

正則離散系列表現の分岐則と複素化について

東京大学大学院数理科学研究科 北川 宜稔

Masatoshi Kitagawa

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 導入

同じ複素化を持つような異なる実リー群 G, G' 、例えば $G = \mathrm{Sp}(n), G' = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ を考える。一般に、 G と G' の表現論 (ユニタリー双対など) はまったく異なる。しかし、Weyl のユニタリートリックによって、有限次元表現の表現論は同じになる。あるいは、非コンパクト Riemann 対称空間 G'/K の解析を、複素化 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ を通じてコンパクト Riemann 対称空間 G/K の解析に帰着させる (またはその逆)、というような手法が存在する。このような、複素化を通じて異なる二つの実形を関連付ける手法の例として、次のようなものが挙げられる。

- Weyl のユニタリートリック
- Flensted-Jensen duality [1]
- コンパクト Clifford-Klein 形の (非) 存在定理 [11]
- Gross-Wallach による離散系列表現の離散分岐則 [2]
- Theta 対応における無限小指標の一対一対応 (T. Przebinda[16], J-S. Li[14])

複素化が同じ二つの部分群への分岐則を考えた場合に、上の例のように二つの分岐則の間に何らかの関係がないだろうか、というのが本稿の問題の動機である。本稿では、正則離散系列表現の分岐則における重複度の最大値が、実形の取り方によらないという次の結果を紹介する。

定理 1. G をエルミート型連結単純リー群、 H, H' を G の対称部分群とする。 $G_{\mathbb{C}}$ の中で $H_{\mathbb{C}}$ と $H'_{\mathbb{C}}$ は内部自己同型で移りあうと仮定する。このとき、 G の任意の正則離散系列表

現 V に対して、

$$C_H(V) = C_{H'}(V)$$

が成り立つ。ここで、 $C_H(V)$ は $V|_H$ の既約分解に現れる重複度の最大値を表す。

1.1 Weyl のユニタリートリック

はじめに述べたとおり、異なる実形を考えたとしても、有限次元表現の表現論は本質的に同じになる。この節では、このことについて説明する。

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ の (\mathbb{C} 上の) 有限次元表現 V を考え、二つの部分群 $H = \mathrm{U}(n)$ と $H' = \mathrm{U}(p, n-p)$ に制限することを考える。Weyl のユニタリートリックによって V は $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ の正則な表現に一意的に拡張できることが知られている。この一対一対応の下で、 $V|_H$ と $V|_{H_C}$ は同じ既約分解を持つ。同様に、 $V|_{H'}$ と $V|_{H'_C}$ も同じ既約分解を持つ。一方で、 H_C と H'_C は共に $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ と同型なリー群であり、 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ の内部自己同型で移りあう。したがって、 $V|_{H_C}$ と $V|_{H'_C}$ は本質的に同じ既約分解を持つ。以上の議論より、 $V|_H$ と $V|_{H'}$ は本質的に同じ既約分解を持つことがわかる。

$$\begin{array}{ccc}
 V|_{\mathrm{U}(n)} & & V|_{\mathrm{U}(p, n-p)} \\
 \uparrow \text{complexification} & & \uparrow \text{complexification} \\
 V|_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} & \longleftrightarrow & V|_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} \\
 & \text{inner auto.} &
 \end{array}$$

このような現象が起きるのは、Weyl のユニタリートリックによって、 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ の表現が複素化 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ の表現まで拡張できるからである。 V が無限次元の既約ユニタリー表現の場合には、 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ の表現に延びることはなく、 $V|_H$ と $V|_{H'}$ は異なる既約分解を持つことになる。

1.2 フーリエ解析

無限次元表現であっても、二種類の分岐則 ($V|_H$ と $V|_{H'}$) の間に関連が見られるような例が多く存在する。例えば、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} の表現 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ と \mathbb{R} の表現 $L^2(\mathbb{R})$ を考える。これら

は次のように既約分解する。

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \sum_{n \in \mathbb{Z}}^{\oplus} \mathbb{C} e^{2\pi\sqrt{-1}nx},$$

$$L^2(\mathbb{R}) \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C} e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda x} d\lambda.$$

これらは、 $SL(2, \mathbb{R})$ のある既約ユニタリ表現の $SO(2)$ と $GL(1, \mathbb{R})$ への分岐則と見ることが出来る。 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ は離散的に分解し、 $L^2(\mathbb{R})$ は連続的な分解をするという違いがあるが、重複度が常に 1(無重複)であり、分解のパラメーターが 1 次元的であるという共通点が見られる。この場合には、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} も \mathbb{R} も \mathbb{C}^\times の実形になっている。

2 設定

$G_{\mathbb{C}}$ を連結な単連結複素単純リー群とし、 G をそのエルミート型の実形とする。 θ を G のカルタン対合とし、 σ を θ と可換な対合とする。 $G_{\mathbb{C}}$ に正則に延長した対合も同じ記号で表すことにする。 θ に関するカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とし、 $K := G^{\theta}$, $H := G^{\sigma}$ とおく。

G をエルミート型であると仮定したので、 K は 1 次元の中心を持つ。 K の 1 次元ユニタリ表現全体が $\{\dots, -2\zeta, -\zeta, 0, \zeta, 2\zeta, \dots\}$ となるように指標 ζ をとり固定する。 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の中心の元 $Z \in \sqrt{-1}\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ を、 $\text{ad}(Z)$ の固有値が $-1, 0, 1$ となり、 $\zeta(Z) > 0$ を満たすようにとる。

$\text{ad}(Z)$ に関する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の固有空間分解を

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_{-} \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{+}$$

と、それぞれの固有値が $-1, 0, 1$ になるようにとる。 $\mathfrak{p}_{+}, \mathfrak{p}_{-}$ は可換な部分リー代数であり、 $K_{\mathbb{C}}P_{-}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群になる。

T を K の極大トーラスとすると、 G がエルミート型であることから T は G のカルタン部分群になる。 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に関するルートの集合を $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}), \Delta(\mathfrak{p}_{+}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ 等と表す。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の正ルート系であって $\Delta(\mathfrak{p}_{+}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ を含むようなものを固定し、その和の $1/2$ を ρ とする。最高ウェイト λ を持つ K の既約ユニタリ表現を $F(\lambda)$ または $F^K(\lambda)$ と表す。

3 正則離散系列表現

次に、正則離散系列表現を導入し、その基本的な性質について述べる。前節の記号の下で、

$$G/K \subset \exp(\mathfrak{p}_+) (\simeq \mathfrak{p}_+) \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P_-$$

となっている。 G/K は $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P_-$ の開集合であり、 G -不変な複素構造を持つ。

K の既約ユニタリー表現 $F(\lambda)$ に対して、以下のような表現を考える：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{L^2}(\lambda) &:= \mathcal{O}(G/K, G \times_K F(\lambda)) \cap L^2(G/K, G \times_K F(\lambda)), \\ \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda) &:= \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P_-, G_{\mathbb{C}} \times_{K_{\mathbb{C}}P_-} F(\lambda)) \subset \mathcal{O}(G/K, G \times_K F(\lambda))_K. \end{aligned}$$

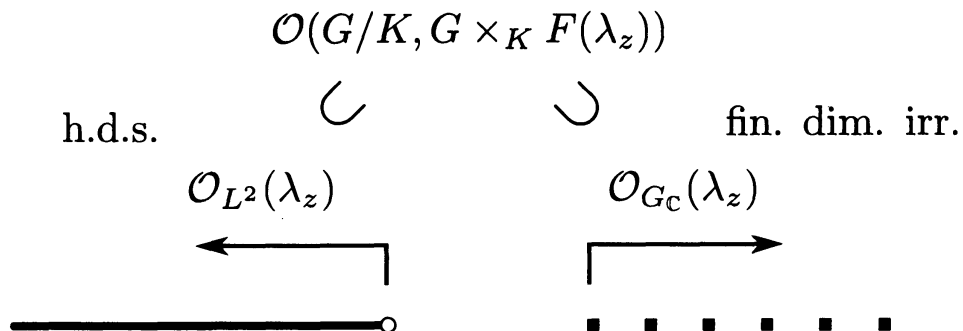
群 G を明示したいときは $\mathcal{O}_{L^2}^G(\lambda)$ のように表すことにする。 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)$ は G のユニタリー表現、 $\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ は $G_{\mathbb{C}}$ の有限次元表現になる。これらの空間がいつ非零になるかについて、次の結果が知られている。(例えば [8, Chapter VI])

事実 2. 上記の記号の下で、以下の命題が成り立つ。

- (1) (Harish-Chandra) 任意の $\beta \in \Delta(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ に対して、 $(\lambda + \rho, \beta) < 0$ ならば、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)$ は非零であり、 G の既約ユニタリー表現になる。
- (2) (Borel–Weil) 任意の $\beta \in \Delta(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ に対して、 $2(\lambda, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbb{N}$ ならば、 $\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ は非零であり、 $G_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現になる。

(1) の仮定を満たすとき、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)$ は G の正則離散系列表現と呼ばれる。

$\lambda_z := \lambda + z\zeta$ とおく。つまり、 $F(\lambda_z)$ は $F(\lambda)$ に指標 $\mathbb{C}_{z\zeta}$ をテンソル積した表現 $F(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{z\zeta}$ と同型になっている。この記号を使うと、上の事実 2. は、 z が十分小さいと $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)$ は非零な G の既約ユニタリー表現になり、 z が十分大きいと $\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z)$ は非零な $G_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現になる、と言い換えることが出来る。



事実 2. における (1)、(2) の条件を満たす z の集合を、それぞれ Z_{L^2} 、 Z_{G_C} とおく。

4 主結果

本稿における主結果を述べる。一般に G のユニタリー表現 V が

$$V \simeq \int_{\hat{G}} m(\pi) V_\pi d\mu(\pi)$$

と既約分解しているとき、 $C_G(V) := \text{ess. sup}(m(\pi))$ とおく。つまり、 $C_G(V)$ は V の既約分解に現れる重複度の最大値を表す。次の定理が本稿における主結果である。

定理 3. \mathfrak{a} を $\mathfrak{p}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間とし、 $M := Z_{K \cap H}(\mathfrak{a})$ とおく。このとき、次の三つの値は等しくなる。

- (1) $C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z))$ (任意の $z \in Z_{L^2}$)
- (2) $C_M(F(\lambda))$
- (3) $\max \{C_{H_C}(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) : z \in Z_{G_C}\}$

この定理は、正則離散系列表現の対称対への制限の分岐則に現れる重複度の最大値が、有限次元既約表現の分岐則に現れる重複度の最大値によって記述できる、と主張している。 $C_M(F(\lambda)) = 1 \Rightarrow C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = 1$ であることと、 (G, H) が正則型の対称対 (次節で定義する) ならば $C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) < \infty$ であることは、小林俊行氏によって [9, Section 8] で示されている。また、 (G, H) が正則型のときに $C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = C_M(F(\lambda))$ であることは [6] で示されている。

定理の (3) の値は、完全に有限次元表現の分岐則で決まるので、Weyl のユニタリートリックを使って、系として次の結果が得られる。

系 4. τ を G の対合とし、 $H' := G^\tau$ とおく。 G_C^τ と G_C^σ は G_C の内部自己同型で移りあうと仮定する。このとき、

$$C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = C_{H'}(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z))$$

が任意の $z \in Z_{L^2}$ に対して成り立つ。

例. 上の系 4. の仮定を満たすような (G, H) , (G, H') としては次のようなものが挙げられる。

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(p, n-p)$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, n), \mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2, p) + \mathfrak{so}(n - p), \mathfrak{h}' = \mathfrak{so}(1, p + 1) + \mathfrak{so}(1, n - p - 1)$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-14)}, \mathfrak{h} = \mathfrak{su}(5, 1) + \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{h}' = \mathfrak{su}(4, 2) + \mathfrak{su}(2)$

一つ目の例において、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)|_H$ は離散的に分解し、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)|_{H'}$ は連続的なスペクトルを含む。しかし、重複度の最大値は保たれている。

注意 5. 対称対や正則離散系列表現という仮定をはずすと、系 4 には反例が存在する。例えば、 V を $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ の Weil 表現の偶数次の部分とし、次のような二つの部分群 H, H' を考える。

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \supset \mathrm{U}(n, n) \supset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) &= H \\ &\supset \mathrm{U}(2n) \supset \mathrm{Sp}(n) = H' \end{aligned}$$

この部分群への分岐則は dual pair の理論を使って計算することが出来 ([5])、 $C_H(V) = 2 \neq 1 = C_{H'}(V)$ となることがわかる。

$(G, H), (G, H')$ が対称対の場合の反例として、[12] の計算結果が挙げられる。この結果によると、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の「最も小さい」退化主系列表現 V を、 $\mathrm{O}(n)$ に制限すると $C_{\mathrm{O}(n)}(V) = 1$ になるが、 $\mathrm{O}(p, n - p)$ ($p \neq 0, n$) に制限すると $C_{\mathrm{O}(p, n - p)}(V) = 2$ となる。

5 主結果の証明

主結果の証明について述べる。証明は、 (G, H) が正則型と呼ばれる場合と、反正則型と呼ばれる場合の二通りに分けて行う。

G の対合 σ は K を保つので、 \mathfrak{k} の中心である $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ も保つ。したがって、 $\sigma(Z) = Z$ か $\sigma(Z) = -Z$ が成り立つ。 $\sigma(Z) = Z$ となる場合に (G, H) を正則型、 $\sigma(Z) = -Z$ となる場合に (G, H) を反正則型と呼ぶ。これは、 G/K に σ が正則 (または反正則) に作用していることと同値になっている。

証明を正則型と反正則型の二つの分けるのは $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)|_H$ の分岐則が異なる振る舞いをするからである。 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)|_H$ は、 (G, H) が正則型の場合には離散的に分解し、反正則型の場合には連続的なスペクトルを持つことが知られている。

正則型に関しては、次の H. P. Jakobsen と M. Vergne による結果 [4] が知られている。

事実 6 (Jakobsen–Vergne). (G, H) を正則型の対称対であるとする。このとき、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)|_H$ は H の正則離散系列表現の離散直和に既約分解し、その重複度は有限になる。

また、 $P(\mathfrak{p}_+^{-\sigma}) \otimes F^K(\lambda)$ が $K \cap H$ の表現として

$$P(\mathfrak{p}_+^{-\sigma}) \otimes F^K(\lambda)|_{K \cap H} \simeq \bigoplus_{\mu} m(\mu) F^{K \cap H}(\mu)$$

と既約分解しているとき、 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)$ は H の表現として

$$\mathcal{O}_{L^2}^G(\lambda)|_H \simeq \sum_{\mu}^{\oplus} m(\mu) \mathcal{O}_{L^2}^H(\mu)$$

と既約分解する。

反正則型の場合には、次の R. Howe[3]、J. Repka[17]、G. Ólafsson、B. Ørsted[15]の結果が存在する。

事実 7 (R. Howe, J. Repka, G. Ólafsson, B. Ørsted). (G, H) を反正則型の対称対であるとする。このとき、次の H のユニタリ表現の同型が存在する:

$$\mathcal{O}_{L^2}^G(\lambda)|_H \simeq L^2(H/K \cap H, H \times_{K \cap H} F^K(\lambda)).$$

これらの結果を用いて重複度の評価を行うことで、主結果の証明を行う。

5.1 正則型の場合

ここでは、 (G, H) は正則型の対称対であると仮定する。

3節で、 $\{\mathcal{O}(G/K, G \times_K F(\lambda_z))\}_z$ という G の表現の族を定めた。証明について述べる前に、この表現の族の性質を見ることにする。

まず、 $\mathcal{O}(G/K, G \times_K F(\lambda_z))$ という空間を、 $\mathcal{O}(G/K) \otimes F(\lambda)$ という空間と同一視する。 $G/K \subset \mathfrak{p}_+ \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P_-$ という包含関係を思い出すと、ベクトル束 $G \times_K F(\lambda)$ は \mathfrak{p}_+ 上のベクトル束 $\mathfrak{p}_+ \times F(\lambda)$ に拡張できることがわかるので、 $G \times_K F(\lambda)$ は自明なベクトル束である。また、 $F(\lambda_z)$ は $F(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{z\zeta}$ と同型な表現なので、 $F(\lambda)$ と同じベクトル空間に実現されていると見ることが出来る。以上から、 $\mathcal{O}(G/K, G \times_K F(\lambda_z))$ と $\mathcal{O}(G/K) \otimes F(\lambda)$ を同一視することが出来る。

この同一視を使って、 $\mathcal{O}(G/K) \otimes F(\lambda)$ に、 z でパラメータ付けられた G (と \mathfrak{g}) の作用を入れる。この表現を $(\pi_z, \mathcal{O}(G/K) \otimes F(\lambda))$ と表すことにする。

正則型の対称対を考えているので、Jakobsen–Vergne の結果 (事実 6) から、離散的な分岐則を扱うことになる。したがって、 (\mathfrak{g}, K) -加群における既約分解を見ればよい。そこで、 $\mathcal{O}(G/K) \otimes F(\lambda)$ の K -有限なベクトルを考えると、 $(\pi_z, P(\mathfrak{p}_+) \otimes F(\lambda))$ という

(\mathfrak{g}, K) -加群の族が得られる。ここで、 $\mathcal{O}(G/K)_K = P(\mathfrak{p}_+)$ という等式を使った。以下ではこの (\mathfrak{g}, K) -加群 $(\pi_z, P(\mathfrak{p}_+) \otimes F(\lambda))$ のみを考える。

命題 8. この表現の族 $(\pi_z, P(\mathfrak{p}_+) \otimes F(\lambda))$ は次の性質を持つ。

- (1) 任意の $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して、 $\pi_z(X)$ は微分作用素であり、 z に多項式的に依存している。つまり、 D_0, \dots, D_d という微分作用素が存在して $\pi_z(X) = \sum_{i=0}^d D_i z^i$ と表せる。
- (2) 任意の $X \in \mathfrak{p}_+$ に対して、 $\pi_z(X)$ は $-X$ 方向に微分するという作用素であり、 z に依存しない。
- (3) 任意の $X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対して、 $\pi_z(X) = \pi_0(X) + z\zeta(X)$ となる。つまり、 $\mathbb{C}_{z\zeta}$ という指標のずれを除けば、 z によらない K の表現になっている。

z に多項式的に依存しているということと $Z_{G_{\mathbb{C}}}$ が \mathbb{C} の中で Zariski dense であることから、正則離散系列表現 $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)$ の性質を、有限次元表現 $\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z)$ の性質に帰着することが出来る。

補題 9. $\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z)$ を上で述べた同一視によって、 $P(\mathfrak{p}_+) \otimes F(\lambda)$ の部分空間とみなす。このとき、

$$\bigcup_{z \in Z_{G_{\mathbb{C}}}} \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z) = P(\mathfrak{p}_+) \otimes F(\lambda)$$

が成り立つ。

補題 9 を用いて定理の (1) = (3) の証明を行う。(1) = (2) に関しては、[6] で証明されているので省略する。

定理 3 の (1) = (3) の証明. Jakobsen–Vergne の結果から $\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)$ の H に関する分岐則は、 $P(\mathfrak{p}_+^{\sigma}) \otimes F(\lambda_z)$ の $K \cap H$ に関する既約分解から知ることが出来る。特に、重複度の最大値に関する式、

$$C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = C_{K \cap H}(P(\mathfrak{p}_+^{\sigma}) \otimes F(\lambda_z)) \quad (z \in Z_{L^2})$$

を得る。

$H_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現は、放物型部分代数 $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+)^{\sigma}$ に関する最高ウェイト加群なので、 \mathfrak{p}_+^{σ} -不変な部分を見れば分岐則の情報を取り出すことが出来る。したがって、

$$C_H(\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z)) = C_{K \cap H}(\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}}(\lambda_z)^{\mathfrak{p}_+^{\sigma}}) \quad (z \in Z_{G_{\mathbb{C}}})$$

となる。

以上の二つの式と補題9から、 $z \in Z_{L^2}$ に対して

$$\begin{aligned} C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) &= C_{K \cap H}(P(\mathfrak{p}_+^\sigma) \otimes F(\lambda_z)) \\ &= \max \left\{ C_{K \cap H}(\mathcal{O}_{G_C}(\lambda_{z'})^{\mathfrak{p}_+^\sigma}) : z' \in Z_{G_C} \right\} \\ &= \max \left\{ C_H(\mathcal{O}_{G_C}(\lambda_{z'})) : z' \in Z_{G_C} \right\} \end{aligned}$$

となる。これで定理が示された。

□

本稿では詳しく扱わないが、この定理以外にも多項式性を利用して、正則離散系列表現のいくつかの性質を有限次元既約表現の性質に帰着することができる。例えば、 $\pi_z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)^H)$ が可換であるという性質は、任意の $X, Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)^H$ に対して $\pi_z([X, Y]) = 0$ となることと表すことができる。したがって、任意の z に対して $\pi_z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)^H)$ が可換かどうかを示すには、有限次元既約表現に対して証明すれば十分であることがわかる。他には、一次独立であるという条件が多項式で表されることをつかって、ある種の $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)^H$ -加群の既約性を示すこともできる。

5.2 反正則型の場合

ここでは、 (G, H) は反正則型であると仮定する。事実7により、 $z \in Z_{L^2}$ に対して、

$$\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z) \simeq L^2(H/K \cap H, H \times_{K \cap H} F^K(\lambda))$$

が成り立つ。したがって、 $L^2(H/K \cap H, H \times_{K \cap H} F^K(\lambda))$ の既約分解がわかればよい。ここで、 $L^2(H/K \cap H, H \times_{K \cap H} F^K(\lambda)) \simeq (L^2(H) \otimes F^K(\lambda))^{K \cap H}$ という同型と Harish-Chandra による $L^2(H)$ の Plancherel formula から

$$\begin{aligned} &L^2(H/K \cap H, H \times_{K \cap H} F^K(\lambda)) \\ &\simeq (L^2(H) \otimes F^K(\lambda))^{K \cap H} \\ &\simeq \int_{\hat{H}_{temp}} V_\pi \otimes (V_{\pi^*} \otimes F^K(\lambda))^{K \cap H} d\mu(\pi) \\ &\simeq \int_{\hat{H}_{temp}} V_\pi \otimes \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi) d\mu(\pi) \end{aligned}$$

となる。ここで、 \hat{H}_{temp} を H の tempered な既約ユニタリ表現の同値類全体の集合とし、 $d\mu$ を $L^2(H)$ の Plancherel 測度とした。

この同型から、重複度の最大値 $C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda))$ は

$$C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda)) = \text{ess. sup} \left\{ \dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi) : \pi \in \hat{H}_{temp} \right\} \quad (1)$$

となることがわかる。 \hat{H}_{temp} は A. W. Knappp と G. Zuckerman によって決定されている [7] が、重複度の最大値を求めるには \hat{H}_{temp} の詳細は必要ではなく、次の事実だけで十分である。(例えば、[8, Chapter VII, VIII])

事実 10. P を H の極小放物型部分群とし、 $P = M_0 A_0 N_0$ をその Langlands 分解とする。

- (1) (Casselman's subrepresentation theorem) 任意の既約 $(\mathfrak{h}, K \cap H)$ -加群 V に対して、 V が $\text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})_{K \cap H}$ の部分表現となるような $\tau \in \hat{M}_0$ と $\mu \in (\mathfrak{a}_0)_{\mathbb{C}}^*$ が存在する。
- (2) 任意の $\tau \in \hat{M}_0$ と $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_0^*$ に対して、 $\text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})$ は H の tempered なユニタリー表現となる。
- (3) (Bruhat) 任意の $\tau \in \hat{M}_0$ と regular な $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_0^*$ に対して、 $\text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})$ は H の既約ユニタリー表現となる。

ここで、 $\text{Ind}_P^H(\cdot)$ は P のユニタリー表現を H のユニタリー表現に誘導するように正規化している。

注意 11. 事実 10 で定義した M_0 は、定理 3 で定義した M と $K \cap H$ の内部自己同型で移りあう。実際、[13, Lemma 5.2.] の証明から、 $\text{Ad}(g)$ が $\mathfrak{p}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間 \mathfrak{a} を、 \mathfrak{p}^σ の極大可換部分空間に移すような $g \in Z(K)$ が存在する。 $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$ と \mathfrak{a}_0 は、 \mathfrak{p}^σ の極大可換部分空間なので、ある $h \in K \cap H$ が存在して、 $\text{Ad}(hg)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_0$ となる。したがって、

$$\text{Ad}(h)(M) = \text{Ad}(hg)(Z_{K \cap H}(\mathfrak{a})) = Z_{K \cap H}(\text{Ad}(hg)(\mathfrak{a})) = Z_{K \cap H}(\mathfrak{a}_0) = M_0$$

となる。よって、 $M = M_0$ となるように \mathfrak{a}_0 を取り直すことができる。

これらの結果を用いて、定理 3 の (1) = (2) を示す。

$C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = C_M(F^K(\lambda))$ の証明. 等式 (1) から $\pi \in \hat{H}_{temp}$ に対して

$$\dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi)$$

を評価すればいい。

まず、 $\dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi) \leq C_M(F^K(\lambda))$ を示す。事実 10 の (1) から、 $(V_\pi)_{K \cap H}$ を部分表現に含むような非退化主系列表現 $\text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})$ ($\tau \in \hat{M}_0, \mu \in (\mathfrak{a}_0)_\mathbb{C}^*$) が取れる。したがって、 $H = (K \cap H)P$ と Frobenius 相互律から

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi) &\leq \dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), \text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})) \\ &= \dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), \text{Ind}_M^{K \cap H}(\tau)) \\ &= \dim \text{Hom}_M(F^K(\lambda), \tau) \\ &\leq C_M(F^K(\lambda)) \end{aligned}$$

となる。

次に、 $m(\pi) = C_M(F^K(\lambda))$ となる $\pi \in \hat{H}_{temp}$ が存在することを示す。 $C_M(F^K(\lambda))$ の定義から、 $C_M(F^K(\lambda)) = \dim \text{Hom}_M(F^K(\lambda), \tau)$ となる $\tau \in \hat{M}$ が存在する。 $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_0^*$ を regular に取るとユニタリー主系列表現 $V_\pi = \text{Ind}_P^H(\tau \otimes e^\mu \otimes \mathbf{1}_{N_0})$ が欲しい条件を満たす。実際、事実 10(2),(3) より $\pi \in \hat{H}_{temp}$ となり、上で行った議論と同様にして $H = (K \cap H)P$ と Frobenius 相互律から

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{K \cap H}(F^K(\lambda), V_\pi) &= \dim \text{Hom}_M(F^K(\lambda), \tau) \\ &= C_M(F^K(\lambda)) \end{aligned}$$

を得る。

以上より、 $C_H(\mathcal{O}_{L^2}(\lambda_z)) = C_M(F^K(\lambda))$ が示された。 \square

5.3 (2) = (3)

定理 3 の (2) = (3) は、複素単純代数群の有限次元表現の命題である。この部分はより一般に [6] で次の結果が示されている。

事実 12. $G_\mathbb{C}$ を連結な複素簡約代数群、 Q を $G_\mathbb{C}$ の放物型部分群、 $H_\mathbb{C}$ を $G_\mathbb{C}$ の連結な簡約部分代数群とする。 $Q = LN$ を Q の Levi 分解とする。 B を $H_\mathbb{C}$ の Borel 部分群とする。さらに、 $G_\mathbb{C} \supset BQ$ が開部分集合になると仮定する。このとき、 $M_\mathbb{C} := \{g \in H_\mathbb{C} \cap Q : gBQ \subset BQ\}$ と置くと、任意の L の有限次元表現 F に対して、

$$\max \left\{ C_{H_\mathbb{C}}(\text{Ind}_Q^{G_\mathbb{C}}(F \otimes \mathbb{C}_\zeta)) : \zeta \text{ は } L/[L, L] \text{ の指標} \right\} = C_{M_\mathbb{C}}(F)$$

が成り立つ。ここで、 $\text{Ind}_Q^{G_\mathbb{C}}(\cdot)$ は代数群の表現の誘導を表す。

(G, H) が反正則型の対称対の場合、 $G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}$ は今までの節と同じにし、 $Q = K_{\mathbb{C}}P_{-}$ とする。そうすると、事実 12 の仮定を満たし、 $M_{\mathbb{C}}$ は H に対する M の複素化になることがわかる。これによって、定理の (2) = (3) が示される。

(G, H) が正則型の場合にも同様の証明が行えるが、今回は正則離散系列表現の分岐則と有限次元表現の分岐則を直接結びつけることができる解析接続を用いて証明した。

6 無重複な正則離散系列表現の分類

定理 3 や系 4 の応用として、正則離散系列表現であって H に制限したときに無重複になるようなものの分類を行うことができる。定理 3 の (2)(3) は有限次元表現の分岐則によって決まるので、正則離散系列表現の無重複性を有限次元既約表現の無重複性に帰着することができる。本稿の趣旨から外れるので細かい計算は行わないが、以下に三つの例を挙げておく。

例. $G = \mathrm{SU}(p, q), H = \mathrm{U}(p-1, q)$ とすると、 $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(p+q, \mathbb{C}), H_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(p+q-1, \mathbb{C})$ となる。 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の正則な有限次元既約表現を $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{C})$ に制限すると、いつでも無重複になることが知られている。したがって、 G の任意の正則離散系列表現を H に制限すると、いつでも無重複になる。これは、すでに小林俊行氏によって知られている結果 [10] であるが、このように有限次元表現の分岐則と直接結びつけて証明することもできる。

このような対称対としては、上のものと $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}), H_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spin}(n-1, \mathbb{C})$ の実形となるものですべて尽くされる。

例. 複素単純リー群の正則な有限次元既約表現であって、Levi 部分群に制限したときに無重複になるようなものは、J. Stembridge によって分類されている [18]。この結果から、 H に 1 次元の中心があるような場合の、無重複な正則離散系列表現の分類が直ちに従う。

例えば、 $H = K$ とすると、 G はエルミート型なので K は常に 1 次元の中心を持つ。したがって、 K -type が無重複になるような正則離散系列表現の分類は Stembridge の結果に帰着することができる。

例. M と $C_M(F(\lambda))$ を計算して分類を行うこともできる。例えば、 $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}), K = \mathrm{U}(n), H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とすると、 $M \simeq O(1) \times \cdots \times O(1)$ (n 個の直積) となる。 $\mathrm{U}(n)$ の既約ユニタリー表現で M に制限して無重複になるものは、 $\wedge^i \mathbb{C}^n$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) とこれらに指標をテンソル積したものに限ることがわかる。

また、系 4 を使うと、 $H = U(p, n - p)$ としたときの無重複な正則離散系列表現の分類は、 $H = GL(n, \mathbb{R})$ の場合の分類と変わらないことがわかる。

参考文献

- [1] Mogens Flensted-Jensen. Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 111(2):253–311, 1980.
- [2] B. Gross and N. Wallach. Restriction of small discrete series representations to symmetric subgroups. In *The mathematical legacy of Harish-Chandra (Baltimore, MD, 1998)*, volume 68 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 255–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [3] Roger Howe. Reciprocity laws in the theory of dual pairs. In *Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, volume 40 of *Progr. Math.*, pages 159–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [4] Hans Plesner Jakobsen and Michèle Vergne. Restrictions and expansions of holomorphic representations. *J. Funct. Anal.*, 34(1):29–53, 1979.
- [5] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44(1):1–47, 1978.
- [6] Masatoshi Kitagawa. Stability of branching laws for highest weight modules. *Transform. Groups*, 19(4):1027–1050, 2014.
- [7] A. W. Knap and Gregg J. Zuckerman. Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups. *Ann. of Math. (2)*, 116(2):389–455, 1982.
- [8] Anthony W. Knap. *Representation theory of semisimple groups*, volume 36 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. An overview based on examples.
- [9] Toshiyuki Kobayashi. Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(3):497–549, 2005.
- [10] Toshiyuki Kobayashi. Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. In *Representation theory and automorphic forms*, volume 255 of *Progr. Math.*, pages 45–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.
- [11] Toshiyuki Kobayashi and Kaoru Ono. Note on Hirzebruch’s proportionality prin-

- ciple. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(1):71–87, 1990.
- [12] Toshiyuki Kobayashi, Bent Ørsted, and Michael Pevzner. Geometric analysis on small unitary representations of $GL(N, \mathbb{R})$. *J. Funct. Anal.*, 260(6):1682–1720, 2011.
- [13] Toshiyuki Kobayashi and Yoshiki Oshima. Classification of discretely decomposable $A_q(\lambda)$ with respect to reductive symmetric pairs. *Adv. Math.*, 231(3-4):2013–2047, 2012.
- [14] Jian-Shu Li. The correspondences of infinitesimal characters for reductive dual pairs in simple Lie groups. *Duke Math. J.*, 97(2):347–377, 1999.
- [15] Gestur Ólafsson and Bent Ørsted. Generalizations of the Bargmann transform. In *Lie theory and its applications in physics (Clausthal, 1995)*, pages 3–14. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [16] Tomasz Przebinda. The duality correspondence of infinitesimal characters. *Colloq. Math.*, 70(1):93–102, 1996.
- [17] Joe Repka. Tensor products of holomorphic discrete series representations. *Canad. J. Math.*, 31(4):836–844, 1979.
- [18] John R. Stembridge. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. *Represent. Theory*, 7:404–439 (electronic), 2003.