数理解析研究所講究録
第 1981 巻 2016 年 66-74



# 価格競争におけるロバストナッシュ均衡問題について

横浜国立大学　国際社会科学院　成島康史
横浜国立大学　経営学部　平野達也

**概要:** 本論文では価格競争における均衡問題を取り扱う. 価格競争において生じるゲームを考えたときの均衡はベルトラン–ナッシュ均衡と呼ばれ, 経済学において基本的な概念のひとつとなっている. 一方, 近年, 情報が不完全な場合のゲームにおける均衡概念として, ベイジアンナッシュ均衡やロバストナッシュ均衡が注目されている. 本論文では, 価格競争において相手の戦略に不確実性が含まれている状況を考え, 各プレイヤーが最悪の状況を想定して, 自分の利得関数を最大化するようなロバストナッシュ均衡問題を定式化する. さらに, それを求解可能な形式にするために, 2 次錐相補性問題として再定式化する.

## 1 はじめに

我々は様々な意思決定を行っているが, 自分の意思決定は他者の意思決定に影響を及ぼし, 逆に他者の意思決定は自分の意思決定に影響を及ぼしている. このような状況における意思決定を分析する理論として, ゲーム理論がよく知られている. Nash [8] は非協力ゲームを定義し, その均衡 (Nash 均衡と呼ばれる) の概念を与えた. Nash 均衡は情報完備のゲームにおける均衡概念である. ここで, 情報完備とは, ゲームのパラメータや自分や相手のプレイヤーの利得関数などをすべてわかっており, またそのこと自体が共通認識であるような状況を意味する. しかしながら, 現実社会では情報完備の仮定が常に満たされるとは限らない. そのため, 多くの研究者によって不完備情報下のゲームが研究されており, ベイジアンナッシュ均衡 [3–5] やロバストナッシュ均衡 [1,7,9] などといった均衡概念が提案されている.

一方, 寡占市場での価格競争 (ベルトラン競争と呼ぶ) において生じるゲームを考えたときの均衡はベルトラン-ナッシュ均衡と呼ばれ, 経済学において基本的な概念のひとつとなっている. 本論文では, ベルトラン競争において, 各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略を正確には知ることのできない状況でのロバストゲームを考える.

ここで, 本論文で扱うベルトラン競争のモデルを導入する. まず, プレイヤー数を $N$ 人とし, プレイヤー $i$ $(i = 1, \dots, N)$ は $n_i$ 種類の財を扱い, 財を $q_i \in \boldsymbol{R}^{n_i}$ で仕入れて, $p^i \in \boldsymbol{R}^{n_i}$ で販売する. また, $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ とする. さらに, プレイヤー $i$ の扱う財の需要を表す関数 $d_i : \boldsymbol{R}^{n_i} \to \boldsymbol{R}^{n_i}$ を

$$d_i(p^i) = r_i - A_{ii}p^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ij}p^j = r_i - A_{ii}p^i + A_{-i}p^{-i} \tag{1.1}$$

とする. ただし, $r_i \in \boldsymbol{R}^{n_i}$, $A_{ii} \in \boldsymbol{R}^{n_i\times n_i}$, $A_{ij} \in \boldsymbol{R}^{n_i\times n_j}$, $p^{-i} = \underset{\substack{1\le j\le N \\ j\neq i}}{\mathrm{vertical}} (p^j) \in \boldsymbol{R}^{n-n_i}$ とし,

$$A_{-i} = [A_{i1}\ A_{i2} \dots A_{i\ i-1}\ A_{i\ i+1} \dots A_{iN}] \in \boldsymbol{R}^{n_i\times(n-n_i)}$$

とする. ここで,

$$\underset{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}}{\mathrm{vertical}} (p^j) = [(p^1)^T, \ldots, (p^{i-1})^T, (p^{i+1})^T, \ldots, (p^N)^T]^T$$

であり, 他のベクトルや行列に関しても同様の表記を用いることとする. ベクトル $d_i(p^i)$ の各要素は価格が $p^i$ のときの各財の需要を表している. また, (1.1) は基礎的な需要が $r_i$ であり, それに自分の価格 $p^i$ や, 他のプレイヤーの価格 $p^{-i}$ によって需要が変化することを示している. 次にプレイヤー $i$ の利得関数を考えると

$$\begin{aligned} d_i(p^i)^T(p^i - q_i) &= (r_i - A_{ii}p^i + A_{-i}p^{-i})^T(p^i - q_i) \\ &= -(p^i)^T A_{ii} p^i + (p^i - q_i)^T A_{-i} p^{-i} + (r_i + A_{ii}^T q_i)^T p_i - r_i^T q_i \\ &= -(p^i)^T A_{ii} p^i + (p^i - q_i)^T A_{-i} p^{-i} + \tilde{r}_i^T p_i - r_i^T q_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

で表される. ただし, $\tilde{r}_i = r_i + A_{ii}^T q_i \in \boldsymbol{R}^{n_i}$ とする. よって, プレイヤー $i$ の価格の上限を $p_{i\max} \in \boldsymbol{R}^{n_i}$ とすると, プレイヤー $i$ の解くべき問題は

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \max\limits_{p^i} & f_i(p^i) = -(p^i)^T A_{ii} p^i + \tilde{r}_i^T p_i + (p^i - q_i)^T A_{-i} p^{-i} \\ & \text{subject to} & 0_{n_i} \leq p^i \leq p_{i\max} \end{array}$$

となる. ここで, もし $A_{ii}$ が正定値ならば, 上記の問題は凸計画問題となるため, KKT 条件を満たす点が解となる. よって, 以降では $A_{ii}$ は正定値であると仮定する.

## 2 価格競争におけるロバストナッシュ均衡問題

本節では, 前節で導入したベルトラン競争において, 自分以外の戦略が正確にわからない状況で, 各プレイヤーが最悪の状況を想定しながら自分の利得関数を最適化するようなロバストナッシュ均衡問題を考える. さらに, 各プレイヤーの解く問題を 2 次錐計画問題に再定式化し, それを用いることで, ロバストナッシュ均衡問題を 2 次錐相補性問題へと再定式化する.

まず本論文では, プレイヤー $i$ は以下の問題を解いて意思決定を行うと仮定する:

$$\begin{array}{lll} \text{(RC1)} & \max\limits_{p^i} & \tilde{f}_i(p^i) = \min\limits_{\tilde{p}^{-i} \in \mathcal{P}_{-i}} \; -(p^i)^T A_{ii} p^i + \tilde{r}_i^T p_i + (p^i - q_i)^T A_{-i} \tilde{p}^{-i} \\ & \text{subject to} & 0_{n_i} \leq p^i \leq p_{i\max} \end{array}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{-i} &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathcal{P}_{ij} \\ \mathcal{P}_{ij} &= \{\tilde{p}^j = p^j + P_{ij}\Delta p^j \mid \|\Delta p^j\| \leq \rho_{ij},\ 0_{n_j} \leq p^j + P_{ij}\Delta p^j \leq p_{j\max}\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

とする. ここで, $\mathcal{P}_{-i}$ はプレイヤー $i$ に対する不確実性集合で, プレイヤー $i$ は他のプレイヤーの戦略を $p^j + P_{ij}\Delta p^j$ といった形式で, ずれを含んだ形でしか知ることができないことを意味している. また, $\rho_{ij} > 0$ は不確実性の大きさをつかさどるパラメータで, $P_{ij} \in \boldsymbol{R}^{n_j \times n_j}$

は正定値対称行列であるとする．$P_{ij} \in \boldsymbol{R}^{n_j \times n_j}$ が正定値対称行列であるため，不確実集合 $\mathcal{P}_{-i}$ は楕円を表すことを注意しておく．問題 (RC1) は目的関数に min 関数を含むため，このままでは問題を実際に解くのは難しい．そこで，本論文では，各プレイヤーの解く問題を 2 次錐計画問題に再定式化することとする．まず，$\tilde{f}_i$ の定義より，

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_i(p^i) &= -(p^i)^T A_{ii} p^i + \tilde{r}_i^T p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \min_{\tilde{p}^j \in \mathcal{P}_{ij}} (p^i - q_i)^T A_{ij} \tilde{p}^j \\
&= -(p^i)^T A_{ii} p^i + \tilde{r}_i^T p_i + (p^i - q_i)^T A_{-i} p^{-i} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \min_{\Delta p^j} \{ (p^i - q_i)^T A_{ij} \Delta p^j \mid \|\Delta p^j\| \le \rho_{ij}, \\
&\qquad 0_{n_j} \le p^j + P_{ij} \Delta p^j \le p_{j\,\max} \}
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

が成立する．さらに，ここで以下の問題を考える：

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SP1)} & \displaystyle\min_{\Delta p^j} & (p^i - q_i)^T A_{ij} \Delta p^j \\
& \text{subject to} & \|\Delta p^j\| \le \rho_{ij} \\
& & 0_{n_j} \le p^j + P_{ij} \Delta p^j \le p_{j\,\max}
\end{array}
$$

(SP1) は (2.4) で表される最小化問題だけを取り出した問題であることに注意しよう．ここで，(2.4) は以下の 2 つの形式に書き直せる：

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SP2)} & \displaystyle\min_{\Delta p_0^j, \Delta p^j, s_1^j, s_2^j} & (p^i - q_i)^T A_{ij} \Delta p^j \\
& \text{subject to} & \Delta p_0^j = \rho_{ij} \\
& & \|\Delta p^j\| \le \Delta p_0^j \\
& & P_{ij} \Delta p^j - s_1^j = -p^j \\
& & P_{ij} \Delta p^j + s_2^j = p_{j\,\max} - p^j \\
& & s_1^j, s_2^j \ge 0_{n_j}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SP3)} & \displaystyle\min_{\Delta p_0^j, \Delta p^j, s_1^j, s_2^j} & \begin{bmatrix} 0 \\ A_{ij}^T (p^i - q_i) \\ 0_{n_j} \\ 0_{n_j} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta p_0^j \\ \Delta p^j \\ s_1^j \\ s_2^j \end{bmatrix} \\
& \text{subject to} & \begin{bmatrix} 1 & 0_{n_j}^T & 0_{n_j}^T & 0_{n_j}^T \\ 0_{n_j} & P_{ij} & -I_{n_j} & O_{n_j} \\ 0_{n_j} & P_{ij} & O_{n_j} & I_{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_0^j \\ \Delta p^j \\ s_1^j \\ s_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ij} \\ -p^j \\ p_{j\,\max} - p^j \end{bmatrix} \\
& & \begin{bmatrix} \Delta p_0^j \\ \Delta p^j \\ s_1^j \\ s_2^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{1+n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j}
\end{array}
$$

ただし，$\mathcal{K}^{1+n}$ は $1+n$ 次元の 2 次錐であるとする．一般に，$m$ 次元の 2 次錐とは

$$
\mathcal{K}^m = \{ (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{m-1} \mid \|x_2\| \le x_1 \}
$$

で定義される集合であり, $\mathcal{K}^1$ のときは非負象限, つまり $\mathcal{K}^1 = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geq 0\}$ であると定義する. 今, (SP3) の双対問題を考えると

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SD1)} & \displaystyle\max_{v_0^{ij},\bar{v}_1^{ij},\bar{v}_2^{ij}} & \begin{bmatrix} \rho_{ij} \\ -p^j \\ p_{j\max} - p^j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_0^{ij} \\ \bar{v}_1^{ij} \\ \bar{v}_2^{ij} \end{bmatrix} \\
& \text{subject to} & \tilde{P}_{ij} v^{ij} + \tilde{A}_{ij} p^i + \tilde{q}_{ij} \in \mathcal{K}^{1+n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j}
\end{array}
$$

となる. ただし,

$$
\tilde{P}_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0_{n_j}^T & 0_{n_j}^T \\ 0_{n_j} & -P_{ij} & -P_{ij} \\ 0_{n_j} & I_{n_j} & O_{n_j} \\ 0_{n_j} & O_{n_j} & -I_{n_j} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+3n_j)\times(1+2n_j)}, \qquad v^{ij} = \begin{bmatrix} v_0^{ij} \\ \bar{v}_1^{ij} \\ \bar{v}_2^{ij} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{1+2n_j}
$$

$$
\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{n_i}^T \\ A_{ij}^T \\ O_{n_j\times n_i} \\ O_{n_j\times n_i} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+3n_j)\times n_i}, \qquad \tilde{q}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{ij}^T q_i \\ 0_{n_j} \\ 0_{n_j} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{1+3n_j}
$$

である. また, (SD1) は以下のようにも表現することができる:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SD2)} & \displaystyle\max_{v_0^{ij},\bar{v}_1^{ij},\bar{v}_2^{ij}} & \rho_{ij} v_0^{ij} - (p^j)^T \bar{v}_1^{ij} + (p_{j\max} - p^j)^T \bar{v}_2^{ij} \\
& \text{subject to} & \begin{bmatrix} -v_0^{ij} \\ -P_{ij}\bar{v}_1^{ij} - P_{ij}\bar{v}_2^{ij} + A_{ij}^T(p^i - q_i) \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{1+n_j} \\
& & \bar{v}_1^{ij} \geq 0_{n_j}, \quad \bar{v}_2^{ij} \leq 0_{n_j}.
\end{array}
$$

ここで, 2次錐計画問題に対してよく知られた以下のような定理を紹介しておく (例えば [2] を参照).

**Theorem 2.1.** 線形2次錐計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える:

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & \min_x & c^T x & (D) & \max_{y,z} & b^T y \\
& \text{subject to} & Ax = b & & \text{subject to} & A^T y + z = c \\
& & x \in \mathcal{K} & & & z \in \mathcal{K}
\end{array}
$$

ただし, $\mathcal{K}$ はいくつかの2次錐の直積であるとする. このとき, $\mathcal{K}$ の内点であるような実行可能解が主問題 (P) と双対問題 (D) の両方に存在するならば, 双方ともに最適解が存在して, その最適値は等しい.

上記の定理を用いることで以下の命題を得る.

**Proposition 2.1.** $0 \leq p^j \leq p_{j\max}$ ならば, 主問題 (SP1) と双対問題 (SD1) 共に最適解を持ち, その最適値は等しい.

*Proof.* Theorem 2.1 より, 主問題 (SP2) と双対問題 (SD2) が共に実行可能内点解を持つことを示せばよい. (SD2) が実行可能内点解を持つことは自明であるので, (SP2) が実行可能内点解を持つことを示す. (SP2) が実行可能内点解を持つことを示すためには

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\Delta p_0^j = \rho_{ij}, & \|\Delta p^j\| < \Delta p_0^j, & \\
P_{ij}\Delta p^j - s_1^j = -p^j, & P_{ij}\Delta p^j + s_2^j = p_{j\max} - p^j, & s_1^j, s_2^j > 0_{n_j}
\end{array}
\right. \tag{2.5}
$$

となるような $\Delta p_0^j, \Delta p_0^j, s_1^j, s_2^j$ が存在することを示せばよい. ここで, ベクトル $p^j$ の $k$ 番目の成分を $(p^j)_k$ で表し (他のベクトルに対しても同様の表記を用いる), 添え字集合 $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ を

$$\mathcal{I}_1 = \{k \mid (p^j)_k = 0\}, \quad \mathcal{I}_2 = \{k \mid (p_{j\max})_k - (p^j)_k = 0\}$$

によって定義する. ここで, $p_{j\max} > 0$ より $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$ であることを注意しておく. さらに, $\Delta p^j, s_1^j, s_2^j$ を

$$\begin{aligned}
(P_{ij}\Delta p^j)_k &= \begin{cases} \varepsilon & k \in \mathcal{I}_1 \\ -\varepsilon & k \in \mathcal{I}_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
(s_1^j)_k &= \begin{cases} \varepsilon & k \in \mathcal{I}_1 \\ (p^j)_k - \varepsilon & k \in \mathcal{I}_2 \\ (p^j)_k & \text{else} \end{cases} \\
(s_2^j)_k &= \begin{cases} (p_{j\max})_k - (p^j)_k - \varepsilon & k \in \mathcal{I}_1 \\ \varepsilon & k \in \mathcal{I}_2 \\ (p_{j\max})_k - (p^j)_k & \text{else} \end{cases}
\end{aligned}$$

を満たすように選択する. ただし, $\varepsilon > 0$ は

$$\|\Delta p^j\| < \rho_{ij}, \quad \varepsilon < \min\left\{\min_{k\in\mathcal{I}_1}\{(p_{j\max})_k - (p^j)_k\}, \min_{k\in\mathcal{I}_2}\{(p^j)_k\}\right\}$$

を満たす正の定数とする. このとき, $\Delta p_0^j = \rho_{ij}$ とすれば, これらは (2.5) を満たすことが簡単に確認できる. □

Proposition 2.1 と (2.4) より, (RC1) は以下のように書き換えることができる :

$$\begin{aligned}
\text{(RC2)} \quad & \max_{p^i,\bar{v}_0^{ij},\bar{v}_1^{ij},\bar{v}_2^{ij}} \quad -(p^i)^T A_{ii} p^i + \tilde{r}_i^T p_i + (p^i - q_i)^T A_{-i} p^{-i} \\
& \qquad + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(\rho_{ij} v_0^{ij} - (p^j)^T \bar{v}_1^{ij} + (p_{j\max} - p^j)^T \bar{v}_2^{ij}\right) \\
& \text{subject to} \quad 0_{n_i} \le p^i \le p_{i\max} \\
& \qquad \tilde{P}_{ij} v^{ij} + \tilde{A}_{ij} p^i + \tilde{q}_{ij} \in \mathcal{K}^{1+n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j}, \qquad j = 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,N
\end{aligned}$$

さらに, $m_i = 2n + N - n_i - 1$, $\ell_i = 3n + N - n_i - 1$,

$$z^i = \begin{bmatrix} p^i \\ v^i \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m_i}, \quad v^i = \underset{\substack{1\le j\le N \\ j\neq i}}{\text{vertical}}\ (v^{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m_i - n_i}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0_{n_i} \\ p_{i\max} \\ \underset{\substack{1\le j\le N \\ j\neq i}}{\text{vertical}}\ (\tilde{q}^{ij}) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\ell_i},$$

$$M_i = \begin{bmatrix} I_{n_i} & O \\ -I_{n_i} & O \\ \underset{\substack{1\le j\le N \\ j\neq i}}{\text{vertical}}\ (\tilde{A}_{ij}) & \underset{\substack{1\le j\le N \\ j\neq i}}{\text{diag}}\ (\tilde{P}_{ij}) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\ell_i \times m_i}$$

とおくと, 制約条件は

$$M_i z^i + b_i \in \boldsymbol{R}_+^{n_i} \times \boldsymbol{R}_+^{n_i} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\mathcal{K}^{1+n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j} \times \boldsymbol{R}_+^{n_j}) \equiv \mathcal{K}_i \tag{2.6}$$

で表される. 一方,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ii} &= \begin{bmatrix} A_{ii} & O_{n_i, m_i - n_i} \\ O_{m_i - n_i, n_i} & O_{m_i - n_i} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m_i}, \quad \bar{\rho}_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_{ij} \\ 0_{2n_j} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{1+2n_j}, \\
\bar{\rho}_i &= \begin{bmatrix} 0_{n_i} \\ \underset{\substack{1 \le j \le N \\ j \neq i}}{\text{vertical}} \, (\bar{\rho}_{ij}) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m_i}, \quad V_i = [I_{n_i} \; O_{n_i, m_i - n_i}] \in \boldsymbol{R}^{n_i \times m_i}, \\
N_{ij} &= [0_{n_j} \, I_{n_j} \, O_{n_j}], \in \boldsymbol{R}^{n_j \times (1+2n_j)}, \quad L_{ij} = [0_{n_j} \, O_{n_j} \, I_{n_j}], \in \boldsymbol{R}^{n_j \times (1+2n_j)}, \\
\bar{N}_i &= \begin{bmatrix} O_{n-n_i, n_i} & \underset{\substack{1 \le j \le N \\ j \neq i}}{\text{diag}} \, (N_{ij}) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(n-n_i) \times m_i}, \\
\bar{L}_i &= \begin{bmatrix} O_{n-n_i, n_i} & \underset{\substack{1 \le j \le N \\ j \neq i}}{\text{diag}} \, (L_{ij}) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(n-n_i) \times m_i}, \\
\bar{p}_{-i\max} &= \underset{\substack{1 \le j \le N \\ j \neq i}}{\text{vertical}} \, (p_{i\max}) \in \boldsymbol{R}^{n-n_i}
\end{aligned}$$

とおけば, 目的関数は

$$\begin{aligned}
f_i(z^i) &= -(z^i)^T \tilde{A}_{ii} z^i + \tilde{r}_i^T V_i z^i + (p^{-i})^T A_{-i}^T V_i z^i - q_i^T A_{-i} p^{-i} \\
&\quad + \bar{\rho}_i^T z^i - (p^{-i})^T \bar{N}_i z^i + \bar{p}_{-i\max}^T \bar{L}_i z^i - (p^{-i})^T \bar{L}_i z^i \\
&= -(z^i)^T \tilde{A}_{ii} z^i + (p^{-i})^T (A_{-i}^T V_i - \bar{N} - \bar{L}_i) z^i + (V_i^T \tilde{r}_i + \bar{\rho}_i + \bar{L}_i^T \bar{p}_{-i\max})^T z^i - q_i^T A_{-i} p^{-i} \\
&= -(z^i)^T \tilde{A}_{ii} z^i + (p^{-i})^T W_i z^i + u_i^T z^i - q_i^T A_{-i} p^{-i}
\end{aligned}$$

で表せる. ただし,

$$W_i = A_{-i}^T V_i - \bar{N}_i - \bar{L}_i, \quad u_i = V_i^T \tilde{r}_i + \bar{\rho}_i + \bar{L}_i^T \bar{p}_{-i\max}$$

とする. したがって, プレイヤー $i$ の解く問題は

$$\begin{array}{lll}
\text{(RC3)} & \displaystyle\max_{z^i} & f_i(z^i) = (z^i)^T \tilde{A}_{ii} z^i - (p^{-i})^T W_i z^i - u_i^T z^i + q_i^T A_{-i} p^{-i} \\
& \text{subject to} & M_i z^i + b_i \in \mathcal{K}_i
\end{array}$$

となる. ここで, $\tilde{A}_{ii}$ の定義と $A_{ii}$ が正定値であるという仮定から, $\tilde{A}_{ii}$ は半正定値であることがわかる. よって, (RC3) は凸計画問題となる. (RC3) の KKT 条件を考えると

$$\begin{gathered}
2\tilde{A}_{ii} z^i - W_i^T p^{-i} - u^i - M_i^T y^i = 0, \\
M_i z^i + b_i \in \mathcal{K}_i, \quad y^i \in \mathcal{K}_i, \quad (y^i)^T (M_i z^i + b_i) = 0
\end{gathered}$$

となる．ただし，$y^i \in \boldsymbol{R}^{\ell_i}$ はラグランジュ乗数である．さらに $x^i = M_i z^i + b_i$ とおくと，上の KKT 条件は

$$x^i \in \mathcal{K}_i, \quad y^i \in \mathcal{K}_i, (x^i)^T y^i = 0 \quad F_i(x^i, y^i, z^i) = \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_{ii} z^i - W_i^T p^{-i} - u^i - M_i^T y^i \\ M_i z^i + b_i - x^i \end{bmatrix} = 0$$

と書き直すことができる．ここで，$\ell = \sum_{i=1}^N \ell_i$, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ とし，さらに

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^\ell, \quad y = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^\ell, \quad z = \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^N \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^m, \quad \mathcal{K} = \prod_{i=1}^N \mathcal{K}_i \in \boldsymbol{R}^\ell$$

とする．さらに，$\tilde{F}^i : \boldsymbol{R}^{2\ell+m} \to \boldsymbol{R}^{\ell+m}$ を

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1(x, y, z) \\ \vdots \\ \tilde{F}_N(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_i(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_{ii} z^i - W_i^T p^{-i} - u^i - M_i^T y^i \\ M_i z^i + b_i - x^i \end{bmatrix}$$

によって定義する．ここで，$F_i$ は $p^{-i}$ を定数として扱っているのに対し，$\tilde{F}_i$ は $p^{-i}$ を変数として扱っていることを注意しておく．以上より，各プレイヤーが (RC1) を解くようなロバストナッシュ均衡問題は線形 2 次錐相補性問題

$$x \in \mathcal{K}, \quad y \in \mathcal{K}, \quad x^T y = 0 \quad F(x, y, z) = 0 \tag{2.7}$$

に再定式化される．

# 3 数値実験

本節では，前節で提案したロバストナッシュ均衡問題に対する数値実験例を紹介する．今回の実験ではプレイヤー数を 2 人 ($N = 2$) とし，各プレイヤーの扱う商品数を 2 種類 ($n_1 = n_2 = 2$) とした．各問題は前節で紹介したように線形 2 次錐相補性問題 (2.7) に再定式化し，それを解くことでロバストナッシュ均衡点を求めた．再定式化された線形 2 次錐相補性問題は ReSNA [6] を用いて数値的に解いている．

まず，1 つ目の例として，以下のようなパラメータで実験を行った:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 62 & 12 \\ 12 & 49 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = A_{12}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 46 & 10 \\ 10 & 65 \end{pmatrix},$$

$$p_{1\max} = \begin{pmatrix} 117 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad p_{2\max} = \begin{pmatrix} 120 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 849 \\ 1227 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1976 \\ 440 \end{pmatrix}.$$

表 1: 数値実験結果 1

| $\rho$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | 5 | 10 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 24.49 | 24.52 | 24.55 | 24.58 | 24.6 | 24.63 | 25.15 | 25.6 | 25.95 |
| | 18.47 | 18.49 | 18.5 | 18.52 | 18.53 | 18.55 | 18.84 | 19.06 | 19.08 |
| $p_2$ | 43.91 | 43.9 | 43.89 | 43.87 | 43.86 | 43.84 | 43.57 | 43.21 | 41.69 |
| | 6.867 | 6.838 | 6.809 | 6.779 | 6.75 | 6.721 | 6.13 | 5.347 | 2.436 |

今回の実験では $P_{ij}$ を単位行列とし, 不確実性の大きさを表すパラメータである $\rho$ の大きさを変化させて実験を行った. その結果が表 1 にまとめられている.
この例では, プレイヤー 1 は不確実性が大きくなるのにつれて価格が上昇しているのに対し, プレイヤー 2 は不確実性が大きくなるのにつれて価格が下落している.

次に, 2 つ目の例として, 以下のようなパラメータで実験を行った:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}44 & 5\\ 5 & 52\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 7 & 8\end{pmatrix},\quad A_{21}=A_{12},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}45 & 3\\ 3 & 58\end{pmatrix},$$

$$p_{1\max}=\begin{pmatrix}191\\ 84\end{pmatrix},\quad p_{2\max}=\begin{pmatrix}223\\ 60\end{pmatrix},\quad q_1=\begin{pmatrix}26\\ 18\end{pmatrix},\quad q_2=\begin{pmatrix}35\\ 11\end{pmatrix},$$

$$r_1=\begin{pmatrix}1914\\ 1022\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}1129\\ 1987\end{pmatrix}.$$

最初の例と同様に $P_{ij}$ を単位行列とし, 不確実性の大きさを表すパラメータである $\rho$ の大きさを変化させて実験を行った. 結果は表 2 にまとめられている.

表 2: 数値実験結果 2

| $\rho$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | 5 | 10 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 36.16 | 36.15 | 36.13 | 36.12 | 36.1 | 36.08 | 35.76 | 35.36 | 32.29 |
| | 20.66 | 20.64 | 20.62 | 20.6 | 20.58 | 20.56 | 20.15 | 19.65 | 16.7 |
| $p_2$ | 31.12 | 31.1 | 31.09 | 31.08 | 31.06 | 31.05 | 30.76 | 30.41 | 28.94 |
| | 25.53 | 25.51 | 25.49 | 25.47 | 25.45 | 25.43 | 25.04 | 24.54 | 22.04 |

この例では, 両プレイヤーともに不確実性が大きくなるとともに価格が下がっている.

今回は 2 つの例で数値実験を行ったが, 一定の傾向はなく, パラメータの値によって, 不確実性の大きさと均衡点の挙動の関係が変わることが分かった. しかしながら, パラメータの値と均衡点の挙動がどのように関係しているのかについては, まだ分かっておらず, 今後の課題である.

# Acknowledgments

この研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金若手研究 (B)(25870239) の支援を受けて行われている.

# 参考文献


[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, *Mathematical Programming*, **107** (2006), 231–273.

[2] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programming, *Mathematical Programming*, 95 (2003), 3–51.

[3] J. Harsanyi, Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part I, *Management Science*, **14** (1967), 159–182.

[4] J. Harsanyi, Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part II, *Management Science*, **14** (1968), 320–334.

[5] J. Harsanyi, Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part III, *Management Science*, **14** (1968), 486–502.

[6] S. Hayashi, Manual of ReSNA –matlab software for mixed nonlinear second-order cone complementarity problems based on Regularized Smoothing Newton Algorithm–, ReSNA website, (2013)
`http://www.plan.civil.tohoku.ac.jp/opt/hayashi/ReSNA/`

[7] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6 (2005), 283–296.

[8] J. Nash, Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, **54** (1951), 286–295.

[9] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushima, Robust Nash equilibria in N-person non-cooperative games: Uniqueness and reformulation, *Pacific Journal of Optimization*, **5** (2011), 237–259.