数理解析研究所講究録
第1980巻 2016年 28-36

量子電磁力学におけるカイラル対称性の自発的破れと Maskawa–Nakajima 方程式

群馬大学大学院理工学府数理科学分野　渡辺秀司

Shuji Watanabe
Division of Mathematical Sciences, Graduate School of Science and Technology,
Gunma University

1　量子電磁力学とは

量子電磁力学は、電子と光子の間に働く相互作用 (gauge 相互作用と呼ばれる) を考慮した、電子と光子の運動を記述する量子力学的な動力学のことであり、Einstein の特殊相対性理論を満たしている。この電子と光子の間に働く相互作用により、電子や光子の各々が消滅したり生成したりするため、電子数や光子数の各々が一定には保たれないことが生じ得る。したがって、量子電磁力学の枠組においては**電子数や光子数の各々は 0 以上の整数である限り任意であり、∞ であっても許される**。この点が、Schrödinger 作用素とは本質的に異なっている。よく知られているように、Schrödinger 作用素の枠組では粒子の数は増えも減りもしないで一定のままである。因みに、この量子電磁力学における「くりこみ理論」という業績に関して、朝永振一郎博士・ Schwinger ・ Feynman がノーベル物理学賞を１９６５年に受賞している。

上述のように量子電磁力学の枠組においては電子数や光子数の各々は 0 以上の整数である限り任意のため、Schrödinger 作用素の枠組では決して扱えない物理現象が量子電磁力学の枠組 (場の量子論の枠組み) では 扱える。その 1 つが対称性の自発的破れと呼ばれる、極めて興味深い物理現象である。このような物理現象は自然界には様々存在する。磁石でも対称性が自発的に破れているし、また、超低温において電気抵抗がゼロとなる超伝導と呼ばれる現象でも同様である。この稿では、量子電磁力学におけるカイラル対称性の自発的破れと呼ばれる現象を扱う。

2　量子電磁力学におけるカイラル対称性とは

量子電磁力学では、Lagrangian と呼ばれるものが最初に定義される。この Lagrangian から変分法における Euler-Lagrange 方程式として導かれる方程式が運動方程式であるが、量子電磁力学では運動方程式よりも Lagrangian のほうが頻繁に扱われる。これは、実際に起きる運動のほかに、実際には起きない運動をも纏めて扱おうとしているからである。

このような力学の形式を Lagrange 形式という。量子電磁力学における Lagrangian が、何らかの変換に対して不変であれば、これから保存則が導かれる (Noether の定理)。

さて、量子電磁力学の Lagrangian には電子場 $\psi = \psi_L + \psi_R$、光子場 A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)、電子の質量項 $m\left(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L\right)$ が含まれる。ここで、電子の質量 m は $m > 0$ であり、そして、γ_5 を Dirac 行列と呼ばれる 4×4 行列のうちの 1 つとするとき、ψ_L と ψ_R は複素数の成分を 4 つもつスピノルと呼ばれる ψ から、

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi$$

によって定まる。 また、$\overline{\psi_L}$ は ψ_L の複素共役のようなものである。Einstein の特殊相対性理論では時空の変換として Lorentz 変換が登場するが、この Lorentz 変換に対して、電子場 ψ と 光子場 A_μ はそれぞれスピノル、ベクトルとして変換する。光子の質量は gauge 相互作用故に厳密にゼロである。

ここで、電子の質量がゼロとなる場合を考えよう。このとき、$m = 0$ となるため、上の電子の質量項は存在しなくなる。このため、

$$\psi_L \mapsto e^{i\alpha}\psi_L\,, \qquad \psi_R \mapsto e^{i\beta}\psi_R\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

というグローバルな変換の下で量子電磁力学の Lagrangian は不変となる。上の α や β が時空点によらない定数のときにグローバルな変換と呼ばれる。このとき、**量子電磁力学の Lagrangian はカイラル対称性をもつ**という。そして、量子電磁力学における Lagrangian がカイラル対称性をもてば、ψ_L と ψ_R の各々が任意にその位相を変化させても Lagrangian は不変、したがって、運動方程式も不変となり、何の変化も生じない。

ただし、電子の質量がゼロでないときは、すなわち、$m \neq 0$ のときは、電子の質量項が存在するため、量子電磁力学の Lagrangian はカイラル対称性をもたない。

3　量子電磁力学におけるカイラル対称性の自発的破れとは

電子の質量をゼロとする、すなわち、$m \neq 0$。このとき、電子の質量項は存在しないため、量子電磁力学の Lagrangian はカイラル対称性をもつ。しかし、万が一、電子と光子の相互作用の結果として電子が質量を獲得したら、そのときは電子の質量項が存在することになる。そのため、量子電磁力学の Lagrangian が元来もっていたはずのカイラル対称性が破られることになる、量子電磁力学の元々の Lagrangian はカイラル対称性をもっていたにもかかわらず。一見奇妙なこの現象を**カイラル対称性の自発的破れ**という。

量子電磁力学のように、電子や光子などの粒子数が 0 以上の整数である限り任意であり、∞ であっても許される力学系においては、たとえ Lagrangian が、したがって運動方程式までが何らかの対称性をもっていても、現実にはその対称性が破れている場合が生じうる。対称性が自発的に破れるというこの現象は、Schrödinger 作用素の枠組では決して生じ得ない。そして、対称性の自発的破れというこのような現象は、超低温において電気抵抗がゼロとなる超伝導と呼ばれる現象で初めて認識された。超伝導に対する量子力学的

な理論はBCS理論と呼ばれるものであり、Bardeen, Cooper, Schriefferの3人の物理学者によって発表された。この理論は大成功を収め、この業績により彼ら3人はノーベル物理学賞を１９７２年に受賞している。このBCS理論においては、Hamiltonianは位相変換不変であるため、エネルギーの最も低い基底状態での電子数は一定であらねばならない。しかし、BCS理論においてはBCS状態と呼ばれる基底状態はいろいろな電子数をもつ状態の線形結合となっているため、電子数は一定ではなく、いろいろな値をとりうる。すなわち、Hamitonianのもつ位相変換不変性という対称性が自発的に破れていることになる。この事実を世界で最初に気づいたのが、南部博士であり、益川博士、小林博士とともにノーベル物理学賞を２００８年に受賞している。

4 Maskawa–Nakajima 方程式とは

さて、電子の質量をゼロとすれば量子電磁力学のLagrangianはカイラル対称性をもつが、このカイラル対称性は自発的に破れることがあるのか？すなわち、**量子電磁力学という動力学はカイラル対称性を自発的に破ることがあるのか？**という問題を、益川博士と中島博士 [15, 16] が最初に研究した。この研究の過程で、益川 – 中島両博士は次の非線形積分方程式を導出した： 電子の質量をゼロとするとき、

$$u(x) = \frac{\lambda}{2}\int_{\varepsilon}^{\Lambda} \frac{1}{y+x+|y-x|}\,\frac{y\,u(y)}{y+u(y)^2}\,dy, \quad (0<)\varepsilon \le x,\, y \le \Lambda.$$

ここで、$\lambda = \dfrac{3a^2}{4\pi^2} > 0$、また $a>0$ は gauge 結合定数とよばれ、電子と光子の結合の強さを表す。カットオフ $\varepsilon, \Lambda > 0$ は、$\varepsilon > 0$ は十分小さく、かつ $\Lambda > 0$ 十分大きい。**非線形積分方程式である上の Maskawa–Nakajima 方程式の解 u は電子の質量であり、** エネルギーの２乗である x の関数となることに留意。

Remark 4.1. 本来は、Maskawa–Nakajima 方程式におけるカットオフは、$\varepsilon = 0$ かつ $\Lambda = \infty$ としたいのだが、数学的な困難さを回避したいが故にここでは、$\varepsilon > 0$ は十分小さく、かつ $\Lambda > 0$ 十分大きいものとした。

上の Maskawa–Nakajima 方程式は、すべての x で $u(x) = 0$ という解 (自明な解) を必ずもつことが分かる。この自明な解は、すべてのエネルギーにおいて電子の質量がゼロであることに対応している。したがって、電子の質量項は存在せずに、カイラル対称性は自発的には破れずに保たれていることを、この自明な解は示している。他方、もし、自明な解以外の解が存在すれば、質量が元来、ゼロであった電子はゼロでない質量を獲得し、その結果として電子の質量項が現れ、そして量子電磁力学という動力学がカイラル対称性を自発的に破ったことになる。故に、自明な解以外の解が存在するかどうかがカギとなる。

問題： 非線形積分方程式である上の Maskawa–Nakajima 方程式は、自明な解以外の解をもつか？

Maskawa–Nakajima 方程式において、$y < x$ であれば、$|y-x| = x-y$、一方 $y > x$ であれば、$|y-x| = y-x$ となるので、Maskawa–Nakajima 方程式は次のように変形される：

$$u(x) = \frac{\lambda}{4}\left\{\frac{1}{x}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{y\,u(y)}{y+u(y)^2}\,dy + \int_{x}^{\Lambda}\frac{u(y)}{y+u(y)^2}\,dy\right\}, \quad (0<)\varepsilon \le x,\, y \le \Lambda. \tag{4.1}$$

ゆえに

$$x^2u''(x) + 2xu'(x) + \frac{\lambda}{4}\frac{xu(x)}{x+u(x)^2} = 0, \quad (0<)\varepsilon \le x \le \Lambda.$$

九後 – 中島両博士 [14] は x が十分大のときには $u(x) \to 0$ と仮定して、この常微分方程式を x が十分大のところで扱った。それゆえ、$x + u(x)^2$ を x と近似すれば、それは次のようになる： 十分大の x に対して

$$x^2u''(x) + 2xu'(x) + \frac{\lambda}{4}\,u(x) = 0.$$

この常微分方程式はよく知られた形のものに帰着できて、九後 – 中島両博士は次の結論に到達した：

電子の質量をゼロとし、また、x が十分大のときに $u(x) \to 0$ と仮定する。 このとき、$0 < \lambda < 1$ ならば自明な解 $u = 0$ のみが存在する。したがって、量子電磁力学はカイラル対称性を保つ。一方、$\lambda > 1$ ならば自明な解以外の解が存在する。 したがって、量子電磁力学はカイラル対称性を自発的に破る。

5 Maskawa–Nakajima 方程式の作用素論的扱い–その 0

九後 – 中島両博士による結論は、x が十分大のときに $u(x) \to 0$ になるという仮定の下で得られている。したがって、この仮定が成り立たない場合には、同じ結論を得るかどうかは不明である。また、$x^2u''(x) + 2xu'(x) + \frac{\lambda}{4}u(x) = 0$ という上の常微分方程式は、この仮定の下では十分大の x においてのみ成立するので、そうでない x に対しては成立しない。

そこで、このような仮定なしで、**非線形積分方程式である上の Maskawa–Nakajima 方程式を作用素論的に扱う。**

関数 $w : [\varepsilon, \Lambda] \to \mathbb{R}$ を

$$w(x) = \frac{4\varepsilon}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\Lambda x}}$$

によって定義する。この関数 w を用いて、Banach 空間 $C[\varepsilon, \Lambda]$ の以下の部分集合 V を考えよう：

$$V = \left\{u \in C[\varepsilon, \Lambda] :\ w(x) \le u(x) \le \frac{\lambda}{4}\sqrt{\Lambda}\ \text{ at all }\ x \in [\varepsilon, \Lambda]\right\}.$$

そして、次の非線形積分作用素を扱う： $u \in V$ について

$$Au(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{\varepsilon}^{\Lambda} \frac{1}{y + x + |y - x|} \frac{y\,u(y)}{y + u(y)^2}\,dy, \qquad \varepsilon \le x \le \Lambda.$$

この等式の右辺は Maskawa–Nakajima 方程式の右辺に正に対応している。したがって、Maskawa–Nakajima 方程式の解は非線形積分作用素 A の不動点に他ならない。そこで、不動点定理を適用して、不動点を探すことにする。

6 作用素論的扱い–その 1 (電子と光子の結合が強い場合)

まずは、電子と光子の結合が強くて (gauge 結合定数が大きくて)、$\lambda > 2$ となる場合を扱おう。Maskawa–Nakajima 方程式におけるカットオフ $\varepsilon > 0$ と $\Lambda > 0$ が

$$\frac{\varepsilon}{\Lambda} \le \min\left(\frac{1}{16}, \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + 128(\lambda - 2)} - \lambda}{64}\right)^2\right)$$

を満たすと仮定する。定数 λ は $\lambda > 2$ であり、また、カットオフ $\varepsilon > 0$ は十分小さく、かつ Λ は十分大なので、上の仮定は満たされる。

この仮定の下で、次の定理を証明できる。

Theorem 6.1 ([22, Theorem 2.1]). $\lambda > 2$ と仮定し、カットオフ $\varepsilon > 0$ と $\Lambda > 0$ をすぐ上のようにおく。
(a) 非線形積分作用素 A は集合 V からそれ自身へのコンパクト写像であり、不動点 $u_0 \in V$ を少なくとも 1 つはもつ。故に、不動点 $u_0 \in V$ は区間 $[\varepsilon, \Lambda]$ で連続であり、かつ、$(0 <)\, w(x) \le u_0(x) \le \lambda\sqrt{\Lambda}/4$ をすべての $x \in [\varepsilon, \Lambda]$ に対して満たす。したがって、最初は電子の質量はゼロであっても、量子電磁力学という動力学は電子のゼロでない質量を生み出し、そのため、量子電磁力学はカイラル対称性を自発的に破る。さらに、各々の不動点 $u_0 \in V$ は区間 $[\varepsilon, \Lambda]$ で狭義単調減少であり、以下を満たす：

$$u_0 \in C^\infty[\varepsilon, \Lambda], \qquad u_0'(\varepsilon) = 0.$$

(b) $u_0 \in V$ を非線形積分作用素 $A : V \to V$ の (a) で得られた、ある不動点とする。もし、$u_0(x) \le \sqrt{x}$ がすべての $x \in [\varepsilon, \Lambda]$ に対して満たされれば、非線形積分作用素 $A : V \to V$ は不動点を 1 つだけもつ。すなわち、$u_0 \in V$ は非線形積分作用素 $A : V \to V$ の唯一の不動点である。

Proof. (a) 上の集合 V は有界、閉、かつ convex である。また、非線形積分作用素 A は集合 V からそれ自身への写像であることが示せる。さらに、非線形積分作用素 A の像なる集合 $AV = \{\, Au : u \in V \,\}$ は相対コンパクトであること、そして写像 $A : V \to V$ が連続写像であることが示せる。したがって、非線形積分作用素 A は集合 V からそれ自身へのコンパクト写像であることがわかる。故に、Schauder の不動点定理を適用できる。狭義単調減少性と微分可能性は (4.1) から直ちに従う。
(b) 背理法による。詳細は省略。 □

7 作用素論的扱い–その2 (電子と光子の結合が弱い場合)

次に、電子と光子の結合が弱くて (gauge 結合定数が小さくて)、$0 < \lambda < 1$ となる場合を扱う。Maskawa–Nakajima 方程式を直接そのままの形で扱うことを避ける目的で、以下のようにおく：

$$u(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{x+\varepsilon}}.$$

このようにおくと、Maskawa–Nakajima 方程式は次の形になる：

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{2}\sqrt{x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{y+x+|y-x|}\,\frac{y}{\sqrt{y+\varepsilon}}\,\frac{\psi(y)}{y+\dfrac{\psi(y)^2}{y+\varepsilon}}\,dy\,.$$

ここで、$\Lambda = \infty$ と考えて、 $\varepsilon \leq x < \infty$ とした。Remark 4.1 において述べたように、Maskawa–Nakajima 方程式におけるカットオフは本来、$\varepsilon = 0$ かつ $\Lambda = \infty$ としたかったからである。

Banach 空間 $B^0[\varepsilon, \infty)$ の以下の部分集合 W を考えよう：

$$W = \left\{\psi \in B^0[\varepsilon, \infty) : \psi(x) \geq 0 \ \text{ at all } \ x \in [\varepsilon, \infty)\right\}.$$

そして、次の非線形積分作用素を扱う： $\psi \in W$ について

$$B\psi(x) = \frac{\lambda}{2}\sqrt{x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{y+x+|y-x|}\,\frac{y}{\sqrt{y+\varepsilon}}\,\frac{\psi(y)}{y+\dfrac{\psi(y)^2}{y+\varepsilon}}\,dy\,.$$

ここで、$\varepsilon \leq x < \infty$. この等式の右辺は直ぐ上の Maskawa–Nakajima 方程式の右辺に正に対応している。したがって、Maskawa–Nakajima 方程式の解は非線形積分作用素 B の不動点に他ならないので、以前と同様に不動点定理を適用して非線形積分作用素 B の不動点を探す。

Theorem 7.1 ([22, Theorem 2.2])**.** $0 < \lambda < 1$ と仮定する。このとき、非線形積分作用素 B は集合 W からそれ自身への縮小写像になるので、唯一 $0 \in W$ という不動点のみをもつ。したがって、電子の質量はゼロのままに留まる。それ故、量子電磁力学はカイラル対称性をそのまま保つので、カイラル対称性の自発的な破れは生じない。

Proof. 上の集合 W は閉集合であることがわかる。また、非線形積分作用素 B は集合 W からそれ自身への写像であることが示せる。さらに、ψ と φ を W の要素とするとき、

$$\begin{aligned}
|B\psi(x) - B\varphi(x)| &\leq \frac{\lambda}{2}\sqrt{x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{y+x+|y-x|}\left|\frac{\psi(y)}{\sqrt{y+\varepsilon}} - \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y+\varepsilon}}\right| dy \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\,\|\psi-\varphi\|_{B^0[\varepsilon,\infty)}\sqrt{x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{(y+x+|y-x|)\sqrt{y+\varepsilon}} \\
&\leq \lambda\,\|\psi-\varphi\|_{B^0[\varepsilon,\infty)}\,.
\end{aligned}$$

ここで、$\|\cdot\|_{B^0[\varepsilon,\infty)}$ は Banach 空間 $B^0[\varepsilon, \infty)$ のノルムを表し、また、すぐ下の lemma を使った。$0 < \lambda < 1$ なので、非線形積分作用素 B は集合 W からそれ自身への縮小写像であることが示せた。故に、Banach の不動点定理から上の定理が従う。 □

Lemma 7.2.

$$\sqrt{x+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dy}{(y+x+|y-x|)\sqrt{y+\varepsilon}}<2.$$

Proof. 直接的な計算により、

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dy}{(y+x+|y-x|)\sqrt{y+\varepsilon}} &\le \int_{0}^{\infty}\frac{dy}{(y+x+|y-x|)\sqrt{y+\varepsilon}}\\ &= \frac{1}{2x}\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{y+\varepsilon}}+\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{dy}{y\sqrt{y+\varepsilon}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\ln\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{x}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{x}}\right).\end{aligned}$$

さらなる直接的な計算により、

$$\sqrt{x+\varepsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\ln\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{x}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{x}}\right)\right\}<2 \qquad (x\ge\varepsilon).$$

□

Acknowledgments

S. Watanabe is supported in part by the JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 24540112.

参考文献

[1] V. Bach, E. H. Lieb and J. P. Solovej, *Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model*, J. Stat. Phys. **76** (1994), 3–89.

[2] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108** (1957), 1175–1204.

[3] P. Billard and G. Fano, *An existence proof for the gap equation in the superconductivity theory*, Comm. Math. Phys. **10** (1968), 274–279.

[4] N. N. Bogoliubov, *A new method in the theory of superconductivity I*, Soviet Phys. JETP **34** (1958), 41–46.

[5] J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Spontaneous symmetry breaking without scalar mesons*, Phys. Rev. **D 8** (1973), 3338–3346.

[6] R. L. Frank, C. Hainzl, S. Naboko and R. Seiringer, *The critical temperature for the BCS equation at weak coupling*, J. Geom. Anal. **17** (2007), 559–568.

[7] R. Fukuda and T. Kugo, *Schwinger-Dyson equation for massless vector theory and the absence of a fermion pole*, Nucl. Phys. **B 117** (1976), 250–264.

[8] C. Hainzl, E. Hamza, R. Seiringer and J. P. Solovej, *The BCS functional for general pair interactions*, Comm. Math. Phys. **281** (2008), 349–367.

[9] C. Hainzl and R. Seiringer, *Critical temperature and energy gap for the BCS equation*, Phys. Rev. **B 77** (2008), 184517.

[10] K. Higashijima, *Dynamical chiral-symmetry breaking*, Phys. Rev. **D 29** (1984), 1228–1232.

[11] R. Jackiw and K. Johnson, *Dynamical model of spontaneously broken gauge symmetries*, Phys. Rev. **D 8** (1973), 2386–2398.

[12] K.-I. Kondo, *Spontaneous breakdown of chiral symmetry and scaling law in the massive vector model*, Phys. Lett. **B 226** (1989), 329–334.

[13] K.-I. Kondo, *Infrared and ultraviolet asymptotic solutions to gluon and ghost propagators in Yang-Mills theory*, Phys. Lett. **B 551** (2003), 324–336.

[14] T. Kugo and H. Nakajima, *Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter approach to strong interaction dynamics and chiral symmetry breaking*, Prog. Theor. Phys. **122** (2009), 273–291.

[15] T. Maskawa and H. Nakajima, *Spontaneous breaking of chiral symmetry in a vector-gluon model*, Prog. Theor. Phys. **52** (1974), 1326–1354.

[16] T. Maskawa and H. Nakajima, *Spontaneous breaking of chiral symmetry in a vector-gluon model II*, Prog. Theor. Phys. **54** (1975), 860–877.

[17] V. A. Miransky, M. Tanabashi and K. Yamawaki, *Dynamical electroweak symmetry breaking with large anomalous dimension and t quark condensate*, Phys. Lett. **B 221** (1989), 177–183.

[18] F. Odeh, *An existence theorem for the BCS integral equation*, IBM J. Res. Develop. **8** (1964), 187–188.

[19] A. Vansevenant, *The gap equation in the superconductivity theory*, Physica **17D** (1985), 339–344.

[20] S. Watanabe, *The solution to the BCS gap equation and the second-order phase transition in superconductivity*, J. Math. Anal. Appl. **383** (2011), 353–364.

[21] S. Watanabe, *Addendum to 'The solution to the BCS gap equation and the second-order phase transition in superconductivity'*, J. Math. Anal. Appl. **405** (2013), 742–745.

[22] S. Watanabe, *An operator-theoretical treatment of the Maskawa-Nakajima equation in the massless abelian gluon model*, J. Math. Anal. Appl. **418** (2014), 874–883.

[23] K. Yamawaki, *Walking over the composites–In the spirit of Sakata–*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **167** (2007), 127–143.

[24] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis*, Applied Mathematical Sciences **108**, Springer -Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1995.