数理解析研究所講究録
第1981巻 2016年 149-157

平滑化法を用いたマルチリーダーフォロワーゲームの解法

京都大学情報学研究科　*露口 大介（Daisuke Tsuyuguchi）
Kyoto University, Graduate School of informatics

京都大学情報学研究科　福田 エレン 秀美（Ellen Hidemi Fukuda）
Kyoto University, Graduate School of informatics

京都情報大学院大学　胡 明（Ming Hu）
The Kyoto College of Graduate Studies for Informatics

南山大学理工学部　福島 雅夫（Masao Fukushima）
Nazan University, Faculty of Science and Engineering

概 要

マルチリーダーフォロワーゲームは，経済やオペレーションズリサーチなど多くの分野に応用される重要なモデルである．しかし，特別なクラスの問題を除いて，一般の問題に対する解法は十分に研究されているとは言い難い．本稿では，平滑化法を用いることで，フォロワーの制約に不等式が含まれている問題の数値解法を考える．はじめに非協力ゲームとマルチリーダーフォロワーゲームの定式化を行い，その後，平滑化法を用いた解法を紹介する．最後に簡単な問題で数値実験した結果を示す．

1　序論

何人かのプレイヤーが非協力ゲームに参加している状況を考える．それらのプレイヤーが，複数の先手（リーダー）と後手（フォロワー）に分類されるとき，そのゲームを**マルチリーダーフォロワーゲーム (multi-L/F ゲーム)** という．multi-L/F ゲームは，2つ以上の寡占企業が存在する寡占市場においてしばしば見られるゲームである．例として，規制緩和された電力市場や自動車業界などがあげられる [5,9,10]．ある業界において，十分な財力・技術を持つ大企業（リーダー）は，その力を用いて業界を牽引する行動をとることができ，業界内で最初に行動をとる．リーダーの行動を観察した後に，その他の小さな企業（フォロワー）が自身の効用を最適化するような行動をとる．

一般的に multi-L/F ゲームは，ゲームのプレイヤーのうち2人以上はリーダーとして存在し，その他のプレイヤーはフォロワーとして存在するゲームである．どのプレイヤーも協力関係を持たず，それぞれのクラスで自身の効用を最適化しようとしている．すべてのリーダーは，他のリーダーと競合する非協力ナッシュゲームの中で，フォロワーの戦略を予想しながら最適な戦略を決定し，フォロワーは，リーダーの戦略に対応して最適な戦略をとる．この multi-L/F ゲームでは，非協力ナッシュゲームと同様に，どのプレイヤーも自分だけが戦略を変えることで状況を改善することができないときの戦略の組をゲームの解と考えることができる．この戦略の組をリーダーフォロワーナッシュ均衡 (L/F Nash equilibrium) と呼ぶ．この解は，リーダーがフォロワーの予

想を楽観的 (optimistic) に行うか悲観的 (pessimistic) に行うかによって分類することができ，前者を楽観的 L/F ナッシュ均衡，後者を悲観的 L/F ナッシュ均衡という．

Multi-L/F ゲームは難しい問題と知られており，均衡解の存在を保証するにはいくつかの仮定が必要となる．解を得る手法として，フォロワーの問題に線形な等式制約が含まれるものに対する解法 [5] や，不確実性を考慮したモデルに対する解法 [7] などが提案されているが，フォロワーの制約に不等式制約が含まれる場合の解法はあまり提案されておらず，十分に研究されているとは言い難い．Multi-L/F ゲームに関する最近の研究については [8] を参考にして頂きたい．本研究は，**平滑化法** [2] を用いて EPEC の解を計算する手法 [6] を，フォロワーの問題が不等式制約を含む multi-L/F ゲームに適応できるよう拡張したものを提案する．

2 準備

本節では準備として，multi-L/F ゲームの基本となる N 人非協力ゲームをナッシュ均衡問題として定式化する．また，ナッシュ均衡問題の解が一意に存在するための十分条件を紹介し，最後に multi-L/F ゲームを定式化する．以下では次の表記を用いる．n 次元実ベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ と表し，$x \in \mathbb{R}^p$，$y \in \mathbb{R}^q$，$z \in \mathbb{R}^r$ のとき，ベクトル $(x^\top, y^\top, z^\top)^\top \in \mathbb{R}^{p+q+r}$ を (x, y, z) と表す．ただし，記号 $\top$ は転置を表す．$\langle x, y\rangle$ はベクトル x，y の内積を表し，$\|x\|$ はベクトル x のユークリッドノルムである．関数 $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ に対して，$\nabla_x \tilde{f}(x, y)$ は変数 x に関する $\tilde{f}$ の勾配を表す．また，$\tilde{g}\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ に対して，$\nabla_x \tilde{g}(x, y)$ は変数 x に関する $\tilde{g}$ の転置ヤコビ行列である．

2.1 ナッシュ均衡問題

N 人のプレイヤーが，自身のコスト関数を最小にするために最適な戦略を決定する非協力ゲームを考える．プレイヤー ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ は n_ν 次元の戦略ベクトルをもっているとし，それを x^ν と表す．また，全プレイヤーの戦略ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ とプレイヤー ν 以外の戦略ベクトル $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-n_\nu}$ をそれぞれ以下で表す．

$$
\begin{aligned}
x &:= (x^1, \ldots, x^N)\\
x^{-\nu} &:= (x^1, \ldots, x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, \ldots, x^N)
\end{aligned}
$$

このゲームにおいてプレイヤー ν は次の最適化問題をを解いて戦略 x^ν を決定する．

$$
\begin{aligned}
\min_{x^\nu} \quad & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu})\\
\text{s.t.} \quad & x^\nu \in S^\nu
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし，$f^\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はプレイヤー ν のコスト関数，$S^\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ はプレイヤー ν の実行可能集合であり，プレイヤー ν の戦略を強調するため $f^\nu(x) := f^\nu(x^\nu, x^{-\nu})$ と表した．各プレイヤーがそれぞれ問題 (1) を解いて戦略を決めるとき，どのプレイヤーも戦略を変える動機をもたない均衡した状態がこのゲームの解と考えられる．その均衡解を**ナッシュ均衡**といい，このゲームを**ナッシュ均衡問題 (Nash Equilibrium Problem, NEP)** という．S を全プレイヤーの戦略集合の直積集合，すなわち $S := S^1 \times \cdots \times S^N$ とすると，ナッシュ均衡は次のように定義される．

定義 2.1. 戦略の組 $x^* \in S$ が，すべての ν について次の関係を満たすとき，x^* をナッシュ均衡という．

$$
f^\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) \le f^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \quad \forall x^\nu \in S^\nu
$$

このナッシュ均衡はどんなゲームにも存在するとは限らない．ナッシュ均衡が存在するための十分条件を記述するには，NEP を変分不等式問題として再定式化すると都合がよい．変分不等式問題 (Variational Inequality Problem) は，空でない閉凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ とベクトル値写像 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して次のように表される．

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad x^* \in S \\ &\text{s.t.} \quad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in S \end{aligned} \tag{2}$$

一般に凸計画問題は一次の最適性条件を考えることで変分不等式問題に再定式化することができるが，NEP についても同様に考えることができる．各プレイヤーに対する問題 (1) において，S^ν は空でない凸集合で，$f^\nu(\cdot, x^{-\nu})$ は微分可能な凸関数であるとする．このとき各 ν に対して問題 (1) は凸計画問題となるので，すべてのプレイヤーの問題に対する一次の最適性条件を合わせると，x^* が NEP の均衡解であるための必要十分条件は

$$F(x) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} f^1(x^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f^N(x^N, x^{-N}) \end{pmatrix}$$

で定義される写像 F に対して，変分不等式 (2) が成り立つこととなる．しかし問題 (1) が凸計画問題でないとき，一次の最適性条件は最適解であるための必要条件に過ぎず，変分不等式 (2) を満たす x^* は定義 2.1 の意味での均衡解であるとは限らない．このとき，変分不等式 (2) を満たす x^* を**停留ナッシュ均衡**という．

上述のように，NEP は変分不等式に再定式化できるので，変分不等式に対する解の存在からナッシュ均衡の存在を確認することができる．変分不等式 (2) に解が存在するための十分条件として以下の補題が知られている．

補題 2.1. *([4],Theorem 3.1)* S は空でないコンパクトな凸集合で，$F\colon S \to \mathbb{R}^n$ は連続であるとする．このとき，変分不等式問題 *(2)* に解が存在する．

この補題により，停留ナッシュ均衡が存在する十分条件を容易に得ることができる．次に解の一意性について述べる．まず，写像の強単調性を定義する．

定義 2.2. 空でない閉凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ とベクトル値写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，ある定数 $\sigma > 0$ が存在して

$$x, y \in S \quad \Rightarrow \quad \langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \geq \sigma \|x - y\|^2$$

が成り立つとき，F は S において強単調であるという．

この強単調性を用いて，変分不等式の解が唯一であるための十分条件は次のように書ける．

補題 2.2. *([4],Proposition 3.2)* F が S において強単調な連続写像のとき，変分不等式問題 *(2)* は唯一の解をもつ．

2.2 マルチリーダーフォロワーゲーム

本小節では，前節で紹介した multi-L/F ゲームの定式化を行う．multi-L/F ゲームでは，リーダーと呼ばれる上位のレベルのプレイヤーと，フォロワーと呼ばれる下位のレベルのプレイヤー

がおり，互いに影響を及ぼしながらそれぞれのレベルで非協力ゲームをしている．リーダーはフォロワーの行動を予想して先に戦略を決める．一方，フォロワーはリーダーのとった戦略に対応して最適な戦略をとる．

いま，N 人のリーダーと M 人のフォロワーが自身のコスト関数を最小にするために最適な戦略を決定するとする．リーダー ν $(\nu=1,\ldots,N)$ とフォロワー ω $(\omega=1,\ldots,M)$ の戦略ベクトルをそれぞれ $x^\nu\in\mathbb{R}^{n_\nu}, y^\omega\in\mathbb{R}^{m_\omega}$ で表し，すべてのリーダーの戦略ベクトルを $x\in\mathbb{R}^n$，リーダー ν を除くすべてのリーダーの戦略を $x^{-\nu}\in\mathbb{R}^{n-n_\nu}$ とする．フォロワーについても同様に $y\in\mathbb{R}^m$，$y^{-\omega}\in\mathbb{R}^{m-m_\omega}$ を定義する．このとき，フォロワー ω の問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned}\min_{y^\omega}\quad & \gamma^\omega(x,y^\omega,y^{-\omega})\\ \text{s.t.}\quad & y^\omega\in Y^\omega(x)\end{aligned}\tag{3}$$

ただし，$\gamma^\omega\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ はフォロワー ω の目的関数，$Y^\omega(x)$ はリーダーの戦略に依存するフォロワー ω の実行可能集合を表す．フォロワーはリーダーが戦略を決定した後に戦略を決定するため，フォロワーの問題においてリーダーの戦略 x はパラメータとなる．リーダーの戦略 x に対するフォロワーたちのゲームの均衡解の集合を $S(x)$ とする．リーダーたちは，彼らのとる戦略に対するフォロワーの反応 $y\in S(x)$ を予想して次の問題を考える．

$$\begin{aligned}\min_{x^\nu}\quad & \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y)\\ \text{s.t.}\quad & x^\nu\in X^\nu\end{aligned}\tag{4}$$

ただし，$\theta^\nu\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ はリーダー ν の目的関数，X^ν はリーダー ν の実行可能集合を表す．このmuti-L/F ゲームにおいては，リーダーがフォロワーの反応をどのように想定するかによって2種類の解が考えられる．1つはリーダーが自身にとって最善の場合を想定して行動するときで，もう1つが最悪の場合を想定して行動するときの解である．$X:=X^1\times\cdots\times X^N$，$Y(x):=Y^1(x)\times\cdots\times Y^M(x)$ とすれば，2種類のmulti-L/F ゲームの解は次のように定義される．

定義 2.3. 各 ν について $x^{*,\nu}$ が次の最適化問題の最適解であり，さらに $y^*\in S(x^*)$ のとき，戦略の組 $(x^*,y^*)\in X\times Y(x^*)$ は *multi-L/F* ゲームの楽観的ナッシュ均衡という．

$$\begin{aligned}\min_{x^\nu}\quad & \min_{y\in S(x^\nu,x^{*,-\nu})}\ \theta^\nu(x^\nu,x^{*,-\nu},y)\\ \text{s.t.}\quad & x^\nu\in X^\nu\end{aligned}\tag{5}$$

また，各 ν について $x^{*,\nu}$ が次の最適化問題の最適解であり，さらに $y^*\in Y(x^*)$ のとき，戦略の組 $(x^*,y^*)\in X\times Y(x^*)$ は *multi-L/F* ゲームの悲観的ナッシュ均衡という．

$$\begin{aligned}\min_{x^\nu}\quad & \max_{y\in S(x^\nu,x^{*,-\nu})}\ \theta^\nu(x^\nu,x^{*,-\nu},y)\\ \text{s.t.}\quad & x^\nu\in X^\nu\end{aligned}\tag{6}$$

リーダーの戦略に対するフォロワーの反応が常に一意的に定まるとき，問題 (5) と問題 (6) は同じである．今回提案する手法ではフォロワーの反応が常に一意である場合を考える．

3 平滑化法を用いた解法

本節では，フォロワーの問題に不等式制約が含まれるmulti-L/F ゲームを平滑化法を用いて解く手法を提案する．以下では簡単のため $N=2$，$M=2$ とする．問題 (4) と問題 (5) の実行可能

集合 X^ν, $Y^\omega(x)$ は関数 $G^\nu\colon \mathbb{R}^{n_\nu} \to \mathbb{R}^{p_\nu}$, $H^\nu\colon \mathbb{R}^{n_\nu} \to \mathbb{R}^{q_\nu}$, $g^\omega\colon \mathbb{R}^{n+m_\omega} \to \mathbb{R}^{s_\omega}$ を用いて以下のように与えられているとする.

$$\begin{aligned} X^\nu :=& \quad \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} \mid G^\nu(x^\nu) \le 0,\ H^\nu(x^\nu) = 0\} \\ Y^\omega(x) :=& \quad \{y^\omega \in \mathbb{R}^{m_\omega} \mid g^\omega(x, y^\omega) \le 0\} \end{aligned}$$

ここでは，フォロワーの制約は不等式制約のみとしたが，等式制約が含まれる場合でも同様の議論が可能である．フォロワー ω の問題 (3) とリーダー ν の問題 (4) に関して，以下の仮定を導入する．

仮定 3.1. フォロワー ω の問題 *(3)* において，*1* 次独立制約想定が成り立ち，γ^ω は 連続的微分可能，$\gamma^\omega(x,\cdot)$ は強凸関数，$g^\omega(x,\cdot)$ は *2* 回連続的微分可能な凸関数であり，

$$F_f(x,y) := \begin{pmatrix} \nabla_{y^1}\gamma^1(x,y^1,y^2) \\ \nabla_{y^2}\gamma^2(x,y^1,y^2) \end{pmatrix}$$

とおくと，$F_f(x,\cdot)$ は強単調であるとする．さらに，リーダー ν の問題 *(4)* において，θ^ν は連続的微分可能，G^ν は *2* 回連続的微分可能な凸関数，H^ν はアフィン関数であるとする．

各フォロワーの問題において 1 次独立制約想定が成り立つので，それらの問題に対する 1 次の最適性条件は KKT 条件で表される．したがって，下位レベルのゲームの均衡解は次式の解として与えられる．

$$\begin{cases} \nabla_{y^1}\gamma^1(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^1}g^1(x,y^1)\lambda^1 = 0 \\ \nabla_{y^2}\gamma^2(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^2}g^2(x,y^2)\lambda^2 = 0 \\ g^1(x,y^1) \le 0,\ \lambda^1 \ge 0 \\ g^2(x,y^2) \le 0,\ \lambda^2 \ge 0 \\ g^1(x,y^1)^\top\lambda^1 = 0 \\ g^2(x,y^2)^\top\lambda^2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ただし，$\lambda := (\lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{R}^{s_1+s_2}$ はラグランジュ乗数である．$F_f(x,\cdot)$ は強単調であるから，式 (7) を満たすフォロワーの唯一の均衡解 $y = y(x)$ が存在する．その解を各リーダーの問題に代入することで，multi-L/F ゲームは，各リーダーの最適化問題が次式で表される NEP と等価になる．

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} &\quad \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y(x)) \\ \text{s.t.} &\quad x^\nu \in X^\nu \end{aligned} \tag{8}$$

この NEP の均衡解を求めれば元の multi-L/F ゲームの均衡解が得られる．しかし，$y(x)$ の微分可能性が保証されないため一般化変分不等式を解くことになり，計算が困難となる．そこで，平滑化法を用いて微分可能な NEP に再定式化することにより均衡解を計算する方法を考える．

まず，次の **Fischer-Burmeister 関数**（**FB 関数**）$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を導入する．

$$\phi(a,b) := a + b - \sqrt{a^2+b^2}$$

FB 関数は原点で微分不可能であり，以下の性質を持つ．

$$\phi(a,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \ge 0,\ b \ge 0,\ ab = 0$$

さらに，FB 関数を用いて，関数 $\Phi\colon \mathbb{R}^{2s_\omega} \to \mathbb{R}^{s_\omega}$ を以下のように定義する．

$$\Phi(a,b) := \begin{pmatrix} \phi(a^1, b^1) \\ \vdots \\ \phi(a^{s^\omega}, b^{s^\omega}) \end{pmatrix}$$

ただし，$a = (a^1, \dots, a^{s_\omega}), b = (b^1, \dots, b^{s_\omega})$ である．関数 Φ を用いて，式 (7) に含まれる相補性条件を方程式で表すことができる．関数 $H_0 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_1+s_2} \times \mathbb{R}^{s_1+s_2} \to \mathbb{R}^{m+2s_1+2s_2}$ を次のように定義する．

$$H_0(x,y,z,\lambda) := \begin{pmatrix} \nabla_{y^1}\gamma^1(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^1}g^1(x,y^1)\lambda^1 \\ \nabla_{y^2}\gamma^2(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^2}g^2(x,y^2)\lambda^2 \\ g^1(x,y^1) + z^1 \\ g^2(x,y^2) + z^2 \\ \Phi(z^1,\lambda^1) \\ \Phi(z^2,\lambda^2) \end{pmatrix}$$

ただし，$z := (z^1, z^2)$ はスラック変数である．このとき，式 (7) は $H_0(x,y,z,\lambda) = 0$ と等価である．次に，$\varepsilon > 0$ をパラメータとする **smoothed Fischer Burmeister 関数 (SFB 関数)** $\phi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を導入する．

$$\phi_\varepsilon(a,b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\varepsilon^2}$$

FB 関数と同様に，SFB 関数を用いて関数 $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R}^{2s_\omega} \to \mathbb{R}^{s_\omega}$ を以下のように定義する．

$$\Phi_\varepsilon(a,b) := \begin{pmatrix} \phi_\varepsilon(a^1, b^1) \\ \vdots \\ \phi_\varepsilon(a^{s^\omega}, b^{s^\omega}) \end{pmatrix}$$

関数 H_0 と同様に，関数 $H_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_1+s_2} \times \mathbb{R}^{s_1+s_2} \to \mathbb{R}^{m+2s_1+2s_2}$ を

$$H_\varepsilon(x,y,z,\lambda) := \begin{pmatrix} \nabla_{y^1}\gamma^1(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^1}g^1(x,y^1)\lambda^1 \\ \nabla_{y^2}\gamma^2(x,y^1,y^2) + \nabla_{y^2}g^2(x,y^2)\lambda^2 \\ g^1(x,y^1) + z^1 \\ g^2(x,y^2) + z^2 \\ \Phi_\varepsilon(z^1,\lambda^1) \\ \Phi_\varepsilon(z^2,\lambda^2) \end{pmatrix}$$

とすると，$\varepsilon > 0$ のとき，ϕ_ε と Φ_ε は連続的微分可能な関数となるため，関数 H_ε は連続的微分可能な関数である．さらに，方程式

$$H_\varepsilon(x,y,z,\lambda) = 0 \tag{9}$$

に関して以下の命題を導くことができる．

命題 3.1. 任意の $\varepsilon > 0$ と問題 *(4)* の実行可能解 x に対して，式 *(9)* を満たす任意の点において，H_ε の (y,z,λ) に関するヤコビ行列は正則行列であると仮定する．さらに，点 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$，$\bar{y} \in \mathbb{R}^m$，$\bar{z}$，$\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{s_1+s_2}$ と $\bar{\varepsilon} > 0$ に対して，式 *(9)* が成立，すなわち $H_{\bar{\varepsilon}}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{\lambda}) = 0$ とする．このとき，任意の $(x,\varepsilon) \in \Omega \times U$ について，$H_\varepsilon(x, y(x,\varepsilon), z(x,\varepsilon), \lambda(x,\varepsilon)) = 0$ を満たす $(\bar{x},\bar{\varepsilon})$ の近傍 $\Omega \times U$ と，$\Omega \times U$ において局所リプシッツ連続な関数 $y \colon \Omega \times U \to \mathbb{R}^m$，$z \colon \Omega \times U \to \mathbb{R}^{s_1+s_2}$，$\lambda \colon \Omega \times U \to \mathbb{R}^{s^1+s^2}$ が存在する．さらに固定した $\varepsilon \in U$ に対して，$y(\cdot,\varepsilon), z(\cdot,\varepsilon), \lambda(\cdot,\varepsilon)$ は Ω 上で連続的微分可能である．

Proof. 陰関数定理を適用する．前半は命題 3.1 と [1] の Lemma 2 より成り立ち，後半は [3] の定理 2.21 より成り立つ． □

以上の議論から，$y = y(x, \varepsilon)$ を各リーダーの問題 (5) に代入することにより，multi-L/F ゲームを次の微分可能な最適化問題から成る NEP に再定式化することができる．

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} \quad & \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y(x^\nu, x^{-\nu}, \varepsilon)) \\ \text{s.t.} \quad & G^\nu(x^\nu) \le 0,\ H^\nu(x^\nu) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

関数 θ^ν の凸性は保証されないため，問題 (10) は凸計画問題とは限らない．したがって，この NEP に対しては停留ナッシュ均衡を求めることが目標になる．$y(\cdot, \varepsilon)$ が連続的微分可能であることから，θ^ν が連続的微分可能となるため，次の変分不等式を解くことにより停留ナッシュ均衡が得られる．

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & x^* \in X \\ \text{s.t.} \quad & \langle F_l(x^*, \varepsilon), x - x^* \rangle \ge 0 \qquad \forall x \in X \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，

$$F_l(x, \varepsilon) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1}\theta^1(x, y(x, \varepsilon)) \\ \nabla_{x^2}\theta^2(x, y(x, \varepsilon)) \end{pmatrix}$$

である．以下の命題が成り立つ．

命題 3.2. 集合 X はコンパクトであると仮定する．各 $\varepsilon > 0$ に対して，問題 *(10)* から成る *NEP* に停留ナッシュ均衡が存在する．

Proof. F_l は x に関して連続で，X はコンパクト集合であるから，補題 2.1 より，変分不等式 (11) は解をもつ．すなわち，停留ナッシュ均衡が存在する． □

問題 (10) は問題 (8) の平滑化近似である．そこで，$\varepsilon_k \to 0$ である数列 $\{\varepsilon_k\}$ に対して

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} \quad & \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y(x^\nu, x^{-\nu}, \varepsilon_k)) \\ \text{s.t.} \quad & G^\nu(x^\nu) \le 0,\ H^\nu(x^\nu) = 0 \end{aligned}$$

を各プレイヤーの問題とする NEP の列を考える．命題 3.2 よりこれらの NEP には停留ナッシュ均衡 $x^*_{\varepsilon_k}$ が存在する．点列 $\{(x^*_{\varepsilon_k}, y(x^*_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k))\}$ が元の multi-L/F ゲームの停留ナッシュ均衡 (x^*, y^*) に収束することを示せば，平滑化法を用いて multi-L/F ゲームの停留ナッシュ均衡を計算できることがいえる．その証明は今後の課題である．

4 数値実験

本節では，前節で述べた手法により multi-L/F ゲームの停留ナッシュ均衡が得られることを確認するため，簡単な問題例に対して行った数値実験の結果を示す．実験は CPU が 1.7GHz Intel Core i7，メモリが 8GB の Mac OS X 上で Python 言語を用いて行った．実験では，2 人のリーダーと 1 人のフォロワーが存在する場合を考え，それぞれの戦略ベクトルを $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

とした．フォロワーの問題とリーダーの問題を解くために使用したアルゴリズムはニュートン法であり，初期点は $(x_1, x_2, y) = (1, 1, 1)$ とした．フォロワーの問題は次の通りである．

$$\begin{aligned} \min_{y} \quad & \frac{1}{2}\|y - (x_1 + x_2)\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & y - (x_1 + x_2) + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

また，2 人のリーダーの問題は次の無制約問題とした．

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & \frac{1}{2}\|x_1 - 1\|^2 + (x_2 + y)x_1 \\ \min_{x_2} \quad & \frac{1}{2}\|x_2 - 1\|^2 + (x_1 + y)x_2^2 \end{aligned}$$

このゲームの停留ナッシュ均衡は $(x_1^*, x_2^*, y^*) = (0.31, 0.54, -0.15)$ であり，$\varepsilon \to 0$ のとき，平滑化法によって生成される近似停留ナッシュ均衡が元の multi-L/F ゲームの停留ナッシュ均衡に収束する様子を図 1 に示す．

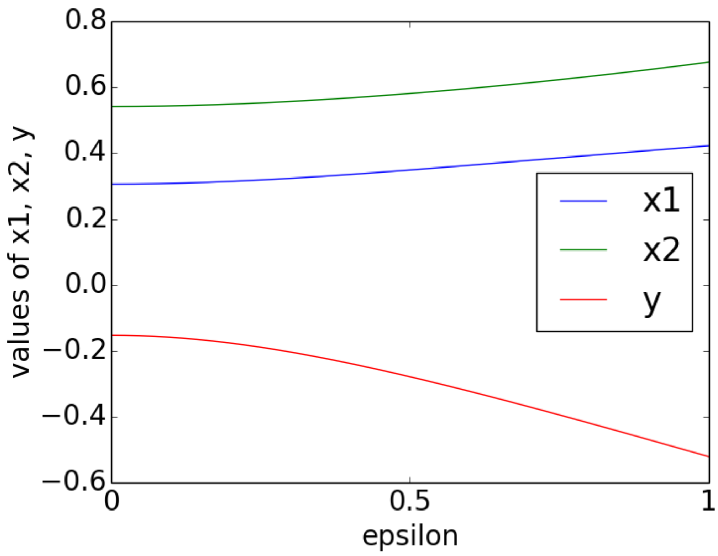

図 1: 停留ナッシュ均衡の挙動

5　おわりに

本報告書では，平滑化法を用いて multi-L/F ゲームを解く手法を提案した．今後の課題は主に 2 つあり，1 つは平滑化によって得られた近似停留ナッシュ均衡の列が元の multi-L/F ゲームの停留ナッシュ均衡に収束することを示すこと，もう 1 つは数値実験をさらに一般的な問題に対して行うことが挙げられる．

参考文献

[1] F. Facchinei, H. Jiang, L. Qi: A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints, *Mathematical Programming*, vol.85(1), pp. 107–134, 1999.

[2] F. Facchinei, J.-S. Pang: *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, 2003.

[3] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[4] P. T. Harker, J.-S. Pang: Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications, *Mathematical Programming*, vol.48, pp. 161–220, 1990.

[5] M. Hu, M. Fukushima: Variational inequality formulation of a class of multi-leader-follower games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol.151(3), pp. 455–473, 2011.

[6] M. Hu, M. Fukushima: Smoothing approach to Nash equilibrium formulations for a class of equilibrium problems with shared complementarity constraints, *Computational Optimization and Applications*, vol. 52, pp. 415–437, 2012.

[7] M. Hu, M. Fukushima, Existence, uniqueness, and computation of robust Nash equilibrium in a class of multi-leader-follower games, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 23, pp. 894–916, 2013.

[8] M. Hu, M. Fukushima: Multi-leader-follower games: Models, methods and applications, *Journal of the Operations Research of Japan*, vol.58(1), pp. 1–23, 2015.

[9] S. Leyffer, T. Munson: Solving multi-leader-common-follower games, *Optimization Methods & Software*, vol.25(4), pp. 601–623, 2010.

[10] J.-S. Pang, M.Fukushima: Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games, *Computational Management Science*, vol.2(1), pp. 21–56, 2005.