数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 132-143

量子ラビ模型・非可換調和振動子と数論・表現論

(Quantum Rabi's model and Non-commutative Harmonic Oscillators, and Number Theory and Representation Theory)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　若山 正人 (Masato Wakayama)

2015 年 12 月 1 日

概要

量子計算機の基本素子を与える量子ラビ模型は，Rabi により 1937 年に提出された模型（準古典的）が Jaynes と Cummings により量子化（1963 年）されたものである．2011 年に D. Braak による大きな進展があったものの，依然，スペクトルの完全な記述はできていない．ここでは，量子ラビ模型 (quantum Rabi model) のハミルトニアン（非可換な係数をもつ微分作用素である）が，非可換調和振動子 (Non-commutative Harmonic Oscillator) のそれを oscillator 表現を通して定める $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次の元の非ユニタリ表現像として捉えられる Heun ODE に対して，その特異点を合流することにより得られること，また，この事実とは独立に，縮退する固有値は有限次元表現論の枠組みで捉えられること，さらに関連する数論における問題等についても述べたい．

1 Introduction

本稿（講演においても）の中心となるのは量子 Rabi 模型のスペクトルに関する最近の筆者の研究の紹介とやや偏りがあるかもしれない問題意識である（本文のいくつかの Remarks では解明すべき課題などについてもふれたい）．量子 Rabi 模型は，二準位の原子と量子化された光との相互作用を記述するモデルであり，近年の量子情報の研究のひとつのベースになっている物理モデルである（例えば [45, 7] などを参照）．その上で，ここで述べたいことは，

- まずは，非可換調和振動子 (Non-commutative Harmonic Oscillators[38, 39], [36]) と量子ラビ模型の関係である． 具体的な内容は，非可換調和振動子のハミルトニアンを oscillator 表現で与えるリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次の元の非ユニタリ表現像として捉えられる Heun ODE（4 点確定特異点をもつ Fuchs 型常微分方程式 [42, 44]）において二つの特異点を合流することにより，量子ラビ模型の合流ホイン描像が得られるという事実 ([49] Int. Math. Res. Notices. (2015))，及び，関連して解明すべき課題について，
- 一方で，これまで殆ど表現論（群論）的アプローチがみられなかったこのような量子相互作用モデルの研究にあって，表現論的に直接扱える部分を開拓することはそれなりの意義があると思われる．そうした考えに基づいて，量子ラビ模型に対し，(D. Braak [5](2011) 以前に唯一捉えられていた）縮退する固有値と固有状態 (M. Kuś [27](1985)：Judd's solution とも呼ばれる) を，$\mathfrak{sl}_2$ の表現論の言葉で捉えることが可能であることの紹介 ([50] J. Phys. A. Math. Theor. (2014) (with T. Yamasaki))，及び，縮退しない例外型固有値の存在について，
- 上記を受け，量子ラビ模型のスペクトルを表現論を用いて記述するための予想とひとつの "怪しい期待" について，さらに後者の "期待" に関しては，離散部分群あるいは跡公式という観点から定式化されることが望まれること，
- 非可換調和振動子のスペクトルは，そのスペクトルゼータ関数 [15] の（とくに）特殊値 [16] を通じて，やや驚くべきと言ってもよいであろう数論的に豊かな構造を持つことが判っている ([22, 23, 24, 29])．それが，どのように，量子ラビ模型に遺伝しているのかということを明らかにするための疑問のいくつかを提示すること，

などである. [*1]

2 非可換調和振動子と量子ラビ模型

非可換調和振動子 (NcHO) とは，以下のように非可換な（行列）係数をもち，偶奇のパリティを保存する ($\mathbb{Z}_2$-symmetry) 常微分作用素によりハミルトニアンが定まる相互作用模型である．だが，現在まで，NcHO が何かの，たとえば物理，生命科学や経済学，その他の分野に現れる “相互作用”を記述し得るモデルであるかどうかに関しては不明である.

$$Q = Q_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right).$$

ここでは，以下 $\alpha, \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 1$ を仮定する．この仮定により，Q は $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の自己共役な正定置非有界作用素を定め，さらに離散固有値のみを持つことがわかる.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots (\to \infty).$$

なお，$\alpha = \beta$ のときは, Q は（量子）調和振動子のペア（2重）とユニタリ同値であることがわかる．実際，その固有値は $\left\{\sqrt{\alpha^2-1}(n+\frac{1}{2}) \,|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$ で与えられ重複度はすべて 2 である．一般の場合には，Q の固有値は明示的には与えられていない．NcHO の固有値の重複度の一様有界性については，すでに [39] において 3 以下であることが示されていたが，より精確に，1 か 2 であることが示されたのはごく最近 [46, 49] である. さらに [46] で与えられた単純性を導く criterion を示すことにより，最低固有値の単純性が F. Hiroshima and I. Sasaki により証明されたのも最近である [13]. なお，NcHO のスペクトル解析に関する詳細な扱いは [36], さらにごく最近までの発展は [37] を参照していただきたい.

量子ラビ模型 (Quantum Rabi model：QRM) のハミルトニアンは以下で与えられる：

$$H_{\mathrm{Rabi}}/\hbar = \omega a^\dagger a + \Delta\sigma_z + g(\sigma^+ + \sigma^-)(a^\dagger + a).$$

ここで $a^\dagger, a$ は角振動数 ω のボゾニックモードに対する生成・消滅演算子，$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ はパウリ行列である．なお，$\sigma^\pm := (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ とおいた．また，$g > 0$ は二準位系とボゾニックモードの間の結合強度, $2\Delta > 0$ は二準位間のエネルギー差である．以下，一般性を失わずに $\hbar$（プランク定数）$= \omega = 1$ とする. いま,

$$a^\dagger = \frac{x - \partial_x}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{x + \partial_x}{\sqrt{2}}$$

と実現すれば ($\partial_x := \frac{d}{dx}$)，NcHO の表示のように，$H_{\mathrm{Rabi}}$ は

$$H_{\mathrm{Rabi}} = \frac{1}{2}(x^2 - \partial_x^2 - 1) + \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + g\sqrt{2}x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の（下から有界な）自己共役作用素である.

ラビ模型自身の導入は I.I. Rabi (1937)[40] によるもので，（フォトンを含め）完全に量子化された量子ラビ模型は E.T. Jaynes and F.W. Cummings [19] による．しかしながら，量子ラビ模型（QRM）のハミルトニアン H_{Rabi}

[*1] なお本稿では，関数解析的あるいは複素解析的な議論の詳細は割愛させていただくことにする．また，ここでは内容の技術的部分に関しての詳細を述べ得ないので，興味をもって頂いた方になるべく必要な文献の孫引きを強いないでおけるように，関連論文の引用が明確になるように心掛ける.

に可換な（非自明な）作用素が存在しないことからその解析は困難であったため，その後はもっぱらその回転波近似（Rotating-wave approximation: RWA）として定まる，以下の Jaynes-Cummings(JC) 模型が考えられるようになった．実際，結合定数 g が Δ に比して小さいときは，実験にもよく合い重宝されてきた（[11] などを参照*2）．JC 模型（JCM）のハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{JC}}/\hbar = \omega a^\dagger a + \Delta\sigma_z + g(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger)$$

で与えられ，さらに (可換量の存在)

$$\mathcal{J} := a^\dagger a + \frac{1}{2}(\sigma_z + 1) \implies [H_{\mathrm{JC}}, \mathcal{J}] = 0$$

が判ることから，そのスペクトルは明示的に得られる（[11]．容易であり，たとえば [50] の計算なども参照）．ところが，近年の実験の進展により，JCM では，実験結果に合わない例が多く現れ，本来の量子ラビ模型に戻らざるを得なくなってきた（たとえば [9, 34]）．このような状況下，Braak は breakthrough というべき量子ラビ模型の可解性に関する論文 [5](2011) を著した．ところで，M.Kuś[27] が得た縮退固有値は $E = n - g^2$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ という形をしている．そこで Braak は [5] で，この縮退固有値を Exceptional eigenvalues（例外型固有値）とよび，それ以外を Regular eigenvalues（正則固有値）と命名した．したがって，量子ラビ模型のスペクトルの全体を $\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})$ と記すと

$$\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}}) = \Big\{\text{Regular eigenvalues}\Big\} \sqcup \Big\{\text{Exceptional eigenvalues}\Big\}$$

となる．Regular eigenvalues は，（QRM には JCM のように（一次元の）不変量はないが，$\mathbb{Z}_2$-symmetry があることを上手く用いることにより）ある微分方程式を用いて特徴付けられる超越関数の零点として与えられるというのが Braak の論文 [5] の主結果である．一方，そこでは見落とされていたが，$E = n - g^2$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ という形をしているにも関わらず縮退していない固有値が存在するはずだという数値的な観察が Maciejewski らの論文 [30] においてなされた（[50] でも同様の示唆を得ている）．したがって，$E = n - g^2$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ なる形をした Exceptional eigenvalues は，以下のように縮退するものとしないものに分割される：

$$\Big\{\text{Exceptional eigenvalues}\Big\} = \Big\{\text{degenerates}\Big\} \sqcup \Big\{\text{non-degenerates}\Big\}.$$

したがって，QRM の縮退固有値とは退化例外型固有値に他ならない．

Remark 2.1. 上記の例外型固有値は，調和振動子の固有値（半整数）の痕跡と思われるが，明確な説明を得ているわけではない．

Remark 2.2. NcHO の固有値が縮退するときもよく似たことが（現象としては）観察できている．じっさい，NcHO の固有値が縮退するときもその重複度はつねに２であり，それが起こりうるのは次の２つの場合に限られる．i) “有限型” 固有値と “無限型” 固有値*3が同じパリティ（偶 or 奇）で一致する場合, ii) 異なるパリティをもつ “無限型” 固有値が一致する場合である．さらに i) の場合の固有値は，本質的に (構造定数 α, β からきまる定数倍を除き) 半（正）整数で与えられる [49]．(詳細は論文 [49] をご覧頂きたいが，[47] にもこの点の短い説明を付した．) しかしながら，後ほど観るように，NcHO の縮退固有値が，Heun ODE の合流により，量子ラビ模型の退化（例外型）固有値に単純に “落ちてきている”訳ではない．この点についても，今後の解明すべき課題がある．

---

*2 [11] の著者の一人である Serge Haroche は 2012 年度のノーベル物理学賞の授賞者である．フォトンの研究であるが，授賞内容は「個々の量子系の計測と操作を可能にした画期的手法の開発」とされた．Jaynes-Cummings model や Rabi 振動については，実験的な見地からの詳しい記述が [11] の §3.2 以降にある．

*3 固有値が有限型・無限型であるとは，対応する固有関数を Hermite 関数たちで展開したとき，それが有限・無限和となるというのが定義であるが，この定義は well-defined である．詳しくは [39, 49] などを参照．

3 次元リー環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の基底 H, E, F を以下のように定める.

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H.$$

このとき, パラメータ $(\kappa,\varepsilon,\nu)\in\mathbb{R}^3_{>0}$ に対し, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次の元 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}(\kappa,\varepsilon,\nu):=\frac{2}{\sinh 2\kappa}\left\{[(\sinh 2\kappa)(E-F)-(\cosh 2\kappa)H+\nu](H-\nu)+(\varepsilon\nu)^2\right\}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$$

で定義する. 以下, 本稿の主な主張の概略として, $\mathcal{R}$ の作用から NcHO が捉えられ, 量子ラビ模型がその Heun 型微分方程式から合流操作によって得られている状況を図式化しておく (未定義記号については, 順次述べていきたい):

$$\begin{array}{ccccc}
\text{NcHO} & \xleftarrow{\pi_1',\pi_2'} & \mathcal{R}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow[\pi_a'(\cong\varpi_a)]{\mathcal{L}_a} & \text{Heun ODE} \\
 & & & & \Big\Downarrow{\scriptsize\text{Confluence process}} \\
 & & \mathcal{K}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\varpi_a} & \text{Confluent Heun ODE} \quad \sim \text{quantum Rabi model.}
\end{array}$$

ここで π_1', π_2' は, それぞれ $\mathfrak{sl}_2$ の oscillator 表現 π' を偶奇のパリティーに制限してできる既約表現であり (oscillator 表現については, たとえば [14]) . また, $\mathcal{L}_a$ は次で定義される積分変換であり, (変形) ラプラス変換と呼ぶべきものである.

$$(\mathcal{L}_a u)(z):=\int_0^\infty u(yz)e^{-y^2/2}y^{a-1}dy.$$

この $\mathcal{L}_a$ が, $a=1$ では偶関数の場合のインタートワイナー ($\mathfrak{sl}_2$ に関する Lie algebra homomorphism) を与え, $a=2$ では奇関数の場合のインタートワイナーを与える. ($a=2$ として偶関数の場合を考えると, おつりが現れることになり, それが, [32] において, 偶奇におけるアンバランスを生む原因となった.) したがって, 以下の作用で $\mathbb{C}[y,y^{-1}]$ (の完備化) 上に定義された $\mathfrak{sl}_2$ の非ユニタリ主系列表現 $\pi_a'(a\in\mathbb{C})$

$$\pi_a'(H)=y\partial_y+\frac{1}{2},\quad \pi_a'(E)=\frac{1}{2}y^2,\quad \pi_a'(F)=-\frac{1}{2}\partial_y^2+\frac{(a-1)(a-2)}{2}\cdot\frac{1}{y^2}.$$

を $\mathcal{L}_a$ で移した作用 (表現) を ϖ_a と記せば (正確に言えば, 変数 z を $w=z^2\coth\kappa$ と置き換えるのであるが, 詳細は [49] をご覧頂きたい.), NcHO の固有値問題は上記の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次の元 $\mathcal{R}$ を用いて言い換えられることになる.

Proposition 2.1. $\alpha\neq\beta, \lambda>0$ に対し, パラメータ $(\kappa,\varepsilon,\nu)\in\mathbb{R}^3_{>0}$ を次で定める.

$$\cosh\kappa=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-1}},\quad \varepsilon=\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|,\quad \nu=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}\lambda.$$

ただし λ は非可換調和振動子 Q の固有値である. このとき $\mathcal{R}\in\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の作用として, *NcHO のスペクトル問題の偶・奇関数部分 (パリティ) とそれぞれ同値な Heun 作用素* $H_\lambda^\pm$ *が現れる ([49]):* $w:=z^2\coth\kappa$ *とすると,*

$$\varpi_1(\mathcal{R})=4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-\alpha\beta)H_\lambda^+(w,\partial_w),$$
$$\varpi_2(\mathcal{R})=4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-\alpha\beta)H_\lambda^-(w,\partial_w).$$

ここで, $H_\lambda^\pm=H_\lambda^\pm(w,\partial_w)$ *はそれぞれ Heun の常微分作用素で, 次で定義される:*

$$H_\lambda^+(w,\partial_w):=\frac{d^2}{dw^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}-p}{w}+\frac{-\frac{1}{2}-p}{w-1}+\frac{p+1}{w-\alpha\beta}\right)\frac{d}{dw}+\frac{-\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2})w-q^+}{w(w-1)(w-\alpha\beta)},$$
$$H_\lambda^-(w,\partial_w):=\frac{d^2}{dw^2}+\left(\frac{1-p}{w}+\frac{-p}{w-1}+\frac{p+\frac{3}{2}}{w-\alpha\beta}\right)\frac{d}{dw}+\frac{-\frac{3}{2}pw-q^-}{w(w-1)(w-\alpha\beta)}.$$

ただし $p=\frac{2\nu-3}{4}$ とおいた．また，これらの *Heun* 作用素のアクセサリパラメータ $q^{\pm}=q^{\pm}(\lambda)$ は α,β と λ によって以下のように与えられる．

$$q^{+}=\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(p+\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{2}\right\}(\alpha\beta-1)-\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right),$$
$$q^{-}=\left\{p^{2}-\left(p+\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{2}\right\}(\alpha\beta-1)-\frac{3}{2}p.$$

このことから NcHO のスペクトル問題 $Q\varphi=\lambda\varphi$ は，4 つの確定特異点 $w=0,1,\alpha\beta,\infty$ を持つ 2 階の Heun 型常微分方程式 ([42, 44]) の，ある複素領域上の正則関数解が存在することと同値であることが判る．次の定理のうち，奇関数の方は [32] において得られたものである．

Theorem 2.2 ([49])**.** *次の線形同型写像が存在する:*

$$\text{Even}:\left\{\varphi\in L^{2}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{2})\,|\,Q\varphi=\lambda\varphi,\varphi(-x)=\varphi(x)\right\}\xrightarrow{\sim}\left\{f\in\mathcal{O}(\Omega)\,|\,H_{\lambda}^{+}f=0\right\},$$
$$\text{Odd}:\left\{\varphi\in L^{2}(\mathbb{R},\mathbb{C}^{2})\,|\,Q\varphi=\lambda\varphi,\varphi(-x)=-\varphi(x)\right\}\xrightarrow{\sim}\left\{f\in\mathcal{O}(\Omega)\,|\,H_{\lambda}^{-}f=0\right\}.$$

ここで $\Omega\subset\mathbb{C}$ は $0,1\in\Omega,\alpha\beta\notin\Omega$ を満たす単連結領域で，$\mathcal{O}(\Omega)$ は Ω 上の正則関数全体の集合である． □

なお，作用素 $H_{\lambda}^{\pm}(w,\partial_w)$ の Riemann's scheme を記しておくと，それぞれ以下のようになる．

$$\mathrm{H}_{\lambda}^{+}:\begin{pmatrix}0 & 1 & \alpha\beta & \infty & ;w\ q^{+}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\ p+\frac{1}{2} & p+\frac{3}{2} & -p & -(p+\frac{1}{2}) & \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathrm{H}_{\lambda}^{-}:\begin{pmatrix}0 & 1 & \alpha\beta & \infty & ;w\ q^{-}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \\ p & p+1 & -p-\frac{1}{2} & -p & \end{pmatrix}. \tag{2}$$

ここで一行目は確定特異点を表し，２行目３行目には，それぞれの確定特異点での exponents が示されている．

3 量子ラビ模型の Heun 描像

Bargmann 変換 $\mathcal{B}$ を

$$(\mathcal{B}f)(x)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{2\pi xz-\pi x^{2}-\frac{\pi}{2}z^{2}}dx$$

で定める．$\mathcal{B}$ により，以下のような生成消滅演算子の変換

$$a^{\dagger}=(x-\partial_x)/\sqrt{2}\to z,\quad a=(x+\partial_x)/\sqrt{2}\to\partial_z$$

が引き起こされ，H_{Rabi} の固有値問題から 1 階の微分方程式系

$$H_{\mathrm{Rabi}}\to\begin{pmatrix}z\partial_z+\Delta-E & g(z+\partial_z)\\ g(z+\partial_z) & z\partial_z-\Delta-E\end{pmatrix} \tag{3}$$

が与えられる．これを 1 次元に書き直すことにより，固有値問題 $H_{\mathrm{Rabi}}\varphi=E\varphi$ は次の 2 階微分方程式に帰着される．

$$\frac{d^{2}f}{dz^{2}}+p(z)\frac{df}{dz}+q(z)f=0,$$
$$p(z)=\frac{(1-2E-2g^{2})z-g}{z^{2}-g^{2}},\quad q(z)=\frac{-g^{2}z^{2}+gz+E^{2}-g^{2}-\Delta^{2}}{z^{2}-g^{2}}.$$

さらに $f(w) =: e^{-gz}\phi(x)$, $x = (g+z)/2g$ とおくことで, $\phi(x)$ に関する合流型 Heun 微分方程式 $H_1^{\mathrm{Rabi}}\phi = 0$,

$$H_1^{\mathrm{Rabi}} := \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ -4g^2 + \frac{1-(E+g^2)}{x} + \frac{1-(E+g^2+1)}{x-1} \right\} \frac{d}{dx} + \frac{4g^2(E+g^2)x + \mu}{x(x-1)}, \tag{4}$$

$$\mu = (E+g^2)^2 - 4g^2(E+g^2) - \Delta^2$$

が得られる. 同様に $f(z) = e^{gz}\tilde{\phi}(x)$, $x = (g-z)/2g$ とおくと,$\tilde{\phi}(x)$ に関する合流型 Heun 微分方程式 $\mathcal{H}_2^{\mathrm{Rabi}}\tilde{\phi} = 0$,

$$\mathcal{H}_2^{\mathrm{Rabi}} := \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ -4g^2 + \frac{1-(\lambda+g^2+1)}{x} + \frac{1-(\lambda+g^2)}{x-1} \right\} \frac{d}{dx} + \frac{4g^2(\lambda+g^2-1)x + \mu}{x(x-1)}. \tag{5}$$

が得られる.

Remark 3.1. 量子ラビ模型からは Bargmann 変換により一階の連立方程式が得られたのに対し, NcHO の場合は次数は下がらず 2 階の方程式系のままである. これは NcHO の解析, とくに固有値問題が量子ラビ模型より困難でありうる理由の一つとなっている. ただし, NcHO が導入された論文 [39] においては, そのスペクトルを連分数展開を用いて記述したが, それは, Braak の論文 [5] で行われた解析の親類筋といえるものである. したがって, [5] と同様の手法を用いることにより, NcHO の場合にも, 特別な超越関数 (有理型関数) が存在して Q の零点がその固有値を特定するという形の記述が可能であるかもしれない.

3.1 Heun 型方程式の合流操作

さて, $a \in \mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{C}$ でも当面はよい) に対し, oscillator 表現 π'_a のラプラス変換 $\mathcal{L}_a$ の像を ϖ_a を書くと

$$z^{-a+1}\varpi_a(\mathcal{R})z^{a-1} = 4(\tanh\kappa)w(w-1)(w-t)H^a(w,\partial_w)$$

となることがわかる. ただしここで $t = \coth^2\kappa$ とおけば,

$$H^a(w,\partial_w) = \frac{d^2}{dw^2} + \left(\frac{3-2\nu+2a}{4w} + \frac{-1-2\nu+2a}{4(w-1)} + \frac{-1+2\nu+2a}{w-t} \right) \frac{d}{dw} + \frac{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2}-\nu)w - q_a}{w(w-1)(w-\alpha\beta)}.$$

ここで, アクセサリパラメータ q_a は

$$q_a = \left\{ -(a-\frac{1}{2}-\nu)^2 + (\varepsilon\nu)^2 \right\}(t-1) - 2(a-\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2}-\nu)$$

となる. いま, $H^a(w,\partial_w)$ の表示において $(a,\nu) \to (a+p, \nu+p)$ という置き換えをし, 二つの確定特異点 $w = t$ と $w = \infty$ を以下の関係式で合流することにする. つまり

$$t = \rho^{-1},\ p = 4g^2\rho^{-1} - (a+\frac{1}{2}), \qquad \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ (\Leftrightarrow p \to \infty)}} w(w-1)(w-t)\rho H^a(w,\partial_w) \tag{6}$$

という形である. (Heun ODE の合流の詳細に関してはテキスト [44] を参照.) さらに $E + g^2 = \frac{1}{4}(1+2\nu-2a)$ を満たすように a, ν をとると, シュレディンガー方程式 $H_{\mathrm{Rabi}}\varphi = E\varphi$ と同値な 2 階の微分方程式 (4) が得られることになる [49]. なお, 議論の出発点として $\mathcal{R}$ のかわりに以下で定める

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}(\kappa,\varepsilon,\nu) := \frac{2}{\sinh 2\kappa}\left\{ (H-\nu)\left[(\sinh 2\kappa)(E-F) - (\cosh 2\kappa)H + \nu \right] + (\varepsilon\nu)^2 \right\} \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$$

を考え, 上述と同じ手続きを行えば, もうひとつの 2 階の微分方程式 (5) が得られる.

Remark 3.2. $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, ハミルトニアン KQK は非可換調和振動子 Q と同じスペクトルをもつことが容易に判る. さらにまた, $\pi'(\tilde{\mathcal{R}})u = 0$ は固有値問題 $KQK\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$ ($\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ を導く (Lemma 2.1 [49]).

Remark 3.3. 上記の合流操作 (6) により NcHO と量子ラビ模型の関係がいわば超越的な操作により得られたことになるが，それがいったいどういう意味を持つのか不明である．とくに，合流操作において "表現のパラメータ a も無限大に飛ばしているようにみえる" ことなどについては，理由や意味を明確にする必要がある．

Remark 3.4. Braak は論文 [5] において，量子ラビ模型の固有値は各閉区間 $[n, n+1]$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ において高々 2 個しかないとの予想をしている（端点などについての取り扱いの詳細（合理的だと思う）については，直接 [5] にあたられたい）．このことは，論文 [17]([31, 12, 13] なども参考となる) において Min-max theorem を利用して得た NcHO のスペクトル分布とは様相を異にする．もし Braak の予想が正しく，後者の結果が optimal であるとすると，上記の合流操作による量子ラビ模型の合流 Heun 描像と NcHO との関係を反映していると考えるべきなのかもしれない．

4　量子ラビ模型の縮退スペクトル

前節のような合流操作を経ずに，(4) を直接捉える $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次の元 $\mathcal{K}$ が存在する．つまり，$\mathcal{K}$ を用いて $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現の枠組みの中で退化例外型スペクトルに対応する固有関数が構成される [50]．このことについて述べるのが本節の目的であるが，詳細は [50] をご覧頂きたい．

パラメータの組 $(\alpha, \beta, \gamma, C) \in \mathbb{R}^4$ に対して，$\mathbb{K} = \mathbb{K}(\alpha, \beta, \gamma; C) \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 及び，表現 ϖ_a にも依存する定数 $\lambda_a = \lambda_a(\alpha, \beta, \gamma)$ を以下で定める．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}(\alpha, \beta, \gamma; C) &:= \left[\frac{1}{2}H - E + \alpha\right](F + \beta) + \gamma\left[H - \frac{1}{2}\right] + C,\\
\lambda_a(\alpha, \beta, \gamma) &:= \beta\left(\frac{1}{2}a + \alpha\right) + \gamma\left(a - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

天下り的であるが，いま (α, β, γ) を $\alpha = 1 - \frac{E+g^2}{2}$, $\beta = 4g^2$, $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{E+g^2}{2}$ とおき，$\mathcal{K} \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ と Λ_a を以下で定める．

$$
\mathcal{K} := \mathbb{K}\Big(1 - \frac{E+g^2}{2}, 4g^2, \frac{1}{2} - \frac{E+g^2}{2}; \mu\Big), \quad \Lambda_a := \lambda_a\Big(1 - \frac{E+g^2}{2}, 4g^2, \frac{1}{2} - \frac{E+g^2}{2}\Big).
$$

同様に $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\tilde{\Lambda}_a$ を

$$
\tilde{\mathcal{K}} := \mathbb{K}\Big(-\frac{1}{2} - \frac{E+g^2}{2}, 4g^2, -\frac{E+g^2}{2}; \mu\Big), \quad \tilde{\Lambda}_a := \lambda_a\Big(-\frac{1}{2} - \frac{E+g^2}{2}, 4g^2, -\frac{E+g^2}{2}\Big)
$$

と定める．このとき以下が成り立つ [50]．

Theorem 4.1. $a = -(E + g^2)$ のとき

$$
\mathcal{H}_1^{\mathrm{Rabi}} = \{x(x-1)\}^{-1} x^{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}(\varpi_a(\mathcal{K}) - \Lambda_a) x^{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}.
$$

$a = 1 - (\lambda + g^2)$ のとき

$$
\mathcal{H}_2^{\mathrm{Rabi}} = \{x(x-1)\}^{-1} x^{-\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}(\varpi_a(\tilde{\mathcal{K}}) - \tilde{\Lambda}_a) x^{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}. \qquad \square
$$

この定理を用いることで，退化例外型固有値が $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現で捉えられることが示される：じっさい，有限次元表現で捉えられるということは，表現の基底で展開した際に有限個の基底でターミネートするということを意味するが，その条件を書くと，それは（[27] でも得られている）以下のように recursive に定まる多項式 $Q_n(x) = P_n^{(n)}(x, \Delta^2)$ (*continuant*) の正の根の存在に帰着される．

○ 2変数の多項式 $P_k^{(n)}(x,y)\,(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を以下で定める：

$$P_0^{(n)}=1,\quad P_1^{(n)}=x+y-1,\quad P_k^{(n)}=(kx+y-k^2)P_{k-1}^{(n)}-k(k-1)(n-k+1)xP_{k-2}^{(n)}.$$

その上で，たとえば以下に述べる補題（Kuś [27] による）を用いると，$0<|\Delta|<1$ のときには $P_n^{(n)}((2g)^2,\Delta^2)=0$ から退化例外型固有値 (Judd's solution) の存在が示される．

Proposition 4.2. $0<|\Delta|<1$ とすると $P_n^{(n)}(x,\Delta^2)$ は x の多項式として相異なる n 個の正の根を持つ．

なお，2重に縮退する事実は，球 (spherical) 表現および非球表現のそれぞれから，同一の多項式 $Q_n(x)$ が得られることによる．詳細は [50] をご覧頂きたい．

Problem 4.1. 以下のような主張が成立するリー群 G（たとえば，$SL_2(\mathbb{R})$ やその2重被覆群 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ など）の離散部分群 $\Gamma(g,\Delta)$ は存在するであろうか？
"$E=m-g^2$ が退化例外型固有値 (上述の仕組みで対応する G の有限次元既約表現 (2つある) を π_m と書く) となるための必要十分条件は π_m の $\Gamma(g,\Delta)$ への制限 $\pi_m|_{\Gamma(g,\Delta)}$ が自明表現となることである"．

Remark 4.1. $\mathcal{K}$ と $\mathcal{R}$ の直接の関係は不明である．Remark 3.3 で述べたように，合流において表現を無限大に飛ばすという操作が入り込むことから，構成の方法に鑑みても，$\mathcal{K}$ が $\mathcal{R}$ から $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ のなかで何かしらの "合流操作" によって得られるとは考えにくい．

Remark 4.2. 付随的な問題であるが，NcHO の縮退固有値の表現論的解釈は与えられていない．Remark 2.1 に関係して両モデルの比較検討のためにも，このことは探求する意義がある．

Problem 4.2. 非退化例外型固有値は（退化例外型固有値のときと同様に）$\mathfrak{sl}_2$ の離散系列表現で記述できるのでは（予想）．ところで，さらにこれが正しければ，非退化例外型固有値の Problem 4.1 と同様なことが言えるであろうか？ また，正則固有値についてはどうか？（[50] の最後に関係する議論を行っている.）さらに，量子ラビ模型の固有値とある種の loop/orbit に関わる ([35] などにあるような) 跡公式としての理解は可能であろうか？

Remark 4.3. 論文 [50] において，非退化の例外型固有値が離散系列表現を用いて捉えられるであろうと述べているが，そこにおける Wronskian の計算式が（単純な計算ミスのチェックを怠り）間違ったままになっている．議論において計算式の具体形を用いた部分はないが，念のため注意しておきたい．

5 NcHO と量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数

5.1 NcHO の数論

NcHO のスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ の特殊値の研究 ([16, 33]) により，リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s=2,3$ での無理数性の証明 (1978 年) において R.Apéry が考察した Apéry 数の類似物が定まることが判った（Apéry-like 数）．実際，それらがもつ，定義からは予測できない合同性 [22] や楕円曲線・保型形式との関係が，$\zeta(s)$ に対し F.Beukers[2, 3] が明らかにした内容と同様に示される．事実，ここで定義した Apéry-like 数の母関数は重さ 1 の $\Gamma(2)$（あるいは $\Gamma_0(4)$）-モジュラー形式であり，D.Zagier[52] の分類リストの 19 番に一致していることが [23] において，また最近の L. Long, R. Osburn and H. Swisher の論文 [29] において，[22] で予想された高い素数冪の合同関係式が正しいことも示された．また，NcHO のスペクトルに関係した多重 L-値に関係する研究もある [26]．さらに [24] 及び [25] において，[51] で展開された手法を応用して Eichler 積分（あるいは Automorphic integrals:[8]）の自然な拡張である Eichler 形式及び付随するコホモロジー群を [10] と同様に調べて，NcHO のスペクトルゼータ関

数の $s=4$ での Apéry-like 数の母関数の Eichler 形式による明示式も得た.*4 なお, Eichler 積分ではない Eichler 形式は, differential Eisenstein series で与えられる. ここで, differential Eisenstein series とは Berndt[1] での Generalized Eisenstein series を複素平面に解析接続し, そこでの負の整数点での微分により定義されるものである [24, 25](Differential Eisenstein series は現れないが, [43] において類似の方向の一般的議論がなされている).

論文 [25] において定義した偶数点 $2k$ での特殊値から現れる Apéry-like 数 ($k>2$ のときはその第一近似 : 1st anomaly とよんでいる) $\{J_{2k}(n)\}$ の母関数 $v_k(z)=\sum_{n\geq 0} J_{2k}(n)z^n$ の (k に関する) さらなる母関数 $V(z,\lambda)$ を考えると, それは有理関数を被積分関数とする積分表示をもち, その変数 λ に関する "等分点" での値が F. Rodriguez Villegas の論文 [41] における楕円曲線 (達) の L 関数の特殊値と Mahler 測度を介して一致する. しかしいまのところ理由は不明である. 解明には, [28] などを参照する限り, NcHO の (たとえば $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2_{>0}$ が定める複素トーラスといったものとは異なる観点となる) 離散力学系や Mahler 測度からの理解を求めることが重要であると思われる.

Remark 5.1. Q のスペクトルゼータ関数の $s=n(n\geq 2)$ での特殊値に対応する Apéy-like 数の積分表示は既に得られているが [25], $n\geq 4$ のときは, 1st anomaly 以外は非自明であり, 数論性 (期待される合同式の成立) などの研究は今後にまたれる. また, $\zeta(3)$ は対応する Apéry 数の母関数が $K3$ 曲面族の ($\zeta(2)$ のときは楕円曲線族) Picard-Fuchs 方程式を満たすことで繋がるという Beukers らの仕事 [4] の類似は, [41] にも関連し高次の n に対する $\zeta_Q(n)$ でも期待されるところである (Calabi-Yau 多様体にも同様に自然と繋がるのではなかろうか).

5.2 量子ラビ模型の数論

量子ラビ模型のスペクトルに NcHO と同様の豊かな数論的対象が潜んでいるのかどうかいまのところ明白ではない. が, 期待はされる. たとえば, 量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数と Braak の $G_\pm(z)$ には大きな関係がある. ここで $G_\pm(z)$ は [5] において構成された, 正則固有値 $E=x-g^2$ を与える x をピッタリ零点に持つ有理型関数である. いま, 量子ラビ模型の Hurwitz 型のスペクトルゼータ関数

$$\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s,z)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})}(z-\lambda)^{-s}\quad(\Re s\gg 1,\ z\in\mathbb{C})$$

を考えると ([48]) , これは $\Re s$ が十分大きいときに (おそらく $\Re s>1$ において) 正則関数を定めることが分かる. 今, $\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s,z)$ が $s=0$ の近傍まで正則関数として解析接続できると仮定する (おそらく正しいが未確認). このことが正しければ次のようなゼータ正規化積 (たとえば [21] あるいはそこの文献表を参照.)

$$\prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})}(z-\lambda):=\exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta_{\mathrm{Rabi}}(0,z)\right) \tag{7}$$

が定義できる.$G_\pm(z)$ はラビ模型の (正負のパリティ毎の) 正則スペクトルを零点に持つ関数であったので, (7) と積 $G_+(z)G_-(z)$ との商をとることで, 例外型固有値についての正規化積 $\prod_{\lambda=n-g^2\in\mathrm{Spec}(H_{\mathrm{Rabi}})\,(n\in\mathbf{Z})}(z-n)$ が現れる. 言い換えれば, 例外型固有値に関する正規化積を, なんらかの意味でのガンマ因子 (あるいは, Selberg zeta 関数のようなトポロジカルな零点) と捉えることができれば興味深い.

Remark 5.2. 有理型関数 $G_\pm(z)$ の存在が, 量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数 $\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s,z)$ の ($s=0$ 付近の) 解析性及びゼータ正規化積が存在することの傍証となっている.

Remark 5.3. NcHO のスペクトルゼータ関数の特殊値が包含する数論的な性質と量子ラビ模型のそれとの間に, それぞれの Heun 描像 (あるいは $\mathcal{R}$) が合流操作によって繋がっていることに対応する関係が見出されることが期待される. たとえば, Remark 3.4 で述べたことに対応して, 固有値の間の関係が記述されるとより面白い.

---

*4 [24] においては, [25] での Eichler 形式を residual modular form と命名していた. しかしながら, 後者では, residual spectrum や residual modular Galois representation などの用語と紛らわしくなる恐れがあるため [25] では名称の変更を行った.

Problem 5.1. 量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数（あるいは，上手く z を選んだときの $\zeta_{\mathrm{Rabi}}(s,z)$）の特殊値から，NcHO の場合での [23] のように，その母関数が保型形式を与えるような Apéry-like 数が現れるであろうか？

Remark 5.4. Braak [5] における関数 $G_{\pm}(z)$ の導出は，連分数展開によるものであるとも考えられる ([6] も参照). 他方，[38] で行われた NcHO の固有値の記述は連分数展開を用いた実解析的なものである（[32] を複素解析的なものだとすれば）．したがって，NcHO に対しても $G_{\pm}(z)$ のような関数を構成することが（できるはずで）望ましい (Remark 3.1 で述べたこと)．それにより，直前の Remark 5.3 で述べた問題に迫ることができればよいと思われる．

最後に：最近では，積極的な意味で，楕円曲線の L-関数と楕円曲線暗号が Expander グラフの観点からつながっていることも明らかにされてきている（たとえば [18] など)．一方で量子情報技術の一番の着目先は量子計算機である．量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数の特殊値について，NcHO の場合のように，なんらかの意味でモジュラー形式やある種の L-関数との関係が存在することが見いだされればたいへん興味深い．

Acknowledgement: This work is partially supported by Grant-in-Aid for Challenging Exploratory Research No.25610006 and by CREST, JST. また，本研究集会のオーガナイザである竹村剛一氏には，講演のお誘いを頂いたのみならず，講究録原稿執筆に関し，暖かくそして気長な pressure と encouragement を頂いた．この場をお借りして感謝申し上げます．

参考文献

[1] B. C. Berndt, *Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **272** (1974), 182–193.

[2] F. Beukers, *Irrationality of π^2, periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$*, Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982), 47–66, Progr. Math. **31**, Birkhäuser, Boston, 1983.

[3] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Soc. Math. Fr. Astérisque **147–148**(1987), 271–283.

[4] F. Beukers and C.A.M. Peters, *A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$*, J. Reine Angew. Math., **351** (1984), 42–54.

[5] D. Braak, *On the Integrability of the Rabi Model*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 100401–100404.

[6] D. Braak, *Continued fraction and the Rabi Model*, J. Phys. A: math. Theor. **46** (2013), 175301(10pp).

[7] D. Braak, *Analytical Solutions of Basic Models in Quantum Optics*, in "Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation – Proceedings of the Forum of Mathematics for Industry 2014" eds. R. Anderssen et al., Mathematics for Industry Vol. 11, Springer, 2015, 75-92.

[8] M. Eichler, *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale*, Math. Z. **67** (1957), 267–298.

[9] P. Forn-Díaz et al., *Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime*, Phys. Rev. Lett. **105**(2010), 237001.

[10] R. C. Gunning, *The Eichler cohomology groups and automorphic forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 44–62.

[11] S. Haroche and J. M. Raimond, Exploring the Quantum. Atoms, Cavities, and Photons, Oxford University Press, 2008.

[12] F. Hiroshima and I. Sasaki, *Multiplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 355–366.

[13] F. Hiroshima and I. Sasaki, *Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators: The lowest eigenvalue and no crossing*, J. Math. Anal. Appl. **105** (2014) 595–609.

[14] R. Howe and E. C. Tan, Non-Abelian Harmonic Analysis. Applications of $SL(2,\mathbb{R})$. Springer, 1992.

[15] T. Ichinose and M. Wakayama, *Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators*, Commun. Math. Phys. **258** (2005), 697–739.

[16] T. Ichinose and M. Wakayama, *Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations*, Kyushu J. Math. **59** (2005), 39–100.

[17] T. Ichinose and M. Wakayama, *On the spectral zeta function for the noncommutative harmonic oscillator*, Rep. Math. Phys. **59** (2007), 421–432.

[18] D. Jao, S.D. Miller, R. Venkatesan, *Expander graphs based on GRH with an application to elliptic curve cryptography*, J.Number Theor. **129** (2009),1491–1504.

[19] E.T. Jaynes and F.W. Cummings: *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51** (1963), 89-109.

[20] K. Kimoto, *Arithmetics derived from the non-commutative harmonic oscillator*, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis (eds. G. van Dijk and M. Wakayama), 199–210, de Gruyter, 2010.

[21] K. Kimoto and M. Wakayama, *Remarks on zeta regularized products*, Int. Math. Res. Notices, 2004:17, (2004), 855-875.

[22] K. Kimoto and M. Wakayama, *Apéry-like numbers arising from special values of spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators*, Kyushu J. Math., **60** (2006), 383–404.

[23] K. Kimoto and M. Wakayama, *Elliptic curves arising from the spectral zeta function for non-commutative harmonic oscillators and $\Gamma_0(4)$-modular forms*, Proceedings Conf. L-functions (eds. L. Weng and M. Kaneko), 201–218, World Scientific, 2007.

[24] K. Kimoto and M. Wakayama, *Spectrum of non-commutative harmonic oscillators and residual modular forms*, in "Noncommutative Geometry and Physics" (eds. G. Dito, H. Moriyoshi, T. Natsume, S. Watamura), 237–267, World Scientific, 2012.

[25] K. Kimoto and M. Wakayama, Apéry-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and Eichler forms with the associated cohomology groups (preprint 2015).

[26] K. Kimoto and Y. Yamasaki, *A variation of multiple L-values arising from the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator*, Proc. Amer. Math. Soc.,**137** (2009), 2503–2515.

[27] M. Kuś: *On the spectrum of a two-level system*, J. Math. Phys., **26** (1985) 2792–2795.

[28] D. Lind, K. Schmidt and T. Ward, *Mahler measure and entropy for commuting automorphisms of compact groups*, Invent. math. **101** (1990), 593–629.

[29] L. Long, R. Osburn, H. Swisher, *On a conjecture of Kimoto and Wakayama*, preprint 2014, arXiv:1404.4723 [math.NT].

[30] A.J. Maciejewski, M. Przybylska and T. Stachowiak: Full spectrum of the Rabi model, Phys. Letter A **378**, (2014), 16—20.

[31] K. Nagatou, M. T. Nakao and M. Wakayama. *Verified numerical computations for eigen- values of non-commutative harmonic oscillators*, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 633–650.

[32] H. Ochiai, *Non-commutative harmonic oscillators and Fuchsian ordinary differential operators*, Commun. Math. Phys. **217** (2001), 357–373.

[33] H. Ochiai, *A special value of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillators*, Ramanujan J. **15** (2008), 31–36.

[34] T. Niemczyk et al. *Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime*, Nature Physics **6** (2010), 772–776.

[35] A. Parmeggiani, *On the spectrum of certain non-commutative harmonic oscillators and semiclassical analysis*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), 285–308.

[36] A. Parmeggiani, Spectral Theory of Non-commutative Harmonic Oscillators: An Introduction. Lecture Notes in Math. **1992**, Springer, 2010.

[37] A. Parmeggiani, *Non-commutative harmonic oscillators and related problems*, Milan J. Math. **82**(2014), 343–387.

[38] A. Parmeggiani and M. Wakayama, *Oscillator representations and systems of ordinary differential equations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **98** (2001), 26–30.

[39] A. Parmeggiani and M. Wakayama, *Non-commutative harmonic oscillators-I, II, Corrigenda and remarks to I*, Forum. Math. **14** (2002), 539–604, 669–690, ibid **15** (2003), 955–963.

[40] I. I. Rabi: *Space quantization in a gyrating magnetic field*, Phys. Rev., **49** (1936), 324; **51** (1937), 652.

[41] F. Rodriguez Villegas, *Modular Mahler measures I*, Topics in Number Theory, 17–48, Kluwer, 1999.

[42] A. Ronveaux (eds.), Heun's Differential Equations, Oxford University Press, 1995.

[43] G. Shibukawa, *Bilateral zeta functions and their applications*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 429-451.

[44] S. Y. Slavyanov and W. Lay, Special functions: A Unified Theory Based on Singularities, Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[45] E. Solano, *Viewpoint: The dialogue between quantum light and matter*, Physics. **4** (2011), 68–69.

[46] M. Wakayama, *Simplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators and the Riemann scheme of a certain Heun's differential equation*, Proc. Japan Acad., **89**, Ser. A (2013), 69–73.

[47] M. Wakayama(述), K. Inoue(記), *Non-commutative harmonic oscillators and the Rabi model*, in"表現論と調和解析の新たな進展" (橋本康史編), RIMS 講究録 No.1925 (2014), 26–30.

[48] M. Wakayama, *Remarks on quantum interaction models by Lie theory and modular forms via non-commutative harmonic oscillators*, in "Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology – Theoretical Basis and Developments in Mathematical Modelling" eds. R. Nishii et al., Mathematics for Industry Vol. 5, Springer, 2014, 17-34.

[49] M. Wakayama, *Equivalence between the eigenvalue problem of non-commutative harmonic oscillators and existence of holomorphic solutions of Heun's differential equations, eigenstates degeneration, and Rabi's model*, Int. Math. Res. Notices. (2015), (36pp), doi:10.1093/imrn/RNV145.

[50] M. Wakayama and T. Yamasaki, *The quantum Rabi model and Lie algebra representations of* $\mathfrak{sl}_2$, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014), 335203 (17pp).

[51] Y. Yang, *Apéry limits and special values of L-functions*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), 492–513.

[52] D. Zagier, *Integral solutions of Apéry-like recurrence equations*, Groups and symmetries, 349–366, CRM Proc. Lecture Notes **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

Masato Wakayama
Institute of Mathematics for Industry,
Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395 JAPAN
`wakayama@imi.kyushu-u.ac.jp`