

# K<sub>ε</sub>T<sub>C</sub>indy による T<sub>E</sub>X 上のアニメーション生成と その教育利用

東邦大学・薬学部 金子 真隆 (Masataka Kaneko)

Faculty of Pharmaceutical Science,  
Toho University

東邦大学・理学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Faculty of Science,  
Toho University

## 1 はじめに

高等数学教育においては、複雑な数式を高品質で出力できる機能をもつ T<sub>E</sub>X が教材編集手段の主力となる中で、数式処理システム (CAS) などが出力する高品質なグラフィックスをいかに統合的に取り込むか、ということが潜在的に大きな課題であった。この点で、T<sub>E</sub>X 挿図用 CAS マクロパッケージとして開発された K<sub>ε</sub>T<sub>P</sub>ic[1] はひとつの解答を与えるものだったと考えられる。特に紙媒体における静止画については、T<sub>E</sub>X 描画の精細さをフルに引き出している K<sub>ε</sub>T<sub>P</sub>ic の描画が、大きな力をもつと考えられてきたが、それにとどまらず、CAS などが得意とする動画についても、スライド用パッケージと併用することにより「パラパラ漫画」のような形で見せることが可能であった。CAS でスライダーを用いたり、あるいは動的幾何ソフト (DGS) を用いたりする場合と比べると、柔軟性にやや劣ることは否めないが、情報量を必要最小限にとどめると同時に、T<sub>E</sub>X の本文と同質の数式表現と両立できることで、CAS や DGS にはない教育効果を持ちうると思われた [2]。ただひとつの難点は、K<sub>ε</sub>T<sub>P</sub>ic でこうした動画的な図を作成するために必要とされる労力がかなり大きかったことだと言える。このため、最近 K<sub>ε</sub>T<sub>P</sub>ic と DGS (Cinderella) との連携ソフトとして開発が始まった K<sub>ε</sub>T<sub>C</sub>indy[3][4] の機能を利用することにより、はるかに手軽に上記と同等の T<sub>E</sub>X 上の動画を生成するためのパッケージを作成した。本稿では、このパッケージのおおまかな使い方を示した上で、数少ないながら実際の教授場面で使ってみた事例を紹介してみたい。

## 2 K<sub>ε</sub>T<sub>C</sub>indy による T<sub>E</sub>X 上のアニメーション生成

周知のように、T<sub>E</sub>X を用いてその最終出力である PDF 文書中にアニメーションを生成させる場合は、その各コマに相当する静止画の T<sub>E</sub>X ソースファイルを予め生成しておき、“animate” パッケージを用いてまとめてコンパイルすることが基本である。上述の通り、このプロセスには少なからぬ負担を伴う。

たとえば  $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$  を用いた場合、その基本的な描画サイクルは図1の通りだが、まず I, II のステップで CAS のループプログラムなどを用い、パラメータ値などを少しずつ変えながらコマ数の分だけ描画データを発生させると同時に、やはりコマ数分の図ファイルを書き出す必要がある。さらに、そうして生成された多数の図ファイルを適切に管理した上で、III のステップで  $\text{T}\epsilon\text{X}$  文書のソースファイルに `animate` パッケージと整合的な形で `input` しなくてはならないが、一般的なユーザーにとって、この部分を  $\text{T}\epsilon\text{X}$  のプログラミングによって効率よく行うのは非常に困難である。

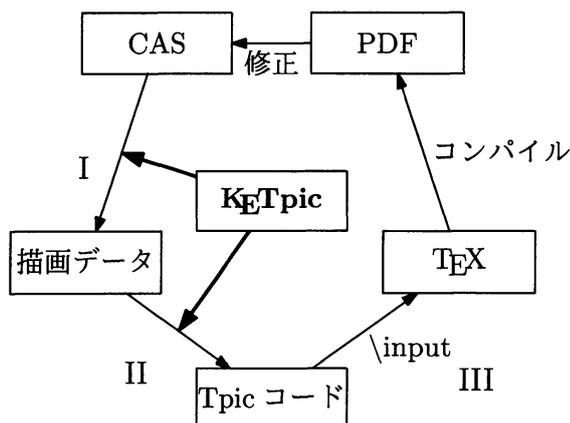


図1  $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$  による描画手続き

さらに問題なのは、各コマの静止画であれば CAS のビューアでなんとか事前チェックができるものの、コマ送りの時間も含めた完成イメージについては、最終的な PDF 出力を得るまで目にすることができず、そこで問題が見つかった場合、最初からすべての作業をやり直さなくてはならなくなるという事態も稀ではなくて、実際に使う際の大きなネックになっていたと考えられる。

元来、図形の動的な提示については、DGS が最も得意とするところであるが、 $\text{K}\epsilon\text{T}\text{Cindy}$  は図2に示すように代表的な DGS のひとつである Cinderella における描画プロセスを  $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$  の描画コードに変換するパッケージであるため、アニメーションを含めた動画についても、Cinderella の描画面上で出来上がりの動画像の様子を確認した上でそのイメージをそのまま  $\text{T}\epsilon\text{X}$  上の動画に移行させるという形によって、 $\text{K}\epsilon\text{Tpic}$  を起点として描画する場合と比べ、より効率的に描画できる可能性が想定された。特に Cinderella の場合には、独自のスクリプト言語 Cindyscript を装備しており、ファイルの書き出しを出力先のソフトウェアの仕様にあわせて柔軟に行えるという特色があって、 $\text{T}\epsilon\text{X}$  上の動画を生成するためのパッケージを開発する上で、非常にやりやすい環境が整っていたと考えられる。

パッケージを作成する過程ではスタイルの変遷がいくつかあったが、開発が一段落した現段階では、図2における  $\text{K}\epsilon\text{T}\text{Cindy}$  のライブラリの一部として、 $\text{T}\epsilon\text{X}$  上のアニメーションの生成機能が提供されている。

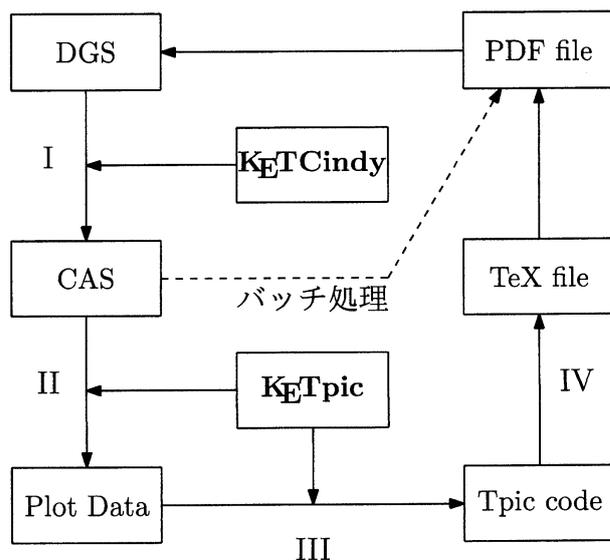


図2 K<sub>E</sub>T<sub>C</sub>indyによる描画手続き

図2の流れに従って $\text{T}_E\text{X}$ 上の静止画を生成する方法については本講究録に紹介される予定[4]なのでそちらに譲るが、それと対照しながら動画生成の場合の手続きを示すと以下の通りである。説明の便宜上、図3のようなepicycloidとよばれる曲線の動画像を生成させるケースを例にとることとする。なお、PDF上のアニメーションはAcrobat系のソフトでのみサポートされているので、図3もPDFファイルをAcrobat Readerなどで開いて図の部分をクリックすると動画として見ることができる。

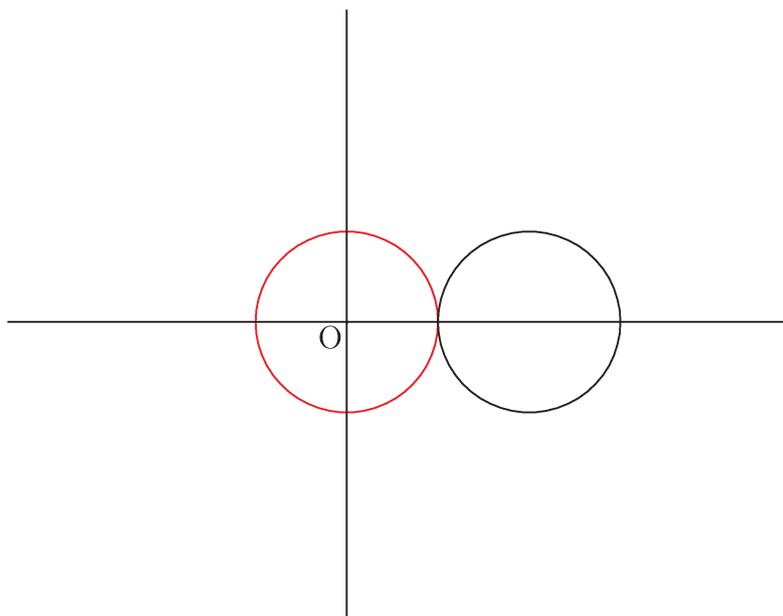


図3  $\text{T}_E\text{X}$ 上に生成されたアニメーション

図2の中のI, II, III, IVのプロセスを行うための Cinderella 上の画面を図4に示す。

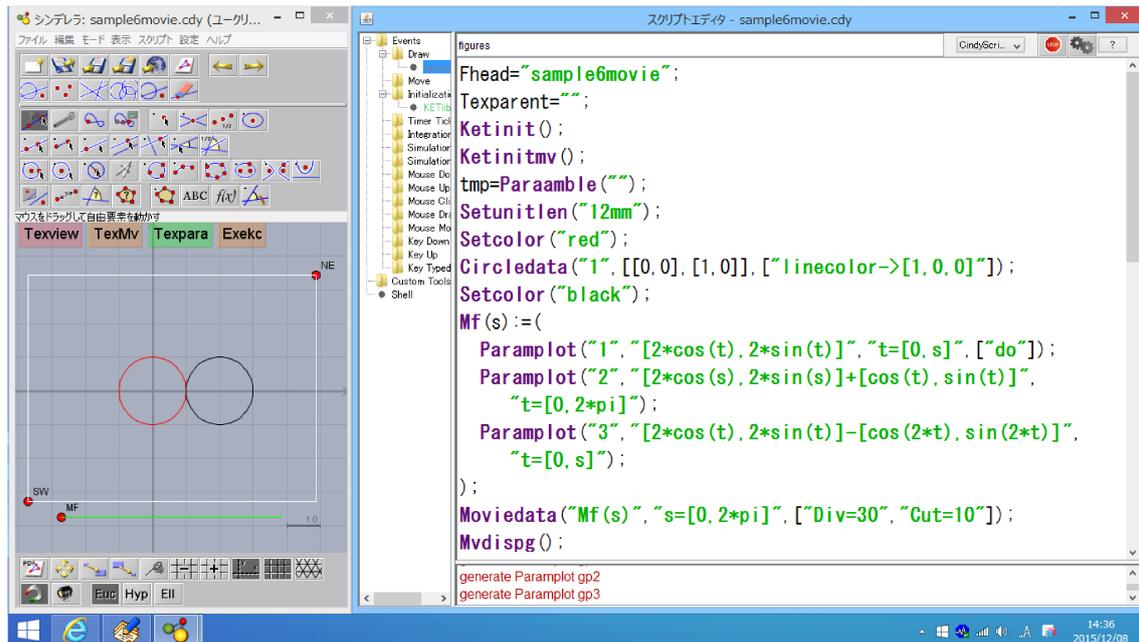


図4 Cinderella の描画面と Cindyscript

具体的な手順は以下の通りである。

1. 静止画の場合も同様であるが、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  への書き出しに関する指定はすべて Cindyscript 上で行う。まず、動画専用のバッチ (Windows の場合、Mac であればシェル) を KETlib スロットで指定する。
2. 描画する図形・グラフなどのスクリプトを Cindyscript の figure スロットに入力する。入力は初期化コマンド  $\text{Ketinitmv}()$ ; とディスプレイ表示コマンド  $\text{Mvdispg}()$ ; の間に行う。
3. 図4の右半分が図3を生成するためのスクリプト入力例であるが、 $s$  が各コマを指定するパラメータを表し、 $\text{Mf}(s):=()$ ; の部分で  $s$  の変化に伴って変動していく要素を記述する。図3の場合であれば、中心の円のまわりを回転していく円やその中心の軌跡、さらに結果として出てくる epicycloid の記述がこれに相当する。
4.  $s$  が変化しても変動しない要素 (図3の場合であれば中心に位置している円が相当する) については、 $\text{Mf}(s):=()$ ; の手前の部分に記述することが望ましい。 $\text{Mf}(s):=()$ ; の部分に記述しても最終的な PDF における出力は変わらないが、途中段階の処理が著しく非効率になるリスクがある。
5.  $\text{Moviedata}(\text{"Mf}(s)", \text{"s=[A,B]"}, [\text{"Div=C"}, \text{"Cut=D"}]);$  というコマンドにより、4. で定義した固定要素に加え、変域  $[A, B]$  を  $C$  等分するパラメータ値  $s$  を変動要素  $\text{Mf}(s)$  に代入して得られる図形の描画が準備される。3番目の引数はオプションで、 $C$  で変域の分割数を、 $D$  で1秒間に見せるコマの数を指定する。見ての通り、 $s$  の値を次々にとりかえて各コマの描画を行うためのループプログラムや、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の `animate` パッケージに適合させるためのコマンドの処理などは、ユーザーが一切行わずとも自動で行えるようにライブラリが組み立てられている。
6.  $\text{Mvdispg}()$ ; というコマンドにより、5. で準備された図形要素が図4左側の Cin-

derella の描画面に描かれる．それと同時に，図の下側にある緑色の線分に示される「スライダー」が自動的に生成され，両端がそれぞれ A, B に対応する．線分上の赤い点を動かすと  $s$  の値が変化し，それに伴って描画面上の図形も動いていくことになる．したがって，この段階で描画範囲などの調整を行うことができる．

7. 以上，Cindyscript 上での入力を終えた後，図 2 に示される CAS ファイルの書き出し (プロセス I) やその後のバッチ処理 (点線で示された部分) は，すべて Cinderella の描画面の上方にあるボタンの押下により行う．たとえば Texview ボタンを押すと，スライダー上の点で指定されるパラメータ  $s$  の値に対応する静止画を出力させるための CAS ファイルが生成される．さらに Execlc ボタンを押すとバッチ処理が自動的に実行され，最終の PDF 出力が得られることになる．これに対し動画生成の場合には，Texview ボタンのかわりにまず TexMv ボタンを押す．すると，PC の内部時計と連携して，スライダーとは全く無関係に，生成されるすべてのコマを指定したコマ数で再現する動画が Cinderella の描画面上に再現され，この段階で最終出力の「下見」を行える．最終のバッチ処理は，上と同様に Execlc ボタンにより，動画出力を含んだ PDF ファイルが自動的に立ち上がる．

以上のように，従前の方法と比べ，ユーザーがコマンドを入力する際の負荷が大幅に軽減されている上に，生成されるファイル群もより管理しやすい形がとられている．具体的には，図 2 のステップ I で生成される CAS ファイルを 1 つだけにまとめたほか，ステップ III で出力される図ファイルについても，すべてのコマに関する描画情報と animate パッケージに適合するコマンドラインとをあわせて 1 つのファイルにまとめる形をとっている．結果的に，ステップ IV では出力された図ファイルを input するだけの簡単な手続きで済むことになる．たとえば図 5 において，グラフを含む増減表の部分は静止画出力として得られているもので，ここに指示線の動画ファイルを重ねて input しただけである．

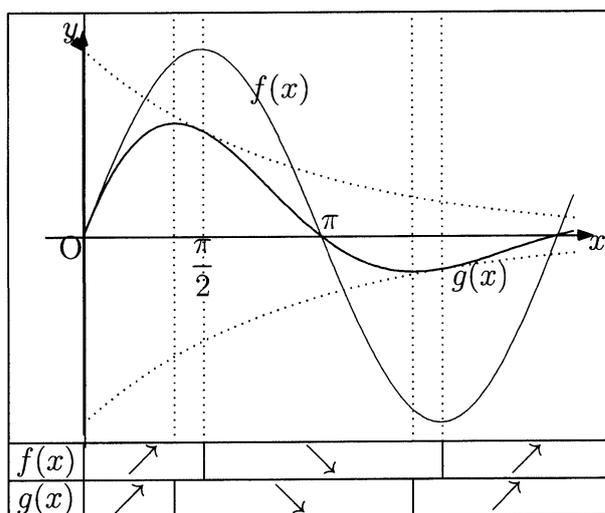


図 5 静止画出力との併用

また、外部のソフトウェアで計算された各コマの描画データをテキストファイルに記述してあれば、それを読み込んで Cinderella の描画面と  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  の両方における動画出力へと結びつけることもできる。図6は Whitney の楔とよばれる種類の写像の特異点が解消されていく様子を動画で表したものであるが、描画データ自体は Cinderella でなく、Scilab に計算させている。

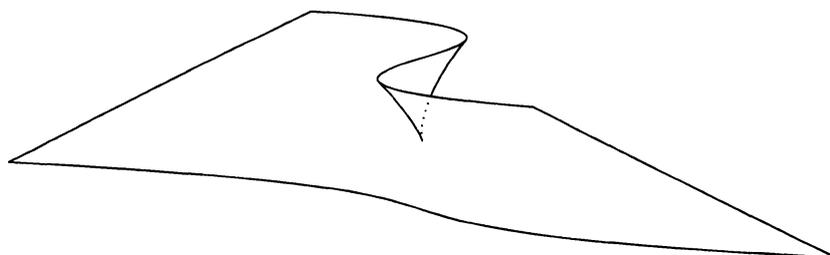


図6 外部ソフトの描画出力の読み込みによるアニメーション

さらに、Cinderella に装備されている Interactive な描画機能と連携することにより、パラメータ表示などをスクリプトに記述するのが難しい図形の動画についても、手軽に出力できる。例えば、図7はオイラー線を説明するために  $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{Cindy}$  のアニメーション生成機能を使って作ったものであるが、図8の左側に見られる通り、Cinderella の描画面でまず関連の作図を行った後、図8の右側にある通り、描画面中のすべての線分を出力させる  $\text{Mksegments}()$ ; というコマンドを使うだけで描画できてしまっている。スクリプトからわかる通り、頂点 A のパラメータ表示が比較的複雑なので、三角形の外心や垂心の座標をパラメータ  $s$  の関数として表示するのは非常に手間がかかる。しかしここでは、そうした表示を一切行うことなく、手軽に動画を作れている。そもそも DGS の最大の特徴のひとつは、作図手順を記憶できる機能を活用して Interactive な図形の操作が可能なことであるが、この例は、 $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{Cindy}$  のアニメーション作成パッケージによって、そうした DGS の特徴をうまくとりこめる可能性を示している。

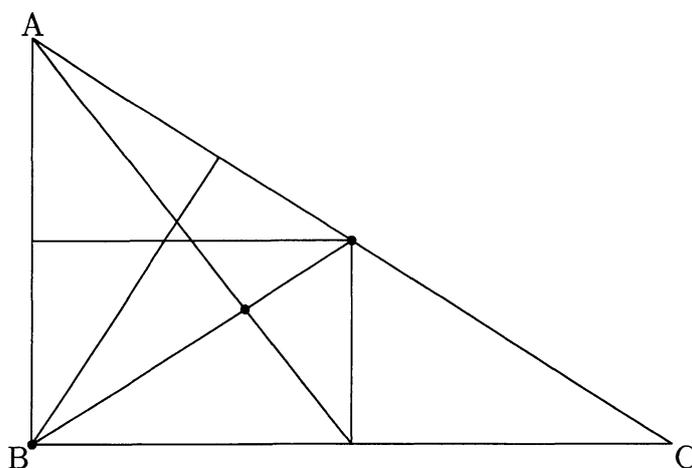


図7 Cinderella の Interactive な描画機能との連携

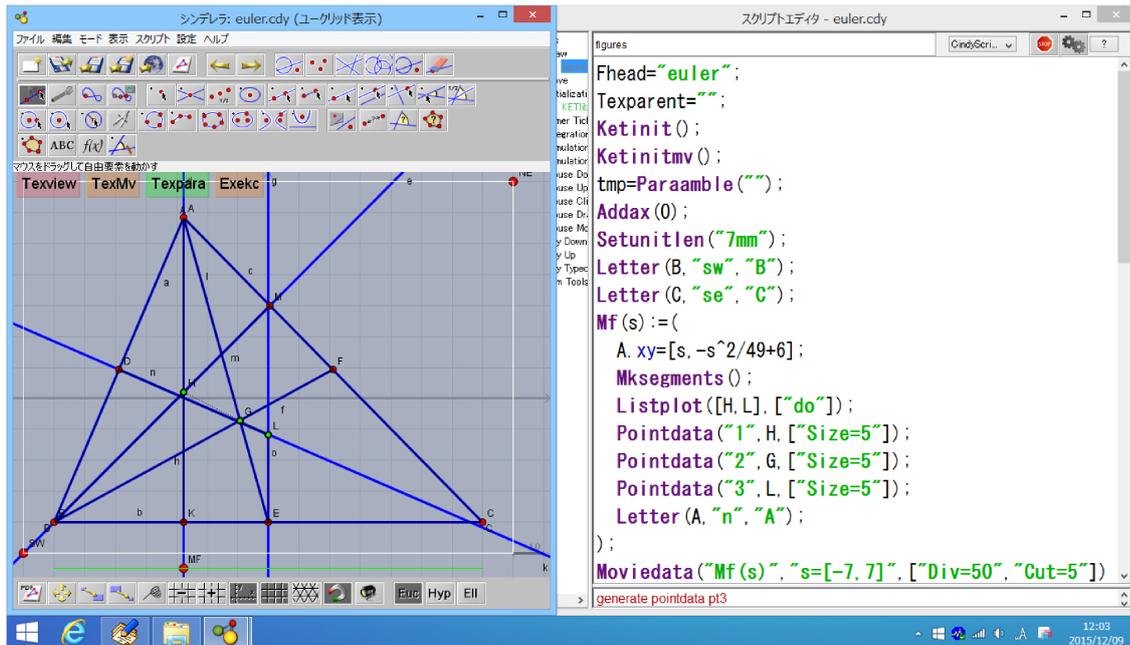


図8 Interactiveな描画の場合のスク립ト

ただしこの事例は、アニメーションによる提示の弱点も同時に示している。確かに三角形の形を変えながら重心・外心・垂心の位置関係を動画によって示すことで、これら3点がつねに一直線上にあることを視覚的に理解する上では役立つが、各時点で3つの点それぞれどこにあるのか確認したり、3点が一直線上にある理由を考えたり、という目的に対しては、「画像が動いていってしまう」ことが仇となり、必ずしも助けとならないことが容易に見取れる。このような目的には、ところどころ必要に応じて画像を止めて見ることができ、従来  $K_{\text{E}}\text{Tpic}$  で生成されていたような「パラパラ漫画」の方が適していることは想像に難くない。実は  $K_{\text{E}}\text{Tcindy}$  の動画生成パッケージの中には、そのような「パラパラ漫画」をやはり自動的に生成する機能も装備されているが、使い方が若干複雑なので、本稿では割愛することにする。

このように、 $K_{\text{E}}\text{Tcindy}$  によるアニメーションは、いわば「作ったら終い」となるという点で、一般的な DGS に装備されているスライダーやアニメーションと比べると、柔軟性 (Interactivity) が劣る面が否めない。その中であえて存在価値を見出すとすれば、次の2点に集約されると考えられる。

1.  $K_{\text{E}}\text{Tpic}$  の利点は、高精細なグラフィックスが  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の高品質な数式表現と近接した位置に配置され、場合によってはグラフィックスの内部にそれ以外の部分と同質の数式表現が埋め込まれることによって、学習者の立場からみたときに、それぞれから得られる情報をきちんと対応付けて受容しやすいことだと考えられる。 $K_{\text{E}}\text{Tcindy}$  のアニメーションパッケージを用いれば、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  と同質の数式表現を動的に埋め込むことも可能である。
2. DGS を用いれば、紙媒体では望めないような Interactive な提示が可能であるだけに、学習者に対するより大きなインパクトが期待されるが、その一方で、提示したその場限りのものに終わってしまう危険性をはらんでいる。ファイルを配付す

るなどして学習者自らに操作させる可能性も当然考えられるが、そのためには学習者が自身のPCに必要なソフトウェアをインストールした上で、その正しい使い方をマスターすることが前提となる。しかし、ソフトウェアの機能が拡充されればされるほど、本来の目的である数学的な概念の学習以前に、ソフトウェアの操作への習熟に時間をとられてしまうリスクが上昇するという矛盾をかかえている。KEJCindyのアニメーションの場合には、最終出力がPDF形式となるので、ほとんどのPCにデフォルトでインストールされているAcrobat系のPDFリーダーを用いて、ほとんど何の負担もなく好きな時に好きなだけ動画を見ることができる。

次節では、以上の点も踏まえながら、KEJCindyによって生成されたアニメーションを実際に授業で用いてみた事例を示し、その可能性と問題点について考えてみたい。

### 3 教育利用の事例

#### 3.1 関数の2階微分とグラフの凹凸

筆者の所属する学部に入學してくる学生については、高等学校段階で数学IIIを履修していることを前提とはできないため、少人数を対象としたリメディアル教育の一環として取り上げたテーマの1つである。いうまでもなく、このテーマにおける最大のポイントは、関数 $y = f(x)$ について

$$y'' \text{ の符号} \quad \Leftrightarrow \quad y' \text{ の増減} \quad \Leftrightarrow \quad \text{グラフの凹凸}$$

という三者の関係を的確に理解することであるが、前半では符号の判断という数量的な扱いが中心となるのに対し、後半では接線の傾きの変化とグラフの凹凸を結び付けるという図形的な扱いが中心で、これらを統合的にとらえなくてはならない点で、学習者にとってはハードルの高いテーマだと考えられる。特に後半の部分では、 $x$ の増加に伴って接線の傾きがどのように変化していくか、ということを考えなくてはならず、紙媒体による静的な提示だけでは、接線が動いていく様子を学習者自身が想像しなくてはならない状況になって十分な効果が期待しづらいところがある。とりわけ、接線の傾きの増減が曲線の凹凸を決定するというポイントをそうした想像のみによって理解することは、初学者にとって厳しいものがあるはずである。そこで筆者は、図9に示すような関数のグラフと増減表とを一体的に表示する印刷教材を配付すると同時に、同じ内容に接線が動いていくアニメーションを付け加えた形の画像をプロジェクタで提示することを試みた。詳細は省くが、授業の流れとしては、まず $y''$ の計算によりその符号を決定して増減表中に記入させた後、PCを使って正確に描いたグラフという位置づけでプロジェクターに図8を提示し、その場で何回か接線が動いていくアニメーションを見せた上で、 $y''$ の符号と接線の動き方との関係を観察させるという手順をとった。

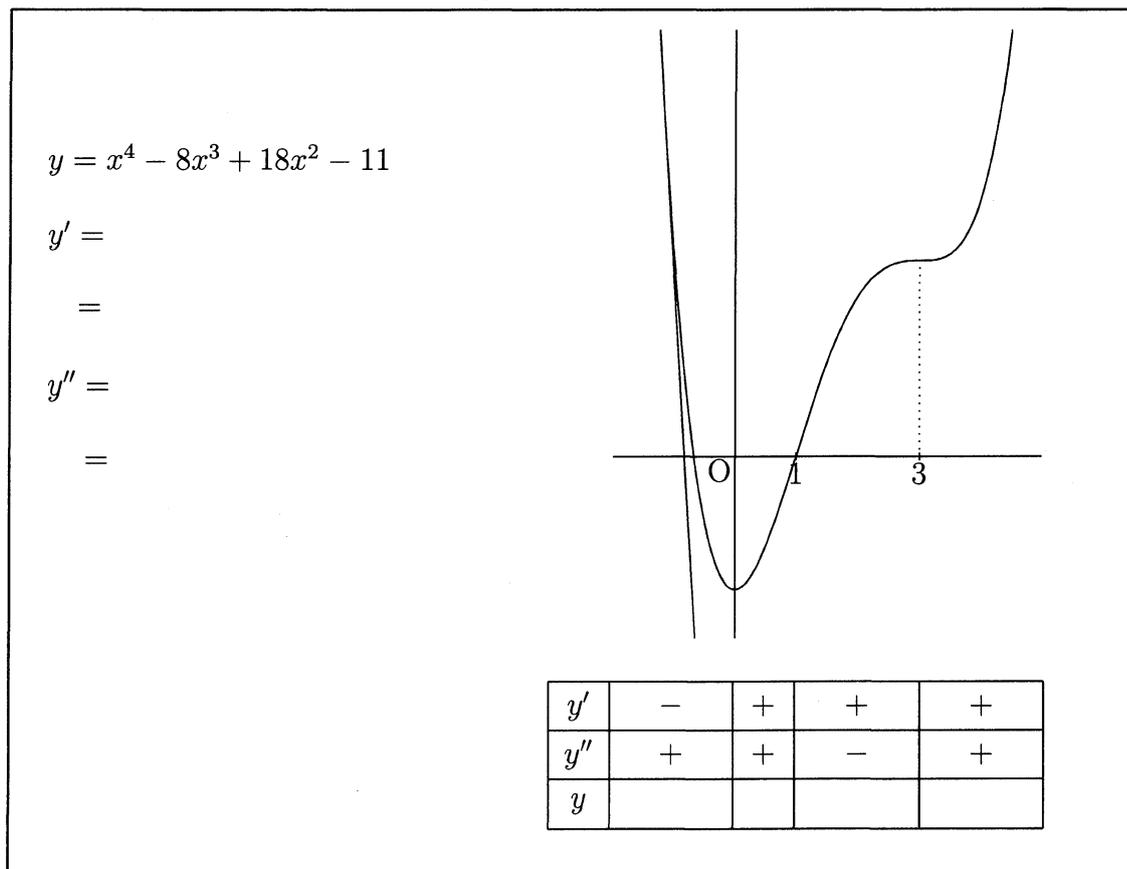


図9 接線の動きを見せるための提示教材

それほど多くの人数を対象とした授業ではなかったため、教育効果を客観的に評価することは難しいが、以上の提示が対象学生の認知に強く働きかけたことが、提示を見た際の発語とジェスチャーから鮮明に確認された。実際こうした場合、 $x \leq 1$ ,  $3 \leq x$ の範囲では $y'$ が増加傾向にあるため曲線は下に凸、 $1 \leq x \leq 3$ の範囲では $y'$ が減少傾向にあるため曲線は上に凸という説明をするのが一般的であるが、このような説明では、関数の増減という数量的な記述と曲線の形状という図形的な性質との対応付けが間接的になってしまう。これに対し本授業の対象学生は、アニメーションによる提示を見た直後、前者の範囲では接線が「反時計回り」に、後者の範囲では接線が「時計回り」に動いているという発語をし、同時に手のジェスチャーで凹凸を含む曲線の概形を示して見せた。アニメーションの画像を実際に見てみると容易にわかる通り、接線が動いていく様子を動的に見せてしまうことで、 $y''$ の符号に応じた接線の動きの違いが一目にしてわかり、なおかつその違いが曲線の凹凸の差に反映されていることがより直接的に理解されたものと考えられる。

以上のようにこの例では、異なった種類の推論プロセスを統合することが求められる点で学習コンテキストが複雑だったものの、統合の主役となる接線の動き自体が見やすいものであったことが幸いし、Cinderellaの描画面におけるInteractiveな提示を用いずとも、十分な効果を発揮できたものと考えられる。しかし、動画で提示される対象がさらに複雑になってくると、Interactiveな提示との連携が本質的に不可欠になってくるケー

スも当然想定される。次に示すのはそのような例である。

### 3.2 円の焦線としてのカージオイド

ここでは、オイラーの公式と関数の極限の応用として、円周上の1点から出た光が別の点に入射してはね返った際の反射光線が、必ずカージオイドに接していることを示す問題に関する教材を取り上げる。

図10は、学習者が手がかりとなる情報を図に書き込みながら計算を進められるように用意した、紙媒体の教材の一部である。

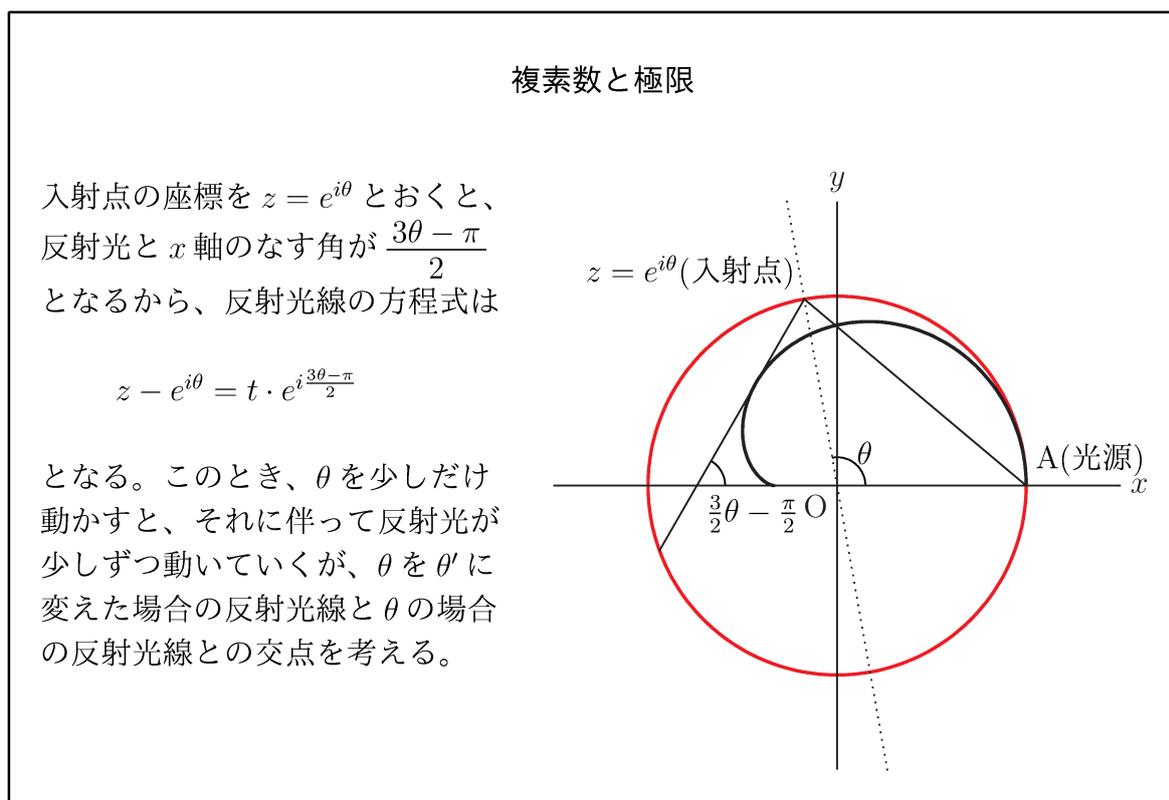


図10 焦線に関する紙媒体の教材

状況がこれだけ複雑になると、 $\theta$  の値をいろいろに変えたときに反射光線がつねにカージオイドに接していることを、静止画からイメージすることはまず不可能であり、図11のようなアニメーションが必要になってくる。ここで、入射点を表す数式 ( $z = e^{i\theta}$ ) や、日本語による付随した説明が、図の動きと並行して動いていくようにできている。また、反射光線については媒介変数表示が複雑になるので、 $K_{\text{JTCindy}}$  に用意されている対称移動のコマンドを用いて Cindyscript への入力を行っている。

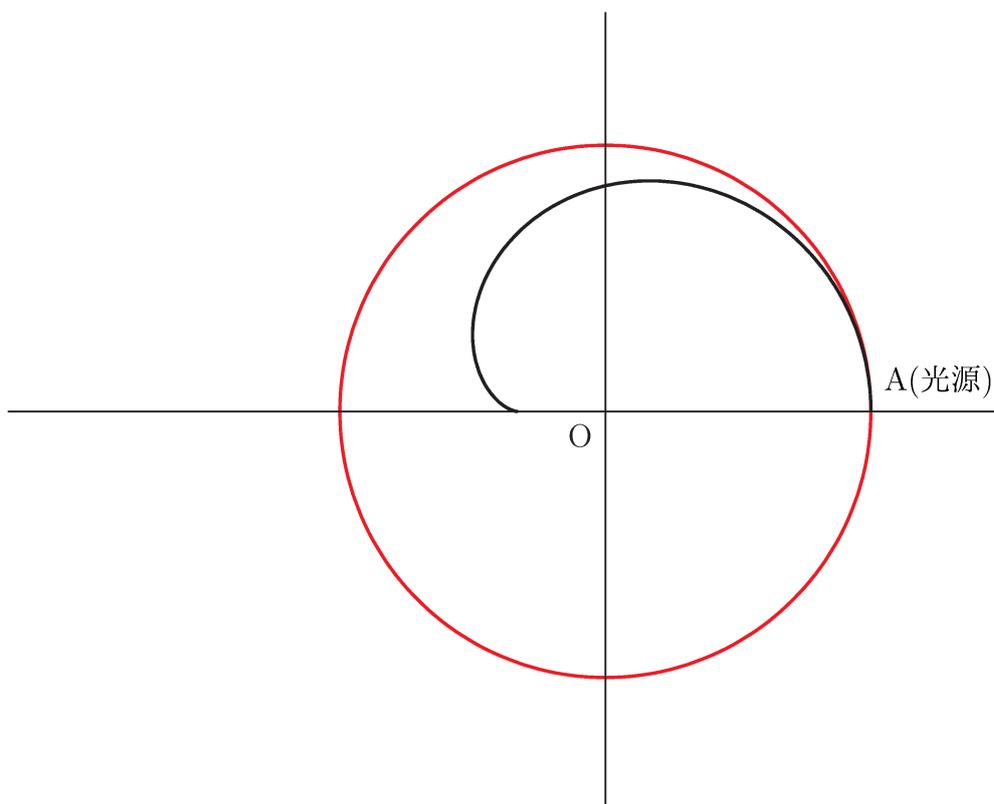


図 11 カーゴイドが焦線であることを示すアニメーション

カーゴイドが焦線となる状況を観察するだけであれば、図 11 だけでも十分であるが、図 10 の中にある方針にしたがって数式による検証を進めるためには、ある固定した反射光線にむかって別の反射光線を近づけていくときに、それらの交点が焦線に近づいていくことを理解する必要がある。Cinderella の画面上でのより柔軟な提示が不可欠である。図 12 は、図 10, 11 を生成するソースとなった Cinderella のファイルを少しだけ改変し、スライダーによって上記の交点の動きを確認するための提示をしている状況を示している。実際、画面下方にあるスライダーを動かすと、入射点 C が固定した入射点 F に近づいていき、それに伴って反射光線どうしの交点 L が焦線に近づいていくことが容易に視認できるようになっている。

以上の教材を用いた授業は、1 つ目の授業よりも多くの人数を対象に行ったが、学生の所属学科からするとかなり数物系に寄った内容であるのに加え、オイラーの公式に関する学習の参考事例としての位置づけで行ったこともあり、学生からはあまりはっきりした反応が得られず、対照的な結果となった。極限の考え方をうまく活用することで、陰関数の微分法を経由した一般的な方法ではなく、より初等的な方法で包絡線の方程式が得られる点で興味深い例ではあるのだが、そうした意義を理解する上で必要となる数学的な予備知識が少なくないだけに、学生のニーズに今一つマッチしていなかったことがひとつの背景だと考えられる。

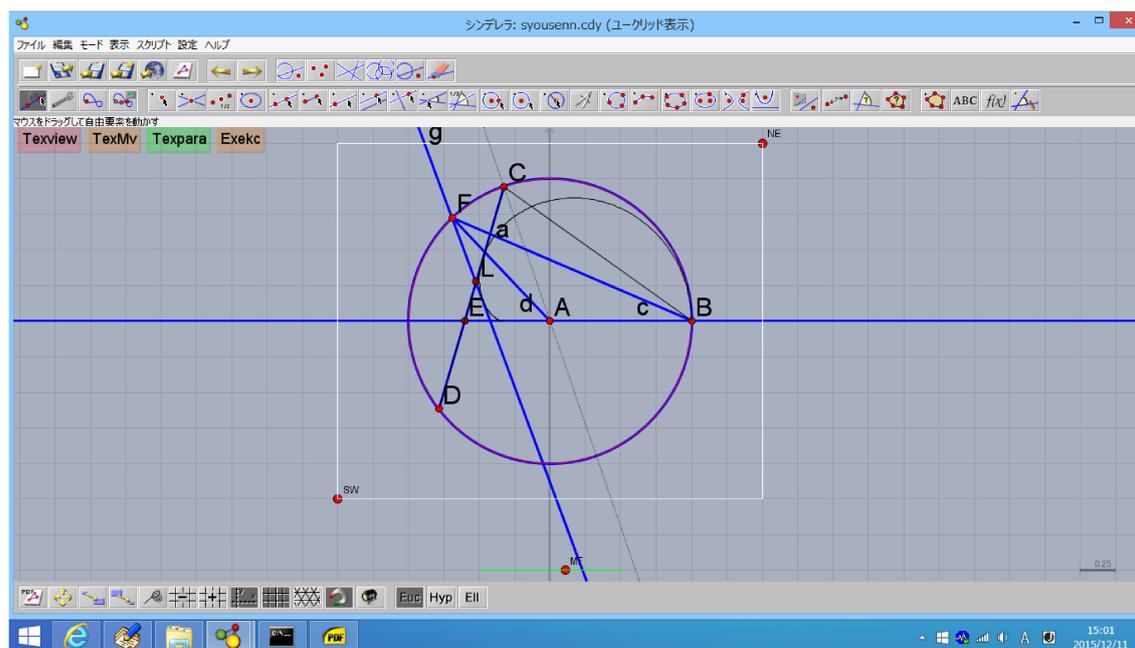


図 12 Cinderella の描画面での Interactive な提示

## 4 結論と今後の課題

近年、グラフィックスで表現される内容の読み取りや、読み取った内容と数式表現との統合的な理解が学習者にとっての大きな課題となりつつある。そのような理解が進まない場合、授業のペースからどんどん取り残されてしまい、結局わからないまま過ぎてしまうという事例も稀ではない。T<sub>E</sub>X による高品質の数式表現と、動的なものを含めたグラフィックスの提示とを、統合しやすい形で行える K<sub>E</sub>T<sub>C</sub>indy が開発されたことで、こうした課題に対応できる可能性は広がったと言える。最近では PC を所持する学生の比率がかなり高くなっており、PDF 形式のファイルとして動画を含めたコンテンツを配信できる K<sub>E</sub>T<sub>C</sub>indy のシステムはとりわけ有効であるが、一歩進めてシステム自体を学習者が自らの PC にインストールし、配信されたコンテンツを適切に操作するというレベルに至るには、まだ敷居が非常に高いのが実情である。また、特に動画コンテンツについては、どのようなテーマで用いると有効なのか、どのような提示の仕方が望ましいのかといった点について、今後多くの検討を重ねなくてはならない。

現実的に、筆者の所属する機関の学生を見ても、限られた時間の中で多くの高度な内容を学習しなくてはならないため、上記のようにコンテンツの Interactive な利用を期待するのには無理がある。学習が遅れがちな学習者を助けつつ、授業中一応理解できた学生についてもその理解を一過性のものにしないためには、授業後に、特に Interactive な提示を用いた部分などのポイントを必要に応じて学習者自身が振り返れるようなコンテンツを用意しておく必要がある。このような考え方から筆者は、PC 画面上での Cinderella による Interactive な提示と T<sub>E</sub>X 出力による静的な提示とを、音声による解説も交えて録画し、録画画像を内容に応じてタグ付けした上で、一般の動画視聴ソフトで見られる

形に編集して web 経由で配布するという試みを行っている。図 13 はそうしたもののうち、統計学における「仮説検定」のプロセスについて、乱数発生によるシミュレーションの動的な提示も交えながら、音声による解説を行うコンテンツの一場面である。今後、このような方向性も鋭意追求して行きたいと考えている。

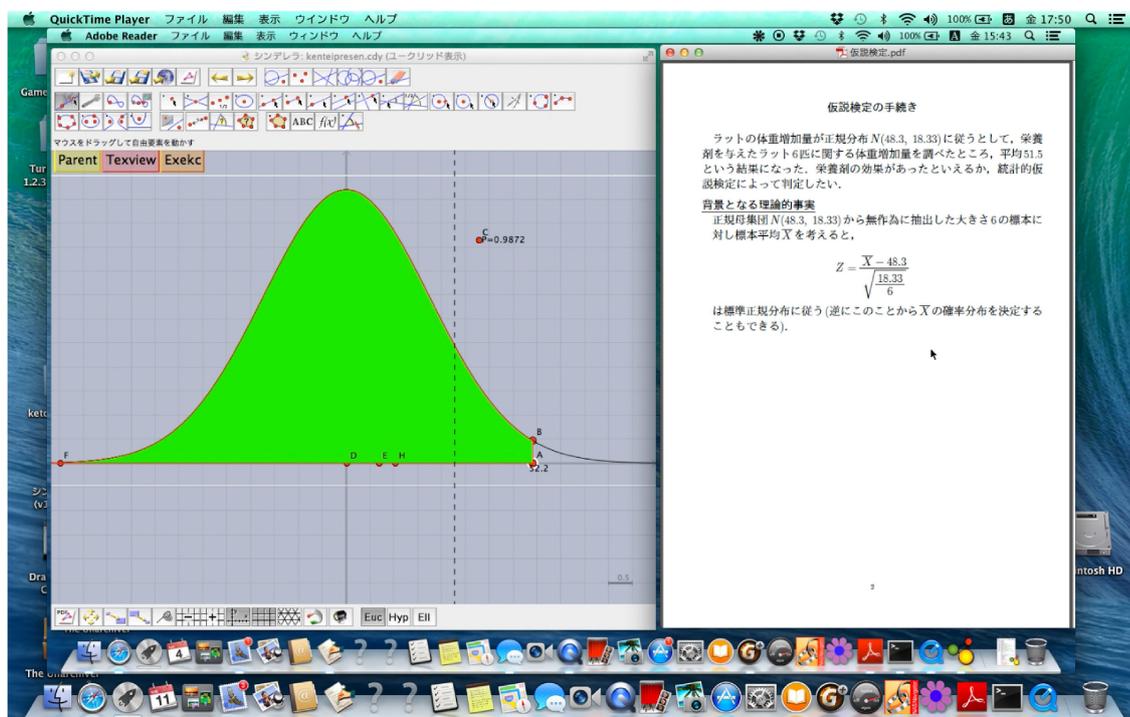


図 13 振り返り用の動画・音声入りコンテンツ

## 謝辞

本研究は科学研究費補助金・基盤研究(C) (課題番号 15K01037) の補助を受けた。

## 参考文献

- [1] 金子真隆, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「 $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{pic}}$  で楽々  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  グラフ」, イーテキスト研究所, 2011
- [2] 金子真隆, 高遠節夫: 「動的幾何と静的幾何の棲み分けに関する考察」, 京都大学数理解析研究所講究録 1865, pp.27–33, 2013
- [3] Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U., Takato S.: “ $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{indy}$  – Collaboration of Cinderella and  $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{pic}}$  –”, to appear in International Journal for Technology in Mathematics Education, 2016
- [4] 高遠節夫: 「 $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{indy}$  の開発について」, 京都大学数理解析研究所講究録 (掲載予定), 2016