

K_ETpic による数学教材の作成

工学院大学 基礎・教養教育部門 長谷川 研二 (Kenji Hasegawa)
Division of Liberal Arts,
Kogakuin University (ft10058@ns.kogakuin.ac.jp)

1 はじめに

数学の授業において、関数のグラフ等の図を黒板に書いたり、プリントを補助教材として配布することは大抵の数学教師が行っていることである。高等学校や大学理工系の 1 年次前半では 1 変数関数の微分積分を指導するが図が載ったプリントを配布するような準備をしなくても例えば増減表からフリーハンドで概形を描くことで極値を指導できる。ところが大学 1 年次の後半になると 2 変数関数が対象である偏微分や重積分を指導するが図が曲面になり 1 変数関数のグラフのように概形を手書きすることは絵が上手に描ける能力がない限り難い。曲面の概形については教科書に印刷されているワイヤフレームがない座標軸と稜線だけの図（例えば [6]）が頼りで、後は想像力を働かせるしかなかった。発表者が学生の時代は板書中心で教科書以外の補助教材としてプリントを配布することもあったが PC や現在は製造されていないワードプロセッサが普及する前なのでプリントは手書きや出版物のコピーがほとんどであった。その後 PC が普及し T_EX 等のワープロソフトで自前のプリントを手書きでなく活字体で作成できるようになり出版物を教科書として買わせなくても教科書代わりに授業計画や学生の実情に合わせたプリントを作成することが増えてきた。また Mathematica や Maple 等の数式処理ソフトウェアが開発され、数式処理の他に関数式を入力すればグラフを精緻に描写する機能もあり、モニターに映すだけでなく EPS や PNG 形式の画像ファイルが作成でき、それを T_EX の文書に挿入することもできる。

発表者は所属先の工学院大学で工学部等の学生に 1 年次の基礎科目として履修する微分積分と線形代数を教えてきた。入職した頃は PC が普及し始め、数学論文をタイプライターから T_EX をインストールした PC で作成する方法に移行してきたところであったが、授業方法については筆者が学生のとき受講した授業のように教科書（最初は筆者が学生のときの指定教科書 [6]）を事前にお買わせて、学生が板書をノートに取るような授業であった。しかしノートを取る負担や教科書の記述だけでは理解しにくい等の学生側の事情の他に T_EX の普及によりプリント作成と保存が容易になったことにより自前プリントを作成して、それを教科書代わりにした。その後 1990 年代後半に工学院大学では教室にスクリーンとプロジェクターを装備し、PC を繋げるとモニターの画面がスクリーンにも写せるようになったので、その活用方法を検討してみた。数学書に載っているような図を見せるだけでなく微分積分の基本概念として微分係数が接線の傾きの極限であることや定積分がリーマン和の極限で定義される様子を数式だけでなく視覚的に理

解させる方法として、アニメーションのように少しずつ変化させた図を差し替えながらスクリーンで見せることを始めた。当初は $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ファイルにおける `picture` 環境での図のデータ作成を容易にする `WinTpic` を使って図データを作成したが1変数関数のグラフのような平面図までで偏微分・重積分で必要な曲面の描写は無理である。そこで所属先でも一時期 `Mathematica` のライセンスを取得していたのでPCに `Mathematica` をインストールして曲面を含めた画像ファイルを多数作り、`JavaScript` でスクリーンに映した。その後、フリーソフトの `maxima` で微分積分以外に新たに担当した科目のために2次曲面や回転体の画像ファイルも作成し、それを `PowerPoint` で披露したり ([1]) 所属先が学生および教職員用のポータルサイトを開設したので学生が授業の資料のファイルをダウンロードできるようにするためにプリントのPDFファイルだけでなくスクリーンに映した `PowerPoint` のファイルをサイトにアップロードした。ところが所属先の新学部設立等の理由で微分積分の内容を偏微分までに留めたクラスを開講して、発表者はそのクラスを担当するようになり2年前まで重積分を教える機会がなく、重積分の図を新たに作らなかった。昨年度から久しぶりに重積分を教えるクラスを担当することになったので重積分の図も作り直したが、今回の研究集会で披露した図はそのときに作成した教材で図データは `KETpic` で作成した。

`KETpic` を知ることになったきっかけは所属先の同僚である北原清志先生が `CASTEX` 応用研究会に所属し、プリント教材に挿入する精緻な図を `KETpic` で作成していたことである。発表者も重積分を含め担当科目に必要なすべての図を `KETpic` で作成して `TEX` のプレゼンテーションツールである `Beamer` ([5]) でプレゼンテーション用のPDFファイルを作りスクリーンに映した。[4] やインターネット上で公開されているPDFファイルのマニュアルを参照しながらPCに `Scilab` をインストールして `TEX` の図データを作成した。これについては [2] で報告したが北原先生より本研究集会での発表を薦められた。本発表では時間の制約もあり最も手間が掛かった重積分に関する図を披露しただけで終わってしまったが、本論ではこのような教材を作成した背景、およびプログラミングにおける空間図形特有な問題点等を述べたい。なお来年度出版に向けて微分積分の教科書 ([3]) を執筆中であるが、本発表での図を挿入する予定である。

2 1変数の微分積分（微分係数と定積分）

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

で定義される。高等学校では速度が微分係数の例として数学の検定教科書で紹介されているが逆に物理の検定教科書では微分積分を利用することは(検定教科書を使わない授業を展開する一部の高等学校で教えているかもしれないが)認められていない。したがって大学入学後に初めて微分積分を利用しながら物理学等を学ぶことになる。(筆者は偏微分・重積分を数学ではなく化学の前期の授業で初めて遭遇した。また1年次の経済学の授業でも偏微分の応用を紹介された。) $f(x)$ は直進運動の時刻 x における出発点からの

距離とすれば (1) の右辺における \lim を外した

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

は時刻が a から $a+h$ に変化したときの平均速度なので $h=0$ とすれば時刻 a における瞬間的な速度になると考えるのは妥当であるが $h=0$ を (2) に代入することは分母が 0 になるので不可である. ところが $h \rightarrow 0$ とした極限操作は可能で (2) の極限值が瞬間的な速度を表すことになる. このように微分で実際の現象を定量的に表現できるようになるが直接, 微分係数や導関数を適用するのではなく (2) が何を表しているかを考えることが必要である. 大学の数学の授業では高校学校で習った極限や導関数の復習から始めるが, 目標は入試問題を解くことでなく専門科目を習得に必要な数学の素養を身につけることにある. ところが高等学校と同様に微分係数や導関数を (1) から計算することはなく公式により導関数を計算して, 微分係数についてはさらに $x=a$ を代入することでなされるので (2) の極限であることを意識しなくなり他分野への応用が難しくなる.

図 1 と 2 は微分係数が極限操作である (1) で定義されることを理解させるために作成したもので図 1 の直線の傾きは (2) であるが実際は h の値をもっと 0 に近づけた図も作成して, 直線が図 2 にある接線に近づいていく様子を図を差し替えながらスクリーンに映した. Scilab でのプログラミングでは h をパラメータとして h にさまざまな数値を代入してコンパイルすれば図 1 のような図を何枚でも作成できる.

区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ はリーマン和

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \quad (3)$$

の $n \rightarrow \infty$ のときの極限值 S で定義される. ここで x_i ($i = 0, \dots, n$) と ξ_i ($i = 1, \dots, n$) は $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たすように選ぶ. 図 3 と 4 の面積はそれぞれ $n=5$ と $n=30$ のときのリーマン和である.

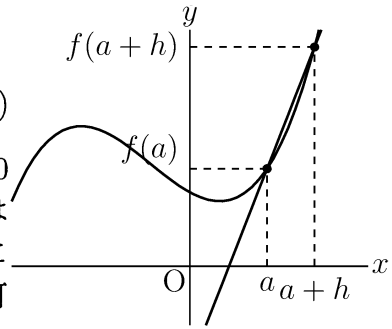


図 1

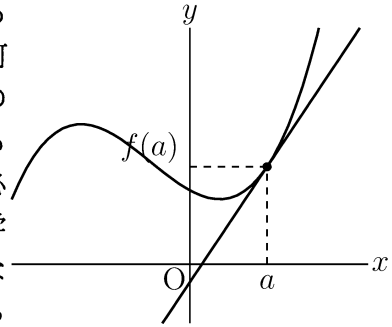


図 2

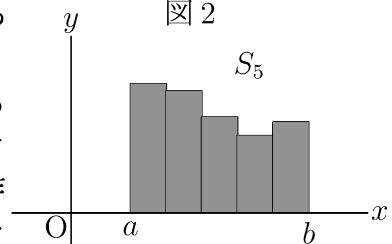


図 3

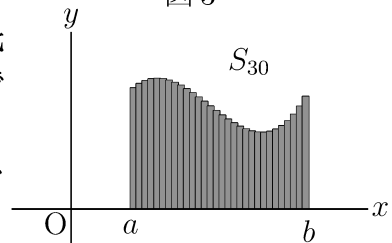


図 4

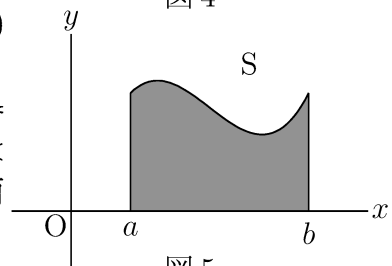


図 5

n を増やしていくと図形は図5に近づいていく様子が確認できる。よって S_n の極限值 S は図5の面積といたいところだが図5の1辺は関数 $f(x)$ のグラフである。そもそも三角形や四角形のような線分で囲まれたような図形でない円のような曲線で囲まれた図形の面積の定義をきちんと成されないまま定積分が面積に等しいかを問うのは nonsense なことである。まずは図5の面積の定義を明確にしなくてはならないが、それは S_n の極限值 S で定義するのであり、その前提として $\{S_n\}$ の収束性を証明する。しかし極限値の計算をしないで数列の収束性のみについての議論は典型的な $\varepsilon - \delta$ 論法であり数学専攻の学生でないと馴染むのは難しい。発表者は積分法の指導を定積分から入り (3) の極限が定積分を定義することを図3~5 (n が $n = 100$ 等の他の数値の図も) を見せながら説明した。その後、微分積分の基本定理より不定積分 (原始関数) から定積分が計算できることを示してから、置換積分や部分積分等の習得のための計算練習をさせた。学生にとって証明を聞くよりは手を動かしながら計算の方が学習意欲が湧くが、定積分は面積だけでなく曲線の長さや仕事やモーメントのような物理量の計算にも応用される。その根拠についてはリーマン和 (3) に基づいて考える必要があるので、図3~5を見せながら講義することにより理解が深まり計算だけでなく応用できるようになることが期待できる。

3 長方形領域上の重積分と累次積分

平面における積分領域

$$D : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

は区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ の分割

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

に応じて D を mn 個の小さい長方形 D_{ij} ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) に分割する。

$$D_{ij} : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$$

各 D_{ij} より点を1つずつとり座標を (ξ_{ij}, η_{ij}) として、2変数関数 $f(x, y)$ に対して

$$V_{n,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad (4)$$

になる。これは2変数関数のリーマン和で n, m を同時に ∞ に発散させると $V_{n,m}$ はある実数 $V_{\infty, \infty} \rightarrow$ 収束し、区間 $[a, b], [c, d]$ の分割や点 (ξ_{ij}, η_{ij}) の選び方と無関係に極限值

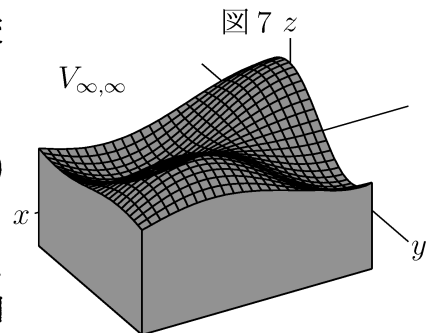
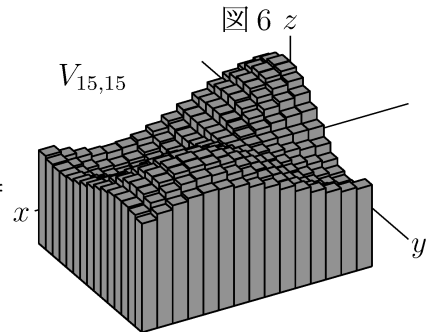
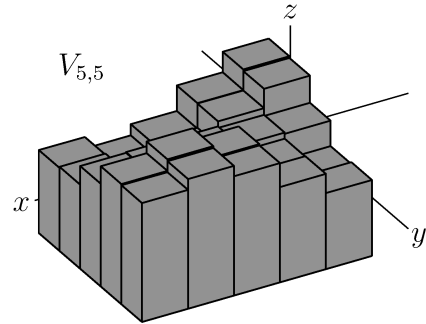


図8

$V_{\infty, \infty}$ は一定の値になることが証明できる.

この $V_{\infty, \infty}$ が領域 D 上の関数 $f(x, y)$ の重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を定義する. 図 6 と 7 は辺の長さが $x_i - x_{i-1}$ と $y_j - y_{j-1}$ の長方形が底面で高さが $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ の直方体を集めた図形で体積は $m = n$ としたリーマン和 $V_{m, m}$ であり図 3 と 4 の 2 変数版といえる. m を発散させると図 8 の図形に近づく様子が分かる. 図 8 は上面が曲面 $z = f(x, y)$ であり体積は (4) の極限で定義する. よって体積は $\iint_D f(x, y) dx dy$ と等しい.

累次積分で重積分を計算するが, 累次積分が重積分に等しくなることの証明中の式が体積になる図も作成した. 体積が $m = n = 5$ とした $V_{m, n}$ の図 6 から y 軸方向の分割だけ細くしていくとリーマン和 (4) の n だけが増えていき図 9 から図 10 に近づいていく. さらに図 10 から x 軸方向の分割を細かくすれば図 11 を体積が重積分である図 8 に近づく. 発表者は累次積分を説明するときに図 6~11 と分割数 m, n を変えた図も作り図 10 や図 6 に近づいていく様子をスクリーンで見せた. $\lim_{m \rightarrow \infty} V_{n, m} = V_{n, \infty}$ と書けば図 13 および 14 の体積を表す. $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = (\xi_i, \eta_j)$ にすればリーマン和は

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1})$$

に変形でき $\sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1})$ は $f(\xi_i, y)$ のリーマン

和なので $m \rightarrow \infty$ とすれば定積分 $\int_c^d f(\xi_i, y) dy$ に収束するので図 10 と 11 の体積は

$$V_{n, \infty} = \sum_{i=1}^n \int_c^d f(\xi_i, y) dy (x_i - x_{i-1}) \quad (5)$$

で表す. この右辺は変数 x の関数 $\int_c^d f(x, y) dy$ の

リーマン和であるから $n \rightarrow \infty$ にすれば累次積分 $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ に収束するが,

それが重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ に等しいことを図 10, 11 が体積が重積分に等しい図 8 に近づく様子を見れば感覚的に肯ける.

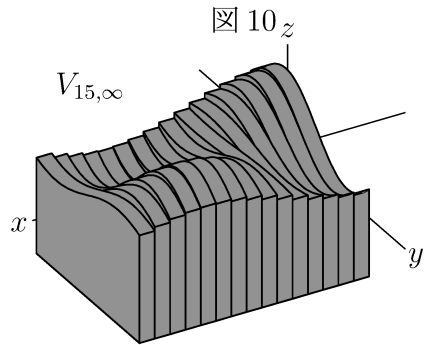
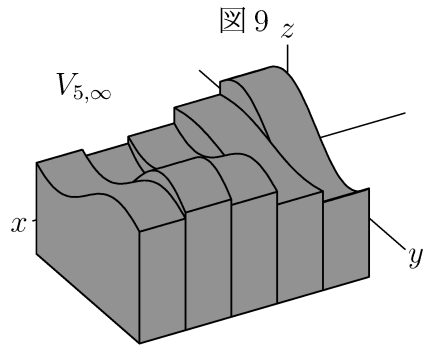
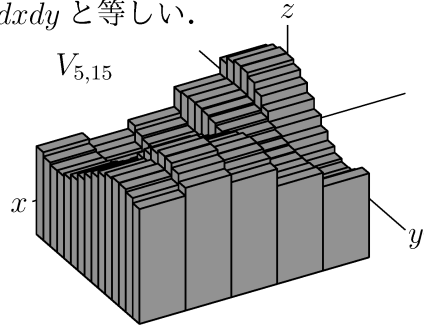


図 11

4 一般領域上の重積分と累次積分

D が長方形でなければ D を含むような長方形を選び図 12, 13 のように長方形を小さい長方形に分割して, D に含まれる小さい長方形だけを集め D_1, \dots, D_N のように番号を付ける. プログラミングでは D が凸なので長方形の 4 個の頂点が D を定義する不等式を満たすことを条件とした. D_1, \dots, D_N を併せても境界線の近くに隙間があり D と一致しないが図 12 と 13 を見比べれば長方形の分割を細かくすれば隙間は狭くなっていくことが分かる. 各 D_i から点を 1 つずつ選び座標を (ξ_i, η_i) として底面が D_i で高さが $f(\xi_i, \eta_i)$ の直方体を並べた図形は図 14 と 15 である. このとき体積は

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i) \times (D_i \text{の面積}) \quad (6)$$

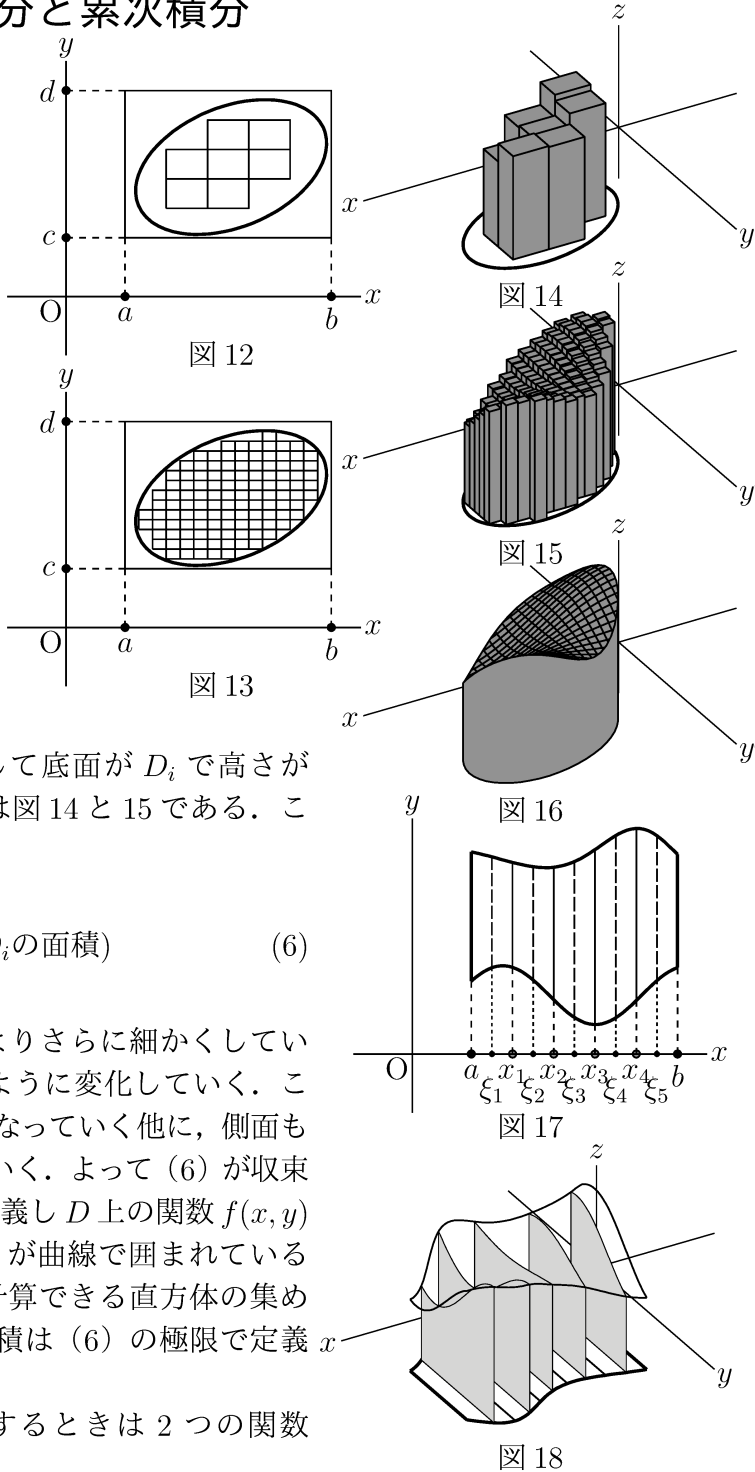
で表される. D の分割を図 13 よりさらに細かくしていくと図 15 を経て図 16 に近づくように変化していく. このとき上面が曲面 $z = f(x, y)$ になっていく他に, 側面も底面が D の柱形の側面になっていく. よって (6) が収束して図 16 の体積をその極限で定義し D 上の関数 $f(x, y)$ の重積分とする. このように D が曲線で囲まれている図 16 のような図形でも体積が計算できる直方体の集めた図形で近づけることができ体積は (6) の極限で定義され, それが重積分である.

累次積分で重積分の計算をするときは 2 つの関数 $\varphi(x), \psi(x)$ を使い D を

$$D : a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)$$

で定義し直す. 区間 $[a, b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



に分割して, ξ_j を $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$ を満たすように選ぶ. 図 17 のように y 軸に平行な直線 $x = x_i$ で D を n 個の細い領域に分割する. 立体図形

$$a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), 0 \leq z \leq f(x, y)$$

に対して平面 $x = \xi_i$ による切断面を S_i と書く. 図 18 は S_1, \dots, S_n を並べた図であり, 図 20 は側面が S_i で幅が $x_i - x_{i-1}$ の厚みを付けた薄い柱形を並べたものである.

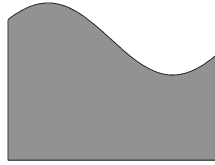


図 19

1つ1つの側面は図 19 のような

形状で上の曲線は y の範囲が $\psi(\xi_i) \leq y \leq \varphi(\xi_i)$ の関数 $f(\xi_i, y)$ のグラフなので側面積は定積分 $\int_{\psi(\xi_i)}^{\varphi(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy$ になる.

区間 $[a, b]$ に対して

$$F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

とすれば S_i の面積は $F(\xi_i)$ であり図 20 の体積は

$$\sum_{i=1}^n F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で $F(x)$ のリーマン和になる. 区間 $[a, b]$ の分割を細かくすれば図 20 は図 21 を経て図 22 に近づくので (7) の極限である定積分 $\int_a^b F(x) dx$ は図 22 の体積であるが, それは D 上の $f(x, y)$ の重積分に等しい. 以上により一般領域における累次積分の公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

を得る. 図 22 の切断面は図 19 になり, 累次積分の説明に利用することはよく見かけるが, 図 20 のような厚みがある図形を並べる図を示すことにより y で積分した後のリーマン和 (7) の極限が累次積分で, 図 22 の体積に等しいことを理解させやすくなる.

5 変数変換

2つの2変数関数 $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ に対して座標が (u, v) の平面上の領域 \tilde{D} を

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$$

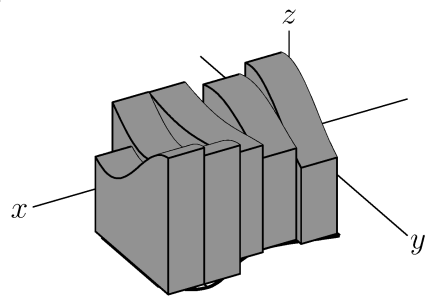


図 20

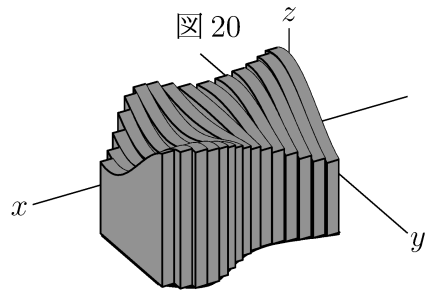


図 21

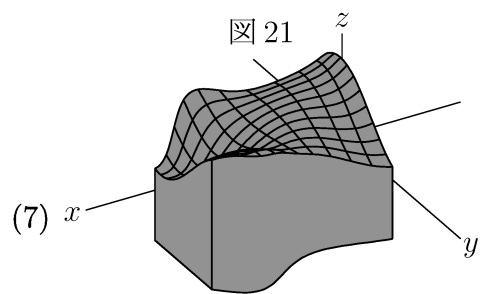


図 22

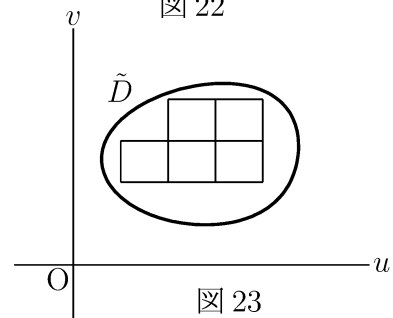


図 23

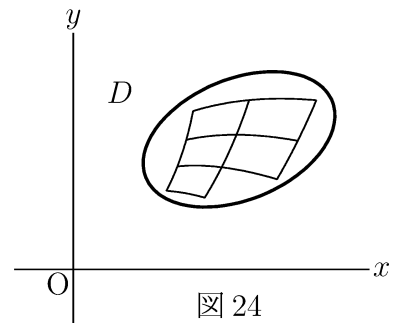


図 24

で定まる (x, y) が D の点の座標になるようにする. D 上の関数 $f(x, y)$ の変数を u, v に変換した $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は領域 \tilde{D} 上の関数である.

先ず図 14 のように \tilde{D} を u 軸と v 軸に平行な直線で分割する (図 23). φ, ψ によって x 軸または y 軸に平行な直線は曲線に移り \tilde{D} の分割に対応して D は曲線で分割される (図 24). D と \tilde{D} の分割後の小さい領域を番号付けし D_1, \dots, D_N および $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_N$ と書き φ, ψ で D_i と \tilde{D}_i を対応させる. D_i から点を 1 つずつ選び座標を (ξ_i, η_i) と書き, 底面が D_i で高さが $f(\xi_i, \eta_i)$ である柱状の立体図形を集めると図 25 になる. 体積は (6) で表せ, D の曲線による分割を細かくすれば図 25 は図 26 を経て図 16 に近づいていく. よって D_i を曲線で囲まれた図形にしても (6) の極限は重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ である.

ところが D_i は曲線で囲まれているので正確に面積を計算することは難しい. そこで D_i に形状が近く面積の計算が容易な領域に置き換える. D_i の 4 個の頂点のうち 3 個の頂点を共有する平行四辺形を \hat{D}_i (図 27) とする. D_i を \hat{D}_i に置き換えると図 25 と 26 はそれぞれ図 28 と 29 になる. 体積は (6) において D_i の面積を \hat{D}_i に換えた

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i) \times (\hat{D}_i \text{ の面積}) \quad (8)$$

である. D の分割を細かくしていけば図 28 は図 29 を経て図 16 に近づく様子が分かるが, 図 27 のように底辺を平行四辺形に置き換えたことによる柱形間の隙間は図 28 と 29 を見て分かるように分割を細かくすればなくなっていく, (6) と (8) は同じ極限值になっていく. これを証明することは煩雑な評価が必要となり数学専攻でない学生への指導は難しいが, 証明ぬきでも図 25, 26 と図 28, 29 を比較させながらを見せることで平行四辺形に置き換えた (8) でも極限は重積分を定義することを理解できる.

\hat{D}_i は平行四辺形であるから 3 個の頂点の座標から面積を求め, 長方形 \tilde{D}_i の面積との比を計算すれば重積分の変数変換に登場するヤコビアン公式を得ることができる.

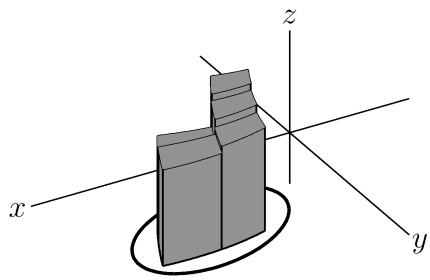


図 25

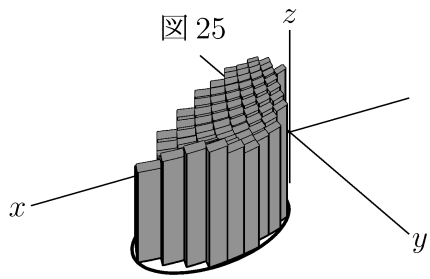


図 26

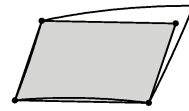


図 27

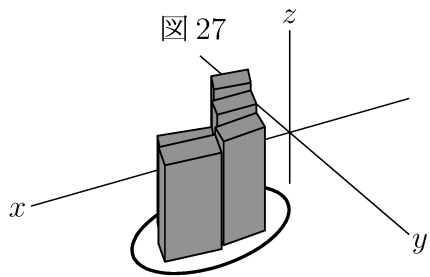


図 28

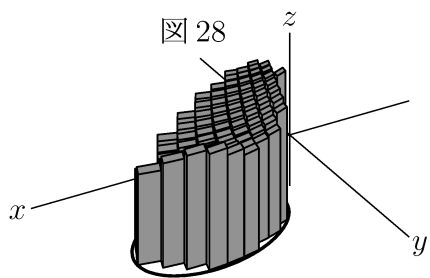
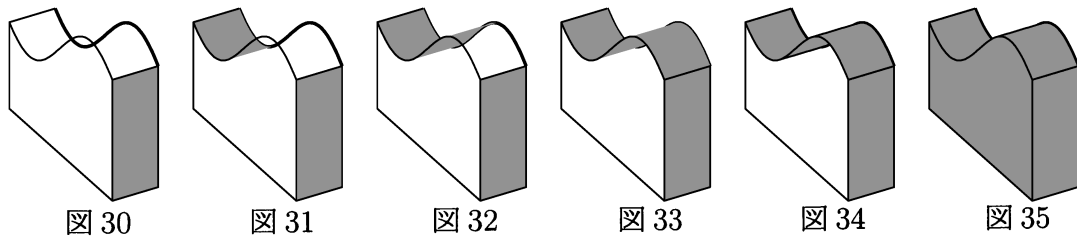


図 29

6 K_ETpicによる作図

本論に掲載されている図はすべて K_ETpic によるものがある。平面図はそれほど問題は発生しなかったが、重積分等での指導で作成した 3次元空間における曲面の図は K_ETpic のコンセプトを理解しないと思通りの図は描けないと思う。数式処理ソフトは方向の角度を指定すれば 3次元空間の曲面を平面に映すことができるが K_ETpic では 3次元の図データを Projpara によって 2次元のデータに変換するコマンドがあり数式処理ソフトウェアによる画像作成に慣れたユーザーにとって戸惑うかもしれない。発表者は作りたい図を実現するコマンドがあるか [4] やインターネットから入手したマニュアルから探すことを続けたが、例えば図 16 や 22 の上面は 2変数のグラフであるが曲面らしさを表すワイヤフレームについては底辺が長方形でないので Wireparadata は使えず、自前で曲面上の曲線を設定した。図 16 では積分領域 D は凸なので曲面上の曲線の x または y の区間の端点は D を定める不等式より求めることができるので比較的易しい。図 22 では図 17 を見て分かるよう D は凸ではないので図 16 のような方法は難しいので x 軸に平行な線分の代わりに $\varphi(x)$ から $\psi(x)$ に連続的に変化する関数のグラフとした。 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ の差はあまり大きく変化しないので幸いにワイヤフレームは不自然にならなかった。 Wireparadata は長方形領域で使えるが一般領域で自動的にワイヤフレームを描けるコマンドが欲しいが、領域を定める不等式の入力方法が難しそうである。



累次積分の説明で利用する図 10, 11, 20, 21 は上が曲面なので色 (Shade) 付けするが、色を塗る範囲を定めるために K_ETpic 特有の機能で輪郭線のデータを出力する Sfbdparadata が必要になる。ところが輪郭線は複数になり規則性が掴みにくい。曲面は $z = f(\xi_i, y)$ で区間 $[a, b]$ の分割数だけの個数があり輪郭線の本数は一様ではない。分割数 n を増やしていくので、関数や分割数をパラメータにして関数を自由に設定できるプログラムが望ましいが発表者は上の順番で図を作成するプログラミングを行った。図 30 から 33 までの間については実際は 10 段階ある。図 34 では輪郭線、35 では側面を追加して完成した。輪郭線は色塗りには利用せず、見えない輪郭線は図 35 のように側面の色付けで隠れてしまうので図 11 や 24 を見る限りでは x 軸方向の分割数を増やしても問題はない。しかし、パラメータ付きの曲面でパラメータの値に拘わらず一律な方法で色付けできる一般的な方法については今後の課題である。

7 今後の展望

今回の研究集会では重積分に関する教材についてのみ話したが、他の担当科目でも教材を $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で作成した。ベクトル解析も担当しているが発散や回転、および線積分や面積分の計算はできても意味を理解させることは難しいので教材の必要性を強く感じているが未だ発展途上である。また数学教職免許取得に必要な幾何学系科目も担当しているが昔から有名な曲線の図も $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で作成している。発表者は $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ の経験が浅く未だ初心者であるが、本研究集会における $\text{C}\text{A}\text{S}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 応用研究会メンバーの発表を聞くと、[4] からかなり開発が進んでいるので、自分なりに活用方法を検討したいと思う。

8 謝辞

今回の研究集会での発表を薦めて頂いた北原清志先生と講演に関する助言を頂いた熊ノ郷直人先生、また研究集会での発表を認めて頂いた中村泰之先生と金子真隆先生に対しまして感謝の意を表します。また本論文は北原先生に教えて頂いた $\text{k}\text{e}\text{t}\text{layer}$ で作成しました。図の配置を微妙に調整することができ、非常に助かりました。このことについても北原先生を始め $\text{C}\text{A}\text{S}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 応用研究会の先生方に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 長谷川研二「コンピュータグラフィックによる数学系科目の授業方法」工学院大学教職課程学芸員課程年報 第16号 pp.12–17, 2014年5月
- [2] 長谷川研二「 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ による数学教材の作成」工学院大学教職課程学芸員課程年報 第17号 pp.123–130, 2015年2月
- [3] 長谷川研二 他『理工系のための微分積分』培風館, 2016年4月(予定)
- [4] $\text{C}\text{A}\text{S}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 応用研究会『 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$ で楽々 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ グラフ』イーテキスト研究所, 2011年3月
- [5] 奥村晴彦, 黒木雄介『 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ 美文書作成入門(第6版)』技術評論社, 2013年11月
- [6] 占部実 他『理工科系一般教育 微分・積分教科書』共立出版, 1965年2月