数理解析研究所講究録
第 1980 巻 2016 年 56-69

半空間上の多重調和関数に関する再生核について

西尾 昌治 (Masaharu Nishio)

大阪市立大学大学院理学研究科

Department of Mathematics, Osaka City University

概 要

2 乗可積分な多重調和関数からなる空間を考える. まず, 一般領域でその空間が再生核を持つ Hilbert 空間になること, および基本的な再生核の評価について説明する. そして次に, 領域を半空間に限定し, その上の再生核を Poisson 核の微分を用いて表すことを考える. そのために, 分数ベキの多重放物型 Bergman 空間を導入し, 関数のノルム評価および各点での微分の評価を与える.

1 緒言

Bergman 空間は複素平面上の正則関数のなす Hilbert 空間として導入され, 研究されてきた. 正則関数は調和関数であることから調和 Bergman 空間の研究もさかんになされ, 数多くの論文が発表されている. また, われわれは [9] で放物型 Bergman 空間を導入し, 調和 Bergman 空間との関係を明らかにしてきた.

以上をふまえ, ここではさらに一般化し, 多重調和関数 (polyharmonic) の空間を多重放物型 (polyparabolic) Bergman 空間との関連で考察する. 多重調和関数とは偏微分方程式 $\Delta^m u = 0$ をみたす関数のことである. 多変数函数論にあらわれる pluriharmonic 関数とはことなっていることに注意する.

$\boldsymbol{H}$ を $(n+1)$-次元 Euclidean 空間の上半空間とし, $X=(x,t)=(x_1,\cdots,x_n,t)$ などで $\boldsymbol{H}$ の点を表す. Laplacian は

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

である. 整数 $m \geq 1$ と $1 \leq p \leq \infty$ に対し, 多重調和 Bergman 空間は

$$\boldsymbol{b}^{m,p}=\boldsymbol{b}^{m,p}(\boldsymbol{H}) := \{u \in C^{2m}(\boldsymbol{H}) | \Delta^m u = 0, u \in L^p(\boldsymbol{H})\}$$

本研究は科研費 K15K04934 に拠る研究

2010 Mathematics Subject Classification: 31B30, 35K25, 46E22.

Keywords and phrases: mean value property, parabolic operators of fractional order, reproducing kernels, Laguerre polynomials, Bergman spaces, polyharmonic functions

で与えられる. 本論分の目的はこの空間の完備性および再生核の存在を示し, 再生核を上半空間の Poisson 核 (Szegö 核) を用いて, 具体的な形を提示することである. すなわち, 主定理は次である.

定理 1. $\boldsymbol{b}^{m,p}$ は *Banach* 空間である. $\boldsymbol{b}^{m,2}$ は再生核をもつ *Hilbert* 空間である.

さらに, $\boldsymbol{b}^{m,2}$ の再生核 K は次のように与えられる. そのために,

$$p_0, p_1, p_2, \cdots \tag{1}$$

を半直線 $(0,\infty)$ 上の重み $e^{-t}dt$ で与えられる直交多項式で $\deg(p_k) = k$ なるものとする. これは, 指数 0 の Laguerre 多項式 (の定数倍) である. また, 上半空間上の Poisson 核を W すなわち,

$$W(x,t) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

とする. そのとき, 次がなりたつ.

定理 2. $X_1 = (x_1, t_1), Y_1 = (y_1, s_1) \in \boldsymbol{H}$ に対し,

$$K^m(X_1, Y_1) := \sum_{k=0}^{m-1} (-2\partial_t) p_k(-2t_1\partial_t) p_k(-2s_1\partial_s) W(x-y, t+s)\Big|_{X=X_1, Y=Y_1}$$

とおく. そのとき核 K^m によって与えられる積分作用素は, $L^2(\boldsymbol{H})$ から $\boldsymbol{b}^{m,2}$ への直交射影である.

これらのことを示すために, 放物型作用素および放物型 Bergman 空間を考える. $0 < \alpha \le 1$ に対し,

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

とおく. ここで,

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

である. 整数 $m \ge 1$ と $1 \le p \le \infty$ に対し,

$$\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p} = \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{H}) := \{u \in C^\infty(\boldsymbol{H}) \,|\, \left(L^{(\alpha)}\right)^m u = 0, t^k \left(L^{(\alpha)}\right)^k u \in L^p(\boldsymbol{H}) \text{ for } 0 \le k \le m\}$$

とおき, 多重放物型 (polyparabolic) Bergman 空間とよぶ. これに関して次がなりたつ.

定理 3. $m \ge 1$ を整数, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p \le \infty$ とする. そのとき, $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ は L^p-ノルムで *Banach* 空間である. $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$ は再生核をもつ *Hilbert* 空間である.

本稿ではまず, 一般な領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ 上の多重調和 Bergman 空間の考察をした後, 上半空間上の多重放物型 Bergman 空間の再生核を与える公式を導く. そして最後に次の関係に注意する.

定理 4. $\boldsymbol{b}^{m,p} = \boldsymbol{b}^{m,p}_{1/2}$

$m = 1$ のとき, $\boldsymbol{b}^{1,p} = \boldsymbol{b}^{1,p}_{1/2}$ であることは [9] で注意されているが, 調和 Bergman 空間 $\boldsymbol{b}^{1,2}$ の再生核が

$$K^1(X,Y) = -2\partial_t W(x-y, t+s)$$

となることは [10] にある. 定理 2 はこの一般化である.

なお, Aronszain は無限次の多重調和関数 (polyharmonic functions of infinite order) という概念を提唱している (たとえば [1] 参照). そのような関数の空間がどのようなものになっているのかは今後の課題として興味深いと思われる.

2 多重調和関数

この節では準備として, Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^N$ の領域 Ω 上の多重調和関数の性質について説明し, 多重調和関数から成る Bergman 型空間が, 再生核を持つ Hilbert 空間になることを確認する. 自然数 $m \geq 1$ に対し,

$$\mathcal{H}^m(\Omega) := \{u \in C^{2m}(\Omega) \,|\, \Delta^m u = 0\}$$

とおく. $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$ は m 次多重調和関数とよはれる. Laplacian Δ の解析的準楕円性より多重調和関数は実解析的である.

2.1 平均値の性質. 多重調和関数に対する平均値の性質はこれまで状況に応じて論じられてきている ([2], [3] など). ここでは, スケーリングによってノルム評価を与えることを目的とした形のものを考える. そのためまず, 単位球 $\boldsymbol{B} := \{X \in \boldsymbol{R}^N \,|\, |X| < 1\}$ 上の多重調和関数の Almanzi 分解から始める.

補題 1. (cf. [1]) $u \in \mathcal{H}^m(\boldsymbol{B})$ とする. そのとき m 個の $h_0, \cdots, h_{m-1} \in \mathcal{H}^1(\boldsymbol{B})$ が存在し,

$$u(X) = h_0(X) + |X|^2 h_1(X) + \cdots + |X|^{2m-2} h_{m-1}(X) \quad (X \in \boldsymbol{B})$$

と表される.

補題 2. 整数 $m \geq 1$ に対し, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \boldsymbol{B}$ となる関数 $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ が存在し, 任意の $u \in \mathcal{H}^m(\boldsymbol{B})$ に対し,

$$u(0) = u * \varphi(0)$$

がなりたつ. ここで, $*$ は $\boldsymbol{R}^N$ 上の合成積を表す.

証明. $0 < r < 1$ をとり, 補題 1 を積分すると, 調和関数の平均値の性質より,

$$S_r u := \frac{\int_{S_r} u d\sigma_r}{\int_{S_r} d\sigma_r} = h_0(0) + r^2 h_1(0) + \cdots + r^{2m-2} h_{m-1}(0)$$

を得る. ここで σ_r は球面 $S_r := \{X \in \boldsymbol{R}^N \| X| = r\}$ 上の球面測度である. そこで, $0 < r_1 < \cdots < r_m < 1$ をとれば

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1^2 & \cdots & r_1^{2m-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & r_m^2 & \cdots & r_m^{2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0) \\ h_1(0) \\ \vdots \\ h_{m-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{r_1} u \\ S_{r_2} u \\ \vdots \\ S_{r_m} u \end{pmatrix}$$

が得られる. これを $h_0(0)$ について解けば,

$$u(0) = h_0(0) = \frac{\begin{vmatrix} S_{r_1} u & r_1^2 & \cdots & r_1^{2m-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{r_m} u & r_m^2 & \cdots & r_m^{2m-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & \cdots & r_1^{2m-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & r_m^2 & \cdots & r_m^{2m-2} \end{vmatrix}} = \sum_{j=1}^m A_j S_{r_j} u$$

の形の平均値の性質を得る. ここで, 係数 A_j は

$$A_j = A_j(r_1, \ldots, r_m) := \prod_{k \neq j} \frac{r_k^2}{r_k^2 - r_j^2}$$

で与えられる $r_1, \ldots, r_m$ の有理関数である. そこで, m 個の関数 $\rho_j \in C_0^\infty(0,1)$ を $\int \rho_j(t_j) dt_j = 1$ で台が互いに交わらないように取り, $\rho(r_1) \cdots \rho_m(r_m) dr_1 \cdots dr_m$ によって積分すれば求める平均値の性質

$$u(0) = \varphi * u(0)$$

が得られる. ここで, $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{B})$ は単位球面の表面積を $|\boldsymbol{S}|$ として

$$\varphi(x) := \sum_j \frac{\rho_j(|x|)}{|\boldsymbol{S}||x|^{N-1}} \underbrace{\int \cdots \int}_{(m-1)\text{-times}} A_j(r_1, \cdots, \overset{j}{|x|}, \cdots, r_m) \rho_1(r_1) \overset{j}{\cdots} \rho_m(r_m) dr_1 \overset{j}{\cdots} dr_m$$

で与えられる. □

多重調和性 $\Delta^m u = 0$ が平行移動と拡大縮小で不変であることから, 上の平均値の性質は一般領域上の多重調和関数に対しては次の形になる.

補題 3. 整数 $m \geq 1$ および領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ をとる. そのとき, $\boldsymbol{R}^N$ 上の C^∞-関数 φ で $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \{|X| < 1\}$ なるものが存在し, 任意の $\tau > 0$ に対し, $\Omega_\tau := \{X \in \Omega | \delta_\Omega(X) > \tau\}$ 上

$$u = u * \varphi_\tau$$

が各 $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$ についてなりたつ. ここで, $\varphi_\tau(X) := \tau^{-N}\varphi(\tau^{-1}X)$ で, $\delta_\Omega(X)$ は点 $X \in \Omega$ から境界 $\partial\Omega$ までの距離を表す.

証明. 補題 2 の φ をとればよい. □

2.2 多重調和 Bergman 空間. $\boldsymbol{R}^N$ の領域 Ω, $1 \leq p \leq \infty$, および $m \geq 1$ に対し,

$$\boldsymbol{b}^{m,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{H}^m(\Omega) | \|u\|_p < \infty\},$$

とおき, 多重調和ベルグマン空間と呼ぶ. 平均値の性質から次の有界性が導かれる.

補題 4. $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}(\Omega)$ に対し

$$|u(X)| \leq C\delta_\Omega(X)^{-N/p}\|u\|_p$$

がなりたつ. ここで, 定数 C は u, X に依らない.

証明. 補題 3 の φ をとる. $X \in \Omega$ に対し, 任意の $0 < \tau < \delta_\Omega(X)$ をとれば,

$$\begin{aligned}
|u(X)| &= \left| \int h(X-Y)\varphi_\tau(Y)dY \right| \leq \|u\|_p \Big(\int \big(\tau^{-N}|\varphi(\tau^{-1}Y)|\big)^{p'} dY \Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|u\|_p \Big(\int \tau^{-Np'+N}|\varphi(\tau^{-1}Y)|^{p'} \frac{dY}{\tau^N} \Big)^{\frac{1}{p'}} = \tau^{-N(1-\frac{1}{p'})}\|u\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'} \\
&= \tau^{-N/p}\|u\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, p' を p の双対指数である. □

同様の議論によって, 微分の各点評価も与えられる.

補題 5. $\beta \in \boldsymbol{N}_0^N$ とする. ここで, $\boldsymbol{N}_0$ は非負整数全体である. このとき各 $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}(\Omega)$ に対し,

$$|\partial^\beta u(X)| \leq C\delta_\Omega(X)^{-N/p-|\beta|}\|u\|_p$$

がなりたつ. ここで, C は β のみに依る定数である.

特に, $\Omega = \boldsymbol{R}^N$ の場合を考えれば, $\delta_\Omega(X) = \infty$ と解釈して次が得られる.

系 1. $1 \le p < \infty$ のとき $\boldsymbol{b}^{m,p}(\boldsymbol{R}^N) = \{0\}$ である. また, $p = \infty$ のとき $\boldsymbol{b}^{m,\infty}(\boldsymbol{R}^N) = \boldsymbol{R}$, すなわち定数関数に限る.

以上から, 多重調和ベルグマン空間の完備性が導かれる.

定理 1 の証明. $(u_j)_j$ を $\boldsymbol{b}^{m,p}$ の L^p-ノルムに関する Cauchy 列とする. そのとき, 多重指数 β に対し, $D^\beta u_j$ は広義一様セミノルムでの Cauchy 列になることからその収束先として $v_\beta \in C(\Omega)$ の存在がいえる.

今, 点 $X_0 \in \Omega$ および $r_0 > 0$ を $B_{r_0}(X_0) \subset \Omega$ となるようにとる. すると $X \in B_{r_0}(X_0)$ に対し,

$$u_j(X) - u_j(X_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(u_j(X_0 + t(X - X_0)\Big)dt$$

において $j \to \infty$ とすると, 帰納的に

$$v_\beta = D^\beta v_0$$

が得られる. こうして, $v_0 \in C^\infty(\Omega)$, $\Delta^m v_0 = 0$ および u_j が v_0 に L^p-ノルムで収束することがわかり, 証明が終わる. □

系 2. $\boldsymbol{b}^{m,2}(\Omega)$ の再生核を K とすると

$$K(X, X) \le C\delta_\Omega(X)^{-N}$$

がなりたつ.

証明. $K(X, \cdot) \in \boldsymbol{b}^{m,2}(\Omega)$ なので

$$K(X, X) \le C\delta_\Omega(X)^{-N/2}\|K(X, \ \cdot\ )\|_{L^2(\Omega)} = C\delta_\Omega(X)^{-N/2}K(X, X)^{1/2}$$

がなりたつ. □

本節の最後に, 次の評価を紹介する.

定理 5. $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}(\Omega)$ とするとノルム評価

$$\|\delta_\Omega^{|\beta|}\partial^\beta u\|_p \le C\|u\|_p$$

が得られる.

証明. 領域 Ω の Whitney 分解

$$\Omega = \bigcup_j Q_j$$

をとる. すなわち, Q_j は Ω にふくまれる立方体で, 辺の長さは境界までの距離と比較可能である. そして, 各辺は座標軸に並行で, さらにお互いの立方体同士は共通部分はあるとしても互いの境界のみである.

いま, 任意に j をとり, $\tau_j := \mathrm{dist}(Q_j, \partial\Omega)$ とおく. , すると各 $X \in \Omega$ に対し, 上の定理より,

$$|\partial^\beta u(X)| \le C\|u\|_{L^p(\widetilde{Q_j})}\tau_j^{-\frac{N}{p}-|\beta|}$$

ここで, $\widetilde{Q_j}$ は Q_j と中心が同じで大きさが 2 倍の立方体である. その結果,

$$\int_{Q_j} |\delta_\Omega(X)^{|\beta|}\partial^\beta u(X)|^p dX \le C\|u\|^p_{L^p(\widetilde{Q_j})}\tau_j^{-N} \le C\int_{\widetilde{Q_j}} |u|^p dX$$

がなりたつ. これを j について和をとると,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\delta_\Omega(X)^{|\beta|}\partial^\beta u(X)|^p dX &= \sum_j \int_{Q_j} |\delta_\Omega(X)^{|\beta|}\partial^\beta u(X)|^p dX \le C\sum_j \int_{\widetilde{Q_j}} |u|^p dX \\ &\le C\int_\Omega |u|^p dX\end{aligned}$$

となり, 証明が終わる. □

3 放物型作用素

この節では, 上半空間 $\boldsymbol{H}$ 上の α-次放物型作用素 $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ に関する基本的な性質を述べる. ここでは $n \ge 1$ とし $N := n + 1$ とおく.

Laplacian の分数べき $(-\Delta_x)^\alpha$ は次の Fourier multiplier

$$(-\Delta_x)^\alpha := \mathcal{F}_x^{-1}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}_x$$

で与えられる. ここで, $\mathcal{F}_x$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の Fourier 変換

$$\mathcal{F}_x\varphi(\xi) := \int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

である. 特に, $0 < \alpha < 1$, に対しては $(-\Delta_x)^\alpha$ は $-c_{n,\alpha}\mathrm{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$ による合成積作用素である. ここで, p.f. は有限部分を表し, 定数は

$$c_{n,\alpha} = -4^\alpha\pi^{-n/2}\Gamma\big((n+2\alpha)/2\big)/\Gamma(-\alpha) > 0$$

である. すなわち, $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対し,

$$(-\Delta_x)^\alpha \varphi(x) = -c_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y|>\delta} \big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\big)|y|^{-n-2\alpha}\, dy$$

である. ここで, $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ はコンパクト台の C^∞-関数全体を表す.

また, $L^{(\alpha)}$ の基本解は

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

で与えられる.

補題 6. $L^{(\alpha)} W^{(\alpha)} = \varepsilon$. 特に, $\boldsymbol{H}$ 上

$$(-\Delta_x)^\alpha W^{(\alpha)} = -\partial_t W^{(\alpha)}$$

がなりたつ. ここで ε は $0 \in \boldsymbol{R}^N$ における *Dirac* 測度を表す.

また, $\alpha = 1$ または $\alpha = 1/2$ のときには具体的に,

$$W^{(1)}(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad \text{and} \quad W^{(1/2)}(x,t) = \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\big(t^2 + |x|^2\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

と表される. 一般の $0 < \alpha < 1$ に対しては評価

$$0 \le W(x,t) \le Ct(t + |x|^{2\alpha})^{-\frac{n}{2\alpha} - 1} \tag{2}$$

がなりたつ. ここではさらに次が必要である ([9]).

補題 7. 多重指数 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \boldsymbol{N}_0^n$ と整数 $k \ge 0$ に対し,

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)| \le C\big(t + |x|^{2\alpha}\big)^{-(\frac{n+|\beta|}{2\alpha} + k)} \qquad ((x,t) \in \boldsymbol{H})$$

がなりたつ.

4 多重放物型 Bergman 空間

以下, 上半空間や帯状領域を $\boldsymbol{H}_\tau := \boldsymbol{R}^n \times (\tau, \infty)$ や $\boldsymbol{H}_{\tau_1,\tau_2} := \boldsymbol{R}^n \times (\tau_1, \tau_2)$ で表す. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{H}_{\tau,\infty}$ である. $\Omega = \boldsymbol{H}_{\tau_1,\tau_2}$ に対し,

$$\boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \,|\, \big(L^{(\alpha)}\big)^m u = 0, t^k \big(L^{(\alpha)}\big)^k u \in L^p(\Omega) \text{ for } 0 \le k \le m\}$$

とおく. まず Huygens 性と呼ばれる $m = 1$ の場合の平均値の性質が基本的である ([9]).

補題 8. $h \in \boldsymbol{b}^{1,p}_{\alpha}(\boldsymbol{H}_{\tau_1,\tau_2})$ と $\tau > 0$ に対し,

$$h = h * (W^{(\alpha)} dx \otimes d\varepsilon_\tau)(X) \qquad (X \in \boldsymbol{H}_{\tau_1+\tau,\tau_2})$$

がなりたつ. ここで, ε_τ は $\boldsymbol{R}$ 上の τ における *Dirac* 測度を表す.

何の増大条件もなくただ方程式 $L^{(\alpha)}h = 0$ の解というだけでは必ずしも上の Huygens 性は成り立たないことに注意する. そのために多重放物型 Bergman 空間の定義では技術的な条件 $t^k\left(L^{(\alpha)}\right)^k u \in L^p$ が課されている.

多重調和関数の Almanzi 分解に対応する結果は次のようになる.

補題 9. $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}_{\alpha}$ とする. そのとき, m 個の関数 $h_0 \cdot \cdots \cdot h_{m-1} \in C^\infty(H)$ がただ 1 組存在し, $Lh_k = 0$, $t^k h_k \in L^p(\boldsymbol{H})$ $(0 \le k < m)$, $u = h_0 + th_1 + \cdots + t^{m-1}h_{m-1}$ がなりたつ.

証明. 帰納法で示す. $m = 1$ のときは明らかなので, $m-1$ の場合を仮定し, 任意の $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}_{\alpha}$ をとる. $h_{m-1} := L^{m-1}u/(m-1)!$ を考え, $v := u - t^{m-1}h_{m-1}$ とおく. すると, $t^{m-1}h_{m-1} \in L^p$, $L^{m-1}v = 0$, $t^kL^kv = t^kL^ku - Ct^{m-1}h_{m-1} \in L^p(H)$ が各 k に対してなりたつので, 仮定により $v = h_0 + \cdots + t^{m-2}h_{m-2}$ と表される. これで, m の場合が示された. □

これより多重調和関数のときと同様にして平均値の性質が得られる.

補題 10. 整数 $m \ge 1$ と $0 < \alpha \le 1$ に対し, 関数 $\rho \in C_0^\infty(0,1)$ が存在し, $\tau > 0$ と $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}_{\alpha}$ に対し,

$$u = u * \mathcal{A}_\tau \quad on \quad \boldsymbol{H}_\tau$$

がなりたつ. ここで, $\mathcal{A}(x,t) := \rho(t)W^{(\alpha)}(x,t)$ で,

$$\mathcal{A}_\tau(x,t) := \tau^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}\mathcal{A}(\tau^{-\frac{1}{2\alpha}}x, \tau^{-1}t)$$

である.

証明. 補題 2 と同様にして $\tau = 1$ で ρ を構成し, スケール変換をすればよい. 以下証明の概略を述べる. $X_0 = (x_0, t_0) \in H_1$ をとり, 補題 9 を

$$u(x,t) = h_0 + (t_0 - t)h_1 + \cdots + (t_0 - t)^{m-1}h_{m-1}$$

と書く. $0 < t_1 < \cdots < t_m < 1$ をとると補題 8 により

$$u * (W^{(\alpha)} dx \otimes d\varepsilon_{t_j})(X_0) = h_0(X_0) + t_jh_1(X_0) + \cdots + t_j^{m-1}h_{m-1}(X_0) \qquad (3)$$

が得られる. 以下, 補題 2 と全く同様にして

$$u(X_0) = u * \mathcal{A}(X_0)$$

となる $\rho \in C_0^\infty(0,1)$ が構成される. 構成のしかたから ρ は X_0 に依存しない.

次に $\tau > 0$ に対しスケール不変性を用いると, $(x,t) \in \boldsymbol{H}_\tau$ に対し,

$$\begin{aligned} u * \mathcal{A}_\tau(x,t) &= \int_H u(x-y, t-s)\mathcal{A}_\tau(y,s)dyds \\ &= \tau^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} \int_H u(x-y,t-s)\mathcal{A}(\tau^{-\frac{1}{2\alpha}}y, \tau^{-1}s)dyds \\ &= \int_H u(\tau^{\frac{1}{2\alpha}}(\tau^{-\frac{1}{2\alpha}}x - y), \tau(\tau^{-1}t - s))\mathcal{A}(y,s)dyds \\ &= u(\tau^{\frac{1}{2\alpha}}(\tau^{-\frac{1}{2\alpha}}x), \tau(\tau^{-1}t)) = u(x,t) \end{aligned}$$

がなりたつ. □

補題 11. 整数 $k \geq 0$ と多重指数 β に対し

$$|\partial_t^k \partial_x^\beta u(x,t)| \leq Ct^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)}\|u\|_p$$

が $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ に対しなりたつ.

証明. $(x,t) \in H$ に対し $0 < \tau < t$ をとると,

$$\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}_\tau(x,t) = \partial_t^k \partial_x^\beta (\tau^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}\mathcal{A}(\tau^{-\frac{1}{2\alpha}}x, \tau^{-1}t)) = \tau^{-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)}(\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A})_\tau(x,t)$$

に注意すれば, 補題 10 によって,

$$\partial_t^k \partial_x^\beta u(x,t) = u * (\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}_\tau)(x,t) = \tau^{-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)} u * (\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A})_\tau(x,t)$$

がなりたつ. p の双対指数を p' とすると Hölder の不等式によって

$$|\partial_t^k \partial_x^\beta u(x,t)| \leq \tau^{-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}}\|u\|_p \cdot \|\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}\|_{p'}$$

が得られる. □

同様に次がなりたつ.

補題 12. $k, l \geq 0$ を整数 $0 < \alpha \leq 1$ とする. そのとき, $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ に対し

$$|\partial_t^k \left((-\Delta_x)^\alpha\right)^l u(x,t)| \leq Ct^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}-(l+k)}\|u\|_p$$

がなりたつ.

証明. 補題 10 により, $(-\Delta_x)^\alpha \mathcal{A}(x,t) = \rho(t)\partial_t W(x,t)$ と補題 6 から従う

$$(-\Delta_x)^\alpha \mathcal{A}_\tau(x,t) = \tau^{-1}\big(\rho \cdot \partial_t W\big)_\tau(x,t) = \tau^{-1}\big((-\Delta_x)^\alpha \mathcal{A}\big)_\tau(x,t)$$

に注意すればよい. □

補題 13. 整数 $k, l \geq 0$ と多重指数 β に対し

$$\|t^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k}\partial_t^k \partial_x^\beta u\|_p \leq C\|u\|_p \tag{4}$$

$$\|t^{l+k}\partial_t^k \big((-\Delta_x)^\alpha\big)^l u\|_p \leq C\|u\|_p \tag{5}$$

$$\|t^k L^k u\|_p \leq C\|u\|_p \tag{6}$$

が任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,p}$ に対してなりたつ.

証明. $\tau > 0$ とする. すると $\tau < t < 2\tau$ に対し,

$$\partial_t^k \partial_x^\beta u(x;t) = (\tau/2)^{-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)} u * (\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A})_{\tau/2}(x,t)$$

なので Minkowski の不等式によって

$$\|\partial_t^k \partial_x^\beta u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{\tau,2\tau})} \leq (\tau/2)^{-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)} \|u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{\tau/2,2\tau})} \cdot \|\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}\|_1$$

が得られる. したがって,

$$\|t^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k}\partial_t^k \partial_x^\beta u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{\tau,2\tau})} \leq 4^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k}\|\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}\|_1 \cdot \|u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{\tau/2,2\tau})}$$

となり, これらを加えて

$$\begin{aligned}
\|t^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k}\partial_t^k \partial_x^\beta u\|_{L^p(\boldsymbol{H})}^p &= \sum_{j\in\boldsymbol{Z}} \|t^{\frac{|\beta|}{2\alpha}+k}\partial_t^k \partial_x^\beta u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{2^j,2^{j+1}})}^p \\
&\leq 4^{(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)p}\|\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}\|_1^p \sum_{j\in\boldsymbol{Z}} \|u\|_{L^p(\boldsymbol{H}_{2^{j-1},2^{j+1}})} \\
&= 2 \times 4^{(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)p}\|\partial_t^k \partial_x^\beta \mathcal{A}\|_1^p \cdot \|u\|_{L^p(\boldsymbol{H})}
\end{aligned}$$

がなりたち, (4) が得られる. 他の評価 (5), (6) も同様に示される. □

以上から, 定理 1 と同様にして, 定理 3 が導かれる.

5 再生核

本節ではまず放物型 Bergman 空間の再生核を求め, 次に調和 Bergman 空間との関連を注意する.

5.1　多重放物型 Bergman 核.　ここでは, 形式的な計算により発見的に核の形を導出してみる.

$$u = h_0 + th_1 + \cdots + t^{m-1}h_{m-1} \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$$

を空間変数 x で Fourier 変換してみると

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,t) &= \widehat{h_0}(\xi,t) + t\widehat{h_1}(\xi,t) + \cdots + t^{m-1}\widehat{h_{m-1}}(\xi,t)\\ &= e^{-t|\xi|^{2\alpha}}(\widehat{h_0}(\xi,0) + t\widehat{h_1}(\xi,0) + \cdots + t^{m-1}\widehat{h_{m-1}}(\xi,0))\\ &= e^{-t|\xi|^{2\alpha}}(P_0(\xi,t)\widehat{v_0}(\xi,0) + P_1(\xi,t)\widehat{v_1}(\xi,0) + \cdots + P_{m-1}(\xi,t)\widehat{v_{m-1}}(\xi,0))\end{aligned}$$

となる. 最後の行は時間変数 t について Gram-Schmidt 直交化をほどこした. これにより K_α^m の Fourier 変換は

$$\widehat{K_\alpha^m}(t,s)(\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\xi,t)P_k(\xi,s)e^{-(t+s)|\xi|^{2\alpha}}$$

の形をしているはずである. ここで,

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t}dt = 2|\xi|^{2\alpha}\int_0^\infty |f(2|\xi|^{2\alpha}t)|^2 e^{-2|\xi|^{2\alpha}t}dt$$

であることから

$$\widehat{K_\alpha^m}(t,s)(\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} 2|\xi|^{2\alpha}p_k(2|\xi|^{2\alpha}t)p_k(2|\xi|^{2\alpha}s)e^{-(t+s)|\xi|^{2\alpha}}$$

が予想される. ここで, $(p_j)_{j=0}^\infty$ は $(0,\infty)$ 上の重み $e^{-t}dt$ の直交多項式である. これと基本解の Fourier 変換が $e^{-t|\xi|^{2\alpha}}$ であること, すなわち

$$W^{(\alpha)}(x,t) = (2\pi)^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}}e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

と比較して再生核が次のように導かれる.

定理 6. $X_1 = (x_1, t_1), Y_1 = (y_1, s_1) \in \boldsymbol{H}$ に対し,

$$K_\alpha^m(X_1,Y_1) := \sum_{k=0}^{m-1}(-2\partial_t)p_k(-2t_1\partial_t)p_k(-2s_1\partial_s)W^{(\alpha)}(x-y,t+s)\Big|_{X=X_1,Y=Y_1}$$

とおく. すると K_α^m による積分作用素は $L^2(\boldsymbol{H})$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$ への直交射影である.

証明. 次の性質を示せばよい:

(i) $\forall u \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$, $K_\alpha^m u = u$;

(ii) $\forall X \in \boldsymbol{H}$, $K_\alpha^m(X,\cdot) \in \boldsymbol{b}_\alpha^{m,2}$.

これらは, Fourier 変換を用いて示される. □

5.2 上半空間上の多重調和 Bergman 空間. 最後に, Ω が上半空間のとき, 放物型の空間との関係を与える.

まず, 次のノルム評価が必要である.

補題 14. $0 < \theta < 1$, 整数 $k \geq 0$, 多重指数 β に対し, 関数 $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}$ のノルム評価

(i) $|\partial_t^k \partial_x^\beta (-\Delta_x)^\theta u(x,t)| \leq C t^{-2\theta-k-|\beta|-\frac{n+1}{p}} \|u\|_p$

(ii) $\|t^{-2\theta-k-|\beta|} \partial_t^k \partial_x^l (-\Delta_x)^\theta u\|_p \leq C \|u\|_p$

がなりたつ.

証明. まず $\psi \in C_0^\infty(H)$ に対し

$$|(-\Delta_x)^\theta \psi(x,t)| \leq C|x|^{-n-2\theta}$$

に注意する. $\tau > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\big((-\Delta_x)^\theta \psi_\tau\big)(x,t) &= -c_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y|>\delta} \tau^{-n-1}\big(\varphi(\tau^{-1}(x-y)) - \varphi(\tau^{-1}x)\big)|y|^{-n-2\alpha}\, dy \\
&= -c_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y|>\tau^{-1}\delta} \tau^{-n-1}\big(\varphi(\tau^{-1}x-y) - \varphi(\tau^{-1}x)\big)|\tau y|^{-n-2\alpha}\tau^n\, dy \\
&= \tau^{-2\theta}\big((-\Delta_x)^\theta \psi\big)_\tau(x,t)
\end{aligned}$$

であるので, 補題 3 の φ に対し,

$$(-\Delta_x)^\theta \partial_x^\beta \partial_t^k \varphi_\tau = \tau^{-2\theta-k-|\beta|}\big((-\Delta_x)^\theta \partial_x^\beta \partial_t^k \varphi\big)_\tau$$

がわかる. ここで, $\varphi_\tau(X) = \tau^{-n-1}\varphi(\tau^{-1}X)$ である. 任意の $q \in [1,\infty]$ に対し, $(-\Delta_x)^\theta \partial_x^\beta \partial_t^k \varphi \in L^q$ であることに注意すれば, 補題 11 と補題 13 の証明と同様にして補題が証明される. □

以上から定理 4 が示される.

定理 4 の証明. $\boldsymbol{b}^{m,p}(H) \supset \boldsymbol{b}_{1/2}^{m,p}(H)$: 多重調和性のみが問題である.

$$u = h_0 + th_1 + \cdots + t^{m-1}h_{m-1} \in \boldsymbol{b}_{1/2}^{m,p}$$

とすると $\Delta^m u = 0$, なぜなら各 $\tau > 0$ に対し $h_0, h_1, \ldots, h_{m-1} \in \boldsymbol{b}_{1/2}^{1,p}(\boldsymbol{H}_\tau) = \boldsymbol{b}^{1,p}(\boldsymbol{H}_\tau)$.

$\boldsymbol{b}^{m,p}(H) \subset \boldsymbol{b}_{1/2}^{m,p}(H)$: $u \in \boldsymbol{b}^{m,p}$ とする. $\Delta(\Delta^{m-1}u) = \Delta^m u = 0$, なので補題 14 より $\tau > 0$ に対し, $\Delta^{m-1}u \in \boldsymbol{b}^{1,p}(\boldsymbol{H}_\tau) = \boldsymbol{b}_{1/2}^{1,p}(\boldsymbol{H}_\tau)$. よって

$$\Delta^{m-1}(L^{(1/2)}u) = L^{(1/2)}(\Delta^{m-1}u) = 0$$

がわかり, 再び補題 14 により $L^{(1/2)}u \in \boldsymbol{b}^{m-1,p}(H_\tau)$. 以下帰納法である. □

参考文献

[1] N. Aronszain, T. M. Creese, and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, Oxford, 1983.

[2] P. Caramuta and A. Cialdea, Mean value theorems for polyharmonic functions: a conjecture by Picone, Analysis (Berlin) 34 (2014), no. 1, 51–66.

[3] W. Haußmann and O. Kounchev, Definiteness of the Peano kernel associated with the polyharmonic mean value property, J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), no. 1, 149–160.

[4] M. Nicolescue, Equiaţia iterată a căldurii (L'équation itérée de la chaleur, Stud. Cerc. Mat., 5 (1954), No. 3–4, 243–332.

[5] M. Nishio, Reproducing kernels for iterated parabolic operators on the upper half space with application to polyharmonic Bergman spaces, Preprint.

[6] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A mean value property of poly-temperatures on a strip domain, J. London Math. Soc., (2) **58** (1998) 381–393.

[7] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A general form of a mean value property for poly-temperatures on a strip domain, in Proceedings od the seventh international colloquium on differential equations, 269–276, D. Bainov, ed., VSP, Utrecht, 1997.

[8] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, Note on poly-supertemperatures on a strip domain, Osaka J. Math., 36 (1999), 539–556.

[9] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.

[10] W. C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 633–660.

[11] M. Riesz, Intégral de Riemann—Liouville et potentiels, Acta Szeged 9 (1938), 1–42.

西尾昌治
大阪市立大学大学院理学研究科数学教室
〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138
e-mail: nishio@sci.osaka-cu.ac.jp