数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 144-148

アフィン・リー環の極大ウェイト重複度に現れるpattern avoidanceについて

(Pattern avoidances seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra modules)

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*
Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1　はじめに

2015年6月下旬に開催されたRIMS研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」において、渡部正樹（東大数理）さんとの共同研究 [TW] について、お話させていただいた。それは、2014年8月に韓国の「ICM 2014 Satellite Conference on Representation Theory and Related Topics」で Kailash C. Misra 教授（North Carolina State University）が発表した予想 [MR1, Conjecture 4.13] を（少し一般化して）解決したものである。 [MR1] は、私の昔の研究 [Tsu] を発展させたもので、本稿においては、 [Tsu] の背景や、 [TW] の結果を簡単にまとめさせていただく。

2　講演内容の概要

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ を対称化可能 GCM A に付随した Kac-Moody リー環とする。各支配的整ウェイト $\Lambda\in\mathcal{P}^{+}$ について、可積分最高ウェイト表現 $V(\Lambda)$ とそのウェイトの集合 $P_A(\Lambda):=\{\mu\in\mathfrak{h}^{*}\mid V(\Lambda)_{\mu}\neq 0\}$ が定義される。$V(\Lambda)$ の可積分性から $P_A(\Lambda)$ はワイル群 $W=W(A)$ の作用を持つ。ウェイト $\mu\in P_A(\Lambda)$ について、$m_A(\Lambda,\mu):=\dim V(\Lambda)_{\mu}$ はウェイト重複度（weight multiplicity）と呼ばれるが、この研究は組み合わせ論的表現論の中でも特別な位置を占めている。実際、ヤング図形、柏原クリスタルなどと言った由緒正しい代数的組み合わせ論の対象は、これらの次元の数え上げに直接関係している（Kac-Moody リー環や柏原クリスタルについいはそれぞれ [Kac, Kas] を、ヤング図形については [Ful] を総合文献として挙げておく）。

一方で、しばしば $P_A(\Lambda)$ や $m_A(\Lambda,\mu)$ の情報が、圏論化（categorification）を通じて、一見無関係に見える代数の表現論の情報を与えることがある。例えば、Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki 理論やその後の発展により、$P_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda)$ は適当な巡回ヘッケ環（有木・小池代数）$\mathcal{H}$ のブロックをパラメトライズすることが知られている [LM, Theorem A]。またこのパラメトライズの下で、

(a) 軌道空間 $P_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda)/W$ は、$\mathcal{H}$ のブロックの導来圏同値類を列挙し [CR, §7.2],

(b) $m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda,\mu)$ は、$\mathcal{H}$ のブロックに属する既約表現の数になっている。

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported in part by JSPS Kakenhi Grant 26800005.

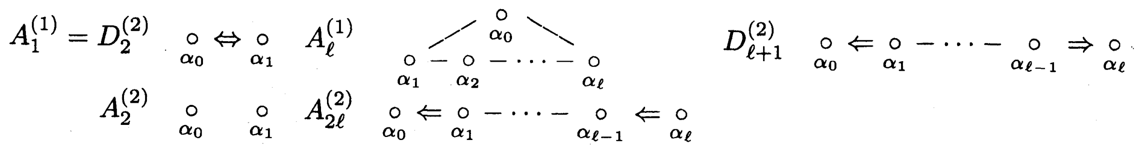


図 1: アフィン ADE 型 Dynkin 図形

同種の定理が、他の「ヘッケ環」(KLR 代数、ヘッケ・クリフォード代数 etc) でも、GCM A をうまく選ぶと成立すると考えられている (一部は証明されている)。

そこで $P_A(\Lambda)$ に興味があるが、A がアフィンの場合は、おおまかな構造が知られている。

命題 2.1 ([Kac, §12.6]). $\Lambda \in \mathcal{P}^+$ をアフィン・リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ の支配的整ウェイトとすると、

$$P_A(\Lambda) = \bigsqcup_{\lambda \in \max_A(\Lambda)} \{\lambda - n\delta \mid n \geq 0\}$$

が成立する。ここで $\max_A(\Lambda)$ は、$V(\Lambda)$ の極大ウェイト (maximal weight) の集合である :

$$\max_A(\lambda) = \{\lambda \in P_A(\Lambda) \mid \lambda + \delta \notin P_A(\Lambda)\}.$$

明らかに、$\max_A(\Lambda)$ は W 不変 (すなわち、$\max_A(\Lambda) = W \cdot (\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+)$) だが、実は $\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+$ は有限集合である [Kac, Proposition 12.6]。

Λ がレベル 1 の場合、先に述べた圏論化を通じた対応で現れるヘッケ環は A 型岩堀・ヘッケ環になる。X がアフィン ADE 型で Λ がレベル 1 のとき、$\max_X(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\}$ となることに注意しよう。さて、B 型岩堀・ヘッケ環の表現論の研究のためには、レベル 2 で $A = A_{p-1}^{(1)}$ の場合を考える必要が生じる。[Tsu] において、集合 $\max_{A_{p-1}^{(1)}}(\Lambda_0 + \Lambda_s) \cap \mathcal{P}^+$ (ここで $0 \leq s < p$) を研究した。

定義 2.2. $p \geq 2$ を整数とする。$\ell \geq 1$ と $t, u \geq 0$ で $\ell + t < p - \ell + 1$ and $\ell < u - \ell + 1$ なるものについて、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ のルート格子の元を 2 つ、以下で定義する。

$$\lambda_{\ell,t}^p = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} \ell\alpha_1 + \cdots \ell\alpha_t \\ +(\ell-1)\alpha_{t+1} + (\ell-2)\alpha_{t+2} + \cdots + \alpha_{\ell+t-1} \\ +\alpha_{p-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{p-2} + (\ell-1)\alpha_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\mu_{\ell,u}^p = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} (\ell-1)\alpha_1 + (\ell-2)\alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1} \\ +\alpha_{u-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{u-2} + (\ell-1)\alpha_{u-1} \\ +\ell\alpha_u + \cdots \ell\alpha_{p-1} \end{pmatrix}$$

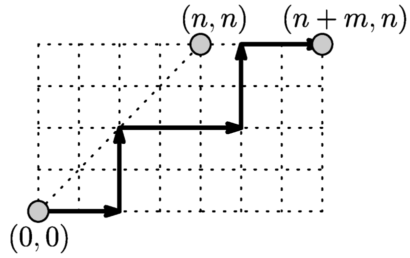
極大ウェイトとそのウェイト重複度は、以下で与えられる。

定理 2.3 ([Tsu, Theorem 1.4]). $p \geq 2$ を整数とし、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ のレベル 2 の支配的整ウェイト $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_s$ を考える (ここで $0 \leq s < p$)。このとき、以下が成立する。

(a) $\max_{A_{p-1}^{(1)}}(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\} \sqcup \{\Lambda - \lambda_{\ell,s}^p \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{p-s}{2} \rfloor\} \sqcup \{\Lambda - \mu_{\ell,s}^p \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\}$.

(b) $m_{A_{p-1}^{(1)}}(\Lambda, \Lambda - \lambda_{\ell,s}^p) = \mathsf{D}_{\ell,s}$, $m_{A_{p-1}^{(1)}}(\Lambda, \Lambda - \mu_{\ell,s}) = \mathsf{D}_{\ell,p-s}$.

ここで $\mathsf{D}_{n,m}$ は、$(0,0)$ から $(n+m,n)$ へのステップ $(1,0),(0,1)$ の lattice パスであって、対角線 $y=x$ を超えないものの数で、$\mathsf{D}_{n,m}=\frac{m+1}{n+m+1}\binom{2n+m}{n}$ となっている [St2, 6.20.b]。



レベル 3 以上の $\Lambda\in\mathcal{P}^+$ については、$\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda)\cap\mathcal{P}^+$ の構造は当然複雑になる。しかし、次を見るのは易しい [TW, §4]。

補題 2.4. $\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ の支配的整ウェイト $\Lambda=k\Lambda_0+\Lambda_s$（ここで $k\geq 1$ かつ $0\leq s<p$）について、

$$\{\Lambda-\lambda^p_{\ell,s}\mid 1\leq\ell\leq\lfloor\frac{p-s}{2}\rfloor\}\bigsqcup\{\Lambda-\mu_{\ell,s}\mid 1\leq\ell\leq\lfloor\frac{s}{2}\rfloor\}\subseteq\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda)\cap\mathcal{P}^+.$$

$\mathsf{D}_{n,0}$ はカタラン数（すなわち 321-avoiding な $\mathfrak{S}_n$ の元の個数 [St2, 6.19.ee]）であるという観察に基づき、Misra-Rebecca は次の極大ウェイト重複度と pattern avoidance の関係を予想した。

予想 2.5 ([MR1, Conjecture 4.13]). $1\leq\ell\leq\lfloor p/2\rfloor$ について、$m_{A^{(1)}_{p-1}}((k+1)\Lambda_0,(k+1)\Lambda_0-\lambda^p_{\ell,0})$ は、$((k+2),(k+1),\cdots,2,1)$-avoiding な $\mathfrak{S}_\ell$ の元の個数で与えられる。

[TW, Theorem 1.5] は、これを証明し、さらに少し一般化したものである。

定理 2.6. $p\geq 2$ を整数とし、レベル $k+1$ で $\Lambda=k\Lambda_0+\Lambda_s$ の形の $\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ の支配的整ウェイトを考える（ここで $0\leq s<p$ かつ $k\geq 1$）。このとき、$m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda,\Lambda-\lambda^p_{\ell,s})$ は、$\underbrace{0,\cdots,0}_{s},1,2,\cdots,\ell$（ここで 0 は s 個ある）の並び替えであって、長さ $k+2$ 以上の（狭義）減少部分列を含まないものの個数で与えられる。

証明は、ヘッケ環のモジュラー表現論で Kleshchev 多重分割と呼ばれている（$A^{(1)}_{p-1}$ 型）柏原クリスタルの連結成分 $B(a\Lambda_0+b\Lambda_s)\subseteq B(\Lambda_0)^{\otimes a}\otimes B(\Lambda_s)^{\otimes b}$ を、特徴付ける結果 [AKT, Theorem 9.5] を用いて、ウェイト重複度の計算を、適切なヤング図形の列の数え上げに帰着し、RSK 対応や平面分割（plane partition）（これらについては [St2, §7.20] を参照）を解析することでなされる [TW, §2]。なお [AKT, Theorem 9.5] は、Littelmann の結果 [Lit, Theorem 10.1] のヤング図形を用いた言い換えである。

$\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ 加群における、極大ウェイト重複度と pattern avoidance の関係は [MR1] で初めて指摘されたが、[TW] では $A^{(2)}_{2n}$ と $D^{(2)}_{n+1}$ という他のアフィン型でも、同種の定理を証明した [TW, Theorem 1.7]。

定理 2.7. $p\geq 2$ を整数とし、レベル $k+1$ で $\Lambda=(k+1)\Lambda_0$ の形の $\mathfrak{g}(X)$ の支配的整ウェイトを考える（ここで X は p が奇数のとき $X=A^{(2)}_{p-1}$ で、偶数のとき $X=D^{(2)}_{1+p/2}$ であり、$k\geq 1$ である）。$1\leq\ell<\lfloor p/2\rfloor$ について、

(a) $\gamma_\ell:=\Lambda-\ell\alpha_0-(\ell-1)\alpha_1-\cdots-\alpha_\ell\in\max_X(\Lambda)\cap\mathcal{P}^+$ となっていて、

(b) $m_X(\Lambda,\gamma_\ell)$ は、$((k+2),(k+1),\cdots,2,1)$-avoiding な $\mathfrak{S}_\ell$ の位数 2 の元（すなわち対合）の数で与えられる。

証明は、Dynkin 図形自己同型が誘導する柏原クリスタルの固定点と、oribit リー代数 [FSS] の関係を記述した Naito-Sagaki の結果 [NS1, NS2] を用いる。これも [AKT] 同様、Littelmann のパス模型の応用である。

[TW] が arXiv にあがる 1 週間前に、[MR2] が arXiv にあがり、そこで予想 2.5が証明されている。これは定理 2.6の $s=0$ の場合に相当する。[MR1] では、極大ウェイトの集合の数 $\#(\max_{A^{(1)}_{p-1}}(k\Lambda_0)\cap \mathcal{P}^+)$ についての予想 [MR1, Conjecture 3.9] も与えられており、[TW, §4] ではその証明も与えた。証明には、(おそらく Gauss にまで遡る) q-Lucas 定理 [Sag, Theorem 2.2] を用いる (通常の二項係数についての Lucas 定理については、[St1, Exercise 14 of Chapter 1] を参照);

命題 2.8 ([Sag, Theorem 2.2]). ζ を 1 の原始 d 乗根とする ($d\geq 2$)。任意の $n,j\geq 0$ について、

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\Big|_{q=\zeta} = \binom{\lfloor n/d\rfloor}{\lfloor j/d\rfloor}\cdot \begin{bmatrix} n\%d \\ j\%d \end{bmatrix}\Big|_{q=\zeta}$$

が成立する。ここで $a\%b$ は a を b で割った余りを意味し、$\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]=[x]!/([y]![x-y]!)$ は q-二項係数である ($0\leq y\leq x$ かつ $[z]!=\prod_{n=1}^{z}(q^n-1)/(q-1)$)。

3 最後に

この度、講演の機会を与えてくださった竹村剛一さんと伊師英之さんに感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

[AKT] S. Ariki, V. Kreiman and S. Tsuchioka, *On the tensor product of two basic representations of* $U_v(\mathfrak{sl}_e)$, Adv.Math. **218** (2008), 28–86.

[CR] J. Chuang and R. Rouquier, *Derived equivalences for symmetric groups and* $\mathfrak{sl}_2$*-categorification*, Ann.Math. **167** (2008) 245–298.

[FSS] J. Fuchs, B. Schellekens and C. Schweigert, *From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures*, Comm.Math.Phys. **180** (1996), 39–97.

[Ful] W. Fulton, *Young tableaux*, Cambridge University Press, 1997.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[Kas] M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours Spéc., vol. 9, Soc. Math. France, 2002.

[Lit] P. Littelmann, *A plactic algebra for semisimple Lie algebras*, Adv.Math. **124** (1996), 312–331.

[LM] S. Lyle and A. Mathas, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras*, Adv. Math. **216** (2007), 854–878.

[MR1] K. Misra and J. Rebecca, *On multiplicities of maximal weights of* $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$*-modules*, Algebr.Represent.Theory **17** (2014), 1303–1321.

[MR2] K. Misra and J. Rebecca, *Lattice Paths, Young Tableaux, and Weight Multiplicities*, arXiv:1508.06930

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, *Lakshmibai-Seshadri paths fixed by a diagram automorphism*, J.Algebra **245** (2001), 395–412.

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, *Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov-Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras*, Comm.Math.Phys. **263** (2006), 749–787.

[Sag] B. Sagan, *Congruence properties of q-analogs*, Adv.Math. **95** (1992), 127–143.

[St1] P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol.1*, Cambridge University Press, 2012.

[St2] P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol.2*, Cambridge University Press, 1999.

[Tsu] S. Tsuchioka, *Catalan numbers and level 2 weight structures of* $A^{(1)}_{p-1}$, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B11** (2009), 145–154.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Pattern avoidances seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra representations*, arXiv:1509.01070