^{-1}T$ とおく すると双線型積 $A \triangle B = \underline{A}B + B^t \underline{A}$ と線型形式 $s_{\text{Tr}}(A) = \text{Tr}(A)$ によって, $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ のクラン構造が与えられる

3 等質錐のグラフの頂点に対応する部分錐

等質錐 Ω に対して, 対応するクラン V の正規分解 (2.1) からグラフ Γ を描く 頂点集合 (vertex set) \mathcal{V} と弧集合 (arc set) \mathcal{A} をそれぞれ

$$\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, r\}, \quad \mathcal{A} = \{[j \rightarrow i] \mid j > i \text{ and } \dim V_{j_i} > 0\}$$

とすると, 任意の $i, j \in \mathcal{V}$ に対して $[j \rightarrow i] \in \mathcal{A}$ ならば $[i \rightarrow j] \notin \mathcal{A}$ となる よって, $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ は向き付け (oriented) グラフである さらに, 容量 (capacity) 関数 $c: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ を $c([j \rightarrow i]) = \dim V_{j_i}$ で定義すると, Γ は重み付き (weighted) 向き付けグラフとなり, Ω (または V) のグラフと呼ばれる

$k = 1, \dots, r$ に対して k の出先隣接頂点 (out-neighbor) 全体を $N^{\text{out}}(k)$, つまり $N^{\text{out}}(k) = \{j \mid [k \rightarrow j] \in \mathcal{A}\}$ とする さらに $N^{\text{out}}[k] = \{k\} \cup N^{\text{out}}(k)$ とおき,

$$V_{[k]} = \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i, j \in N^{\text{out}}[k]}} V_{j_i}, \quad E_{[k]} = \bigoplus_{i \in N^{\text{out}}[k]} V_{k_i}$$

と定義する するとクランの乗法則 (2.2) から $V_{[k]}$ は V の部分代数 (出先隣接部分クラン, out-neighbor subclan と呼ぶ) であり, $E_{[k]}$ は $V_{[k]}$ の両側イデアルである

$V_{[k]}$ に対応する等質錐 $\Omega_{[k]}$ を出先隣接等質錐 (out-neighbor homogeneous cone) と呼んで, まず $\Omega_{[k]}$ を実現する $x \in V_{[k]}$, $\eta \in E_{[k]}$ に対して $\varphi_{[k]}(x)\eta = \eta \triangle x$ とおくと, $c_k \in E_{[k]}$ のノルムを調整することで各 $\varphi_{[k]}(x)$ は自己共役作用素となり, さらに $\varphi_{[k]}$ はクラン $V_{[k]}$ の忠実な表現となっている

定理 3.1. $x \in V_{[k]}$ とすると, $x \in \Omega_{[k]} \iff$ 自己共役作用素 $\varphi_{[k]}(x)$ が正定値

さらに $\varphi_{[k]}$ は, $V_{[k]}$ 上の $H_{[k]} = \exp L(V_{[k]})$ の作用と $V_{[k]}^0 = \varphi_{[k]}(V_{[k]})$ 上の $H_{[k]}^0 = \exp L(V_{[k]}^0)$ の作用との間で共変である また, 任意の左対称代数としての単射準同型 $\Phi: V_{[k]} \rightarrow \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ に対して $N \geq \dim E_{[k]}$ となり, この意味で $\varphi_{[k]}$ は最小である

4 等質錐の実現

向き付けグラフ $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ に対して, Γ の源頂点 (source), つまりすべての $j \in \mathcal{V}$ に対して $j \rightarrow \omega \notin \mathcal{A}$ となる ω 全体を \mathcal{S} とする 常に $r \in \mathcal{S}$ であることに注意する $\pi_{[k]}$ を $x \in V$ の $V_{[k]}$ への直交射影とすると, 次の定理が成り立つ

定理 4.1. $x \in \Omega \iff \pi_{[\omega]}(x) \in \Omega_{[\omega]} \quad (\forall \omega \in \mathcal{S}).$

$\mathcal{S} = \{r\}$ のとき, $\Omega = \Omega_{[r]}$ であり, 前節で与えた $\Omega_{[r]}^0 := \varphi_{[r]}(\Omega_{[r]})$ が Ω の実現となる. よって, $\mathcal{S} = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ ($s \geq 2$) として, 前節で実現した各 $\Omega_{[\omega_i]}^0$ を綴じ合わせてもとの Ω を実現する方法を述べる. 源頂点に対応する出先隣接等質錐 $\Omega_{[\omega_i]}^0$ は源等質錐 (source cone) と呼ばれる.

$V_{[\omega_i]}^0 := \varphi_{[\omega_i]}(V_{[\omega_i]})$ の外部直和 $V^0 := V_{[\omega_1]}^0 \oplus \dots \oplus V_{[\omega_s]}^0$ を考えて, その部分空間 V_S^0 を次のように定義する:

$$V_S^0 := \{(X_1, \dots, X_s) \in V^0 \mid \pi_{[\omega_j]} \circ \varphi_{[\omega_i]}^{-1}(X_i) = \pi_{[\omega_i]} \circ \varphi_{[\omega_j]}^{-1}(X_j) \text{ for any } i \neq j\}.$$

この V_S^0 を $[V_{[\omega_1]}^0, \dots, V_{[\omega_s]}^0]$ と書き, $\Omega_{[\omega_i]}^0$ についても同様に綴じ合わせることで本稿の実現 $\Omega_S^0 := [\Omega_{[\omega_1]}^0, \dots, \Omega_{[\omega_s]}^0]$ を得る.

相異なる源頂点 $\omega_i, \omega_j \in \mathcal{S}$ に対して $\mathcal{J}(\omega_i, \omega_j) := N^{\text{out}}[\omega_i] \cap N^{\text{out}}[\omega_j]$ を合流頂点 (junction) の集合と呼び, これによって

$$V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]} = \bigoplus_{\substack{b>a \\ b,a \in \mathcal{J}(\omega_i, \omega_j)}} V_{ba}$$

と書ける. また, $\mathcal{J}(\omega_i, \omega_j)$ を頂点集合とする Γ の部分グラフの源頂点集合を $\mathcal{J}_0(\omega_i, \omega_j)$ とおいて, $\Omega_{[\omega_i, \omega_j]}$ を $V_{[\omega_i]} \cap V_{[\omega_j]}$ に対応する等質錐とすると, $\Omega_{[\omega_i, \omega_j]}$ は $\mathcal{J}_0(\omega_i, \omega_j)$ の各頂点に対応する源等質錐を綴じ合わせた等質錐 $\Omega_{[\mathcal{J}_0(\omega_i, \omega_j)]}^0$ として実現される. よって, $\Omega_{[\omega_i]}^0$ と $\Omega_{[\omega_j]}^0$ は $\Omega_{[\mathcal{J}_0(\omega_i, \omega_j)]}^0$ において綴じ合わされるといえる.

注意. (1) Chua [1] による記述は, ある条件を満たす添字集合 I のとり方によって定まり, その条件は \mathcal{S} を用いて表すと $\mathcal{S} \subset I$ が成り立つという条件と同値である. このとき, I に対する Chua の実現は, 本稿においてすべての $j \in I$ について $\Omega_{[j]}^0$ を綴じ合わせて得られる実現に対応する. 定理 4.1 は Chua の条件を満たす最小の I を与えている.

(2) V の原始冪等元 c_1, \dots, c_r の番号付けは一意的ではなく, 異なる番号付けをとると異なるグラフが得られる可能性がある. しかし, 異なる番号付けで得られたグラフの源頂点は, もとのグラフの源頂点と 1 対 1 に対応しており, 対応する頂点から得られる 2 つの源等質錐は線型同値となる. この意味で本稿の実現は一意的である.

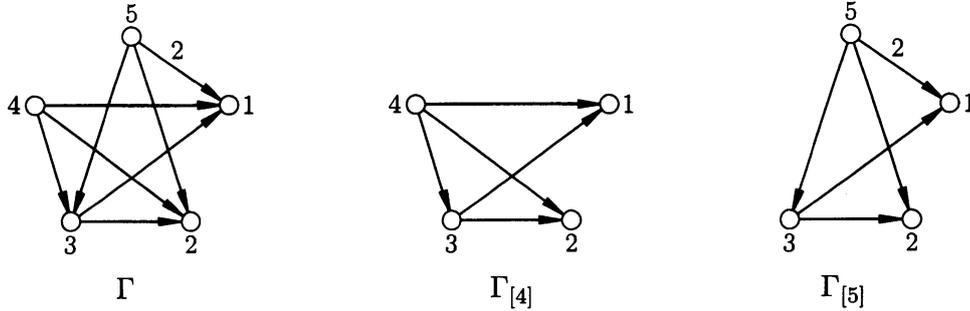
例. 次の e_{ji}^p を基底ベクトルとするベクトル空間の直和を考える:

$$V := \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq 5} V_{ji}; \quad \begin{cases} V_{ji} := \mathbb{R}e_{ji}^1 \quad ((j, i) \neq (2, 1), (5, 1), (5, 4)), \\ V_{51} := \mathbb{R}e_{51}^1 \oplus \mathbb{R}e_{51}^2, \quad V_{21} = V_{54} = \{0\}. \end{cases}$$

この V に次のように双線型積 Δ を定義する.

$$\begin{aligned} e_{kj}^1 \Delta e_{ji}^1 &= e_{ki}^1 \quad (i < j < k), & e_{kj}^p \Delta e_{kj}^q &= 2\delta_{pq}e_{kk}^1 \quad (j < k), \\ e_{ji}^1 \Delta e_{ki}^1 &= e_{ki}^1 \Delta e_{ji}^1 = e_{kj}^1 \quad (j < k). \end{aligned}$$

ただし、左辺は e_{ts}^p について $(t, s) \neq (2, 1), (5, 4)$ となるものだけを考え、右辺に e_{21}^1 または e_{54}^1 が現れた場合は $e_{21}^1 = e_{54}^1 = 0$ とする. すると (V, Δ) は $c_i := e_{ii}^1$ を直交原始始冪等元の完全系とするクランになり、グラフは次のうち左の Γ として得られる:



弧 $5 \rightarrow 1$ の容量は 2 で、その他の何も書かれていない弧の容量はすべて 1 である. このとき $S = \{4, 5\}$ であり、 $\Gamma_{[4]}, \Gamma_{[5]}$ はそれぞれ $N^{\text{out}}[4], N^{\text{out}}[5]$ に対応する Γ の部分グラフである. これらの部分グラフは Kaneyuki-Tsuji [4] によって、共に S_4^5 型と分類されており、それぞれ対応する等質錐が一意に存在することが分かっている. 源等質錐 $\Omega_{[4]}, \Omega_{[5]}$ は次のように実現される:

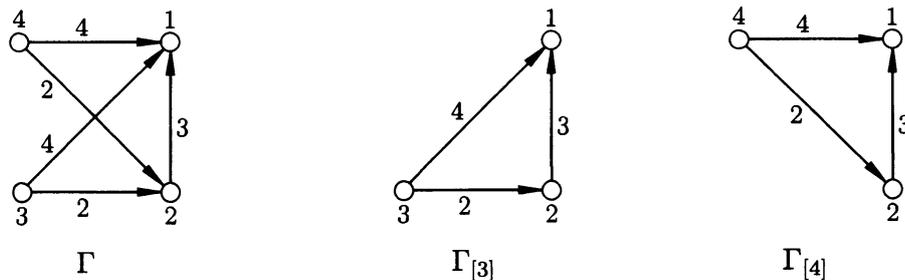
$$\Omega_{[4]}^0 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & x_{31} & x_{41} \\ 0 & \lambda_2 & x_{32} & x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & x_{43} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{array} \right) \gg 0 \right\}, \quad \Omega_{[5]}^0 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & x_{31} e_1 & x_{51} \\ {}^t \mathbf{0}_2 & \lambda_2 & x_{32} & x_{52} \\ x_{31} {}^t e_1 & x_{32} & \lambda_3 & x_{53} \\ {}^t x_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{array} \right) \gg 0 \right\}.$$

$\mathcal{J}(4, 5) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{J}_0(4, 5) = \{3\}$ より、実現 $\Omega_{[S]}^0 = [\Omega_{[4]}^0, \Omega_{[5]}^0]$ は $\Omega_{[3]}^0$ において綴じ合わされており、色付きの部分にはともに $\Omega_{[3]}^0$ を実現する行列が現れている.

5 同値な源等質錐を持つ非同値な 2 つの等質錐の例

前節の注意 (2) で述べたように、線型同値な 2 つの等質錐の源等質錐の間には、それぞれ線型同値となるような対応が存在する. しかし、同じグラフを持つ 2 つの等質錐について、同じ源頂点に対応する 2 つの源等質錐は線型同値となるが、もとの等質錐は線型同値ではないものが存在する. 本節ではその例を与える.

次のうち左のグラフ Γ を考える:



$S = \{3, 4\}$ で, [4] によって Γ は S_4^{5*} 型, $\Gamma_{[3]}$ と $\Gamma_{[4]}$ は S_3^2 型とそれぞれ分類されている. この Γ が得られる 2 つのクラン V, W を以下のように構成する.

まず前節の例と同様にして, 基底ベクトル e_{ji}^p によってクラン (V, Δ) を定義する:

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq 4} V_{ji}, \quad \begin{cases} V_{ji} = \bigoplus_{p=1}^{d_{ji}} \mathbb{R} e_{ji}^p & ((j, i) \neq (4, 3)), \\ V_{43} = \{0\}. \end{cases}$$

ただし d_{ji} は Γ の弧 $j \rightarrow i$ の容量とする.

	e_{21}^1	e_{21}^2	e_{21}^3
e_{42}^1	e_{41}^1	e_{41}^2	e_{41}^3
e_{42}^2	e_{41}^2	$-e_{41}^1$	e_{41}^4

	e_{21}^1	e_{21}^2	e_{21}^3
e_{32}^1	e_{31}^1	e_{31}^2	e_{31}^3
e_{32}^2	e_{31}^2	$-e_{31}^1$	e_{31}^4

(5.1)

	e_{21}^1	e_{21}^2	e_{21}^3
e_{41}^1	e_{42}^1	$-e_{42}^2$	0
e_{41}^2	e_{42}^2	e_{42}^1	0
e_{41}^3	0	0	e_{42}^1
e_{41}^4	0	0	e_{42}^2

	e_{21}^1	e_{21}^2	e_{21}^3
e_{31}^1	e_{32}^1	$-e_{32}^2$	0
e_{31}^2	e_{32}^2	e_{32}^1	0
e_{31}^3	0	0	e_{32}^1
e_{31}^4	0	0	e_{32}^2

(5.2)

上の 2 つの表は, 例えば $e_{42}^1 \Delta e_{21}^1 = e_{41}^1$ とすることを指しており, 表 (5.2) による積は可換, つまり例えば $e_{41}^1 \Delta e_{21}^1 = e_{21}^1 \Delta e_{41}^1 = e_{42}^1$ となる. さらに, $j < k$ に対して $e_{kj}^p \Delta e_{kj}^q := 2\delta_{pq} e_{kk}^1$ とすると, (V, Δ) はクランとなる.

続いて同様に基底ベクトル f_{ji}^p によってクラン W を定義する:

$$W = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq 4} W_{ji}, \quad \begin{cases} W_{ji} = \bigoplus_{p=1}^{d_{ji}} \mathbb{R} f_{ji}^p & ((j, i) \neq (4, 3)), \\ W_{43} = \{0\}, \end{cases}$$

	f_{21}^1	f_{21}^2	f_{21}^3
f_{42}^1	f_{41}^1	f_{41}^2	f_{41}^3
f_{42}^2	f_{41}^2	$-f_{41}^1$	f_{41}^4

	f_{21}^1	f_{21}^2	f_{21}^3
f_{32}^1	f_{31}^1	f_{31}^2	f_{31}^3
f_{32}^2	f_{31}^2	f_{31}^4	$-f_{31}^1$

	f_{21}^1	f_{21}^2	f_{21}^3
f_{41}^1	f_{42}^1	$-f_{42}^2$	0
f_{41}^2	f_{42}^2	f_{42}^1	0
f_{41}^3	0	0	f_{42}^1
f_{41}^4	0	0	f_{42}^2

	f_{21}^1	f_{21}^2	f_{21}^3
f_{31}^1	f_{32}^1	0	$-f_{32}^2$
f_{31}^2	f_{32}^2	0	f_{32}^1
f_{31}^3	0	f_{32}^1	0
f_{31}^4	0	f_{32}^2	0

すると、 $V_{[3]}$ と $W_{[3]}$, $V_{[4]}$ と $W_{[4]}$ はそれぞれ互いに左対称代数として同型だが、 V と W は互いに同型ではない。よって、対応する源等質錐 $\Omega_{[3]}^V$ と $\Omega_{[3]}^W$, $\Omega_{[4]}^V$ と $\Omega_{[4]}^W$ は線型同値だが、 Ω^V と Ω^W は線型同値でない。この例は、グラフと源等質錐のみが与えられたとき、それらの異なる綴じ合わせ方によって非同値な等質錐が得られる場合があり、源等質錐の綴じ合わせには基底のとり方に注意しなければならないことを示している。

参考文献

- [1] C. B. Chua, *Relating homogeneous cones and positive definite cones via T -algebras*, SIAM J. Optim., **14** (2003), 500–506.
- [2] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), 317–348.
- [3] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domains and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.
- [4] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1–46.
- [5] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math., **83** (1966), 358–376; Correction, **87** (1968), 399.
- [6] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.
- [7] Y. Xu, *Theory of complex homogeneous bounded domains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2005.
- [8] 山崎貴史, 等質開凸錐の行列による実現, 数理解析研究所講究録, **1770**, 68–79, 2011.
- [9] T. Yamasaki and T. Nomura, *Realization of homogeneous cones through oriented graphs*, Kyushu J. Math., **69** (2015), 11–48.