数理解析研究所講究録
第 1982 巻 2016 年 13-21

微係数の零点が稠密である函数について

鶴見和之

いたる所微分不可能な連続函数の例がWeierstraßによって与えられて以来, 種々の病的(pathological)と云はれる函数が与えられたが, それらの多くを調べる事は容易ではない。本講では「微係数の零点が稠密である函数」の性質を文献[3],[4],[9],[11],[14]などによって見ることにします。これらの方法は解析学における他の例を作るにも参考になると思はれる。

1. 準 備.

本講において, 「函数」とは, 他に言及しないかぎり, 実数$\mathbb{R}$又はその部分集合上で定義された実数値函数とする。 また, 集合及び関連事項についてはHausdorff: Set Theory [14]によったが, ここに必要項目をまとめておきます。

1.1. 実数$\mathbb{R}$(又はこの部分集合X)の閉部分集合族Fと開部分集合族Gを含む最小のσ-代数をBorel集合族と云い, $\mathcal{B}$と表し, その元をBorel集合と云う。これは次の様に作られる: 可算個の閉集合の和として表される集合をF_σ-集合と云い, この全体をF_σと表す, また, 可算個の開集合の積として表される集合をG_δ-集合と云い, この全体をG_δと表す。これらを1級のBorel集合と云う。次に, 可算個のF_σ-集合の積集合を$F_{\sigma\delta}$-集合と云い, この全体を$F_{\sigma\delta}$と表す, また, 可算個のG_δ-集合の和集合を$G_{\delta\sigma}$-集合と云い, この全体を$G_{\delta\sigma}$と表す。これらを2級のBorel集合と云う。以下同様に, 3級, 4級, ・・・が定義される。この時, $\mathcal{B} = \bigcup F_\alpha = \bigcup G_\alpha$ と表される。

1.2. fをℝ又はその部分集合上で定義された函数とする。任意の実数aに対して、集合$\{f>a\}:=\{x \mid f(x)>a\}$, $\{f<a\}$ (又は$\{f \geqq a\}$, $\{f \leqq a\}$) がF_α-集合 (又はG_α-集合) であるとき、fはα級のBorel函数であるとえう。

1.3. 連続函数列$\{f_n\}$の実列極限として表される函数fを(高々)1級のBaire函数とえう。1級のBaire函数列$\{f_n\}$の実列極限として表される函数を2級のBaire函数とえい、以下同様にα級のBaire函数が定義される。

1.4. (Lebesgue－Hausdorffの定理). α級の任意のBorel函数はα級のBaire函数であり、逆に、α級の任意のBaire函数はα級のBorel函数である。

1.5. 函数fの連続点の集合をC_f, 不連続点の集合をD_fと表す。fが閉区間I上の函数とする。C_fがIの稠密な部分集合ならば、fはIで点性不連続(pointwise discontinuous)とえう。(ここで、fが1級のBaire函数ならば、C_fはG_δ-集合で、D_fはF_σ-集合である。)

(Baireの定理). fが閉区間Iで(高々)1級のBaire函数であるための必要十分条件は、Iの任意の完全部分集合Pに対して$f|P$ (fのPへの制限)がP上で点性不連続であることである。

1.6. 集合$A \subset ℝ$に対して、$\mu(A)$はAのLebesgue測度とする。

2. Pompeiu 函数

Gを区間$I:=[a,b]$で定義された函数とする。

(2.1). GがI上でのPompeiu函数であるとは，GがIで微分可能で，G'がIで有界で$Z:=Z_{G'}:=\{x \mid G'(x)=0\}$が$I$の稠密な境界集合であるときである。この函数族を$\mathcal{P}$で表す。

(2.2). GがI上での$\mathcal{P}_1$型函数であるとは，GがIで微分可能でG'がIで有界で，ZがIの稠密な集合であるときである。この函数族を$\mathcal{P}_1$で表す。

(2.3). GがI上での$\mathcal{P}_2$型の函数であるとは，GがIで微分可能で，ZがIの稠密な境界集合であるときである。この函数族を$\mathcal{P}_2$で表す。

(2.4). GがI上での広い意味でのPompeiu函数であるとは，Gが連続で，Iの任意の点で有限又は無限の微係数を持ち，ZがIの稠密な境界集合であるときである。この函数族を$\mathcal{PG}$で表す。

これらの函数族に対して，次の関係が成り立つ：$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{PG}$，$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$.

Pompeiu函数の導函数をPompeiu導函数と云い，他の型の函数の導函数についても同様である。

<u>定理1</u>.（[9], p.6）gを区間$I=[a,b]$上で定義された広い意味でのPompeiu函数とする。このとき，$Z=\{x \mid g'(x)=0\}$はIにおいて，G_δ型のBorel集合である境界集合である。更に，$\mu(Z)<b-a$である。

（証明）g'は1級のBaire函数であるから点性不連続である。そして，Zはg'の連続点の集合$C_{g'}$を含み，G_δ集合である境界集合である。

Denjoyの定理によって，任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\alpha<\beta)$に対して，$P_{\alpha,\beta}:=\{x \mid \alpha < g'(x) < \beta\}$は正の測度で，空でない。この定理と$Z$が境界集合である事によって，$Z$の余集合は正の測度である，故に，$\mu(Z) < b-a$。

<u>定理2</u>（[9]，p.7）次の条件を満すP_2型の函数Gが存在する；即ち，$Z=\{x \mid G'(x)=0\}$の測度は0である。

（この函数Gを作るには，次のChoquetの定理が必要である。）

Choquetの定理：Eを測度0のG_δ-型のBorel集合とする。このとき，次の条件を満す単調増加で，絶対連続である函数Fが存在する；即ち，任意の点で一意に定まる一有限又は無限の一真に正なる導函数を持ち，$E=\{x \mid F'(x)=\infty\}$である。

（ここで，Fは絶対連続であるから，[12]，p.225，定理6.1により，FはLusinの条件(N)を持つ。）

定理2の函数Gの作り方：

今，集合Eを，G_δ-集合で，測度0で，いたる所稠密であるとする。FをChoquetの定理による函数とする。Fの逆函数をGとし，$Z:=\{x \mid G'(x)=0\}$とする。このとき，Fは単調増加で，連続であるから，Fは任意の点で，ただ1つの真に正である導函数を持ち，従ってGは定義域の任意の点でただ1つの有界な導函数を持ち，$F(E)=Z=\{x \mid G'(x)=0\}$が成り立つ。$E$の測度は0で，$F$はLusinの性質(N)を持つから，$Z$の測度は，また，0である。$E$はいたる所稠密で，$F$は位相写像であるから，$Z$は$G$の定義区間において，いた

る所稠密である。従って, Gは定理2の条件をみたす。

定理3.([9], p.8) $I=[a,b]$の任意の部分区間上で単調でないI上のP_2型の函数が存在する。

定理4.([9], p.8) fは区間I上のP_2型の函数とする。このとき, この導函数f'はI上でRiemann可積でない。

(証明) 辻[13], p.211, 定理VI.37により, 函数f'がRiemann可積なるための必要十分条件はf'の連続点$C_{f'}$の測度がIの測度に等しい(fがIでほとんど至る所連続であること)ことである, 即ち, $\mu(C_{f'})=b-a$なることである。ところが$P_2\subset PG$で, $C_{f'}\subset Z$であるから, 定理1によって, $\mu(C_{f'})\leq\mu(Z)<b-a$. 従って, f'はI上でRiemann可積でない。

定理5 ([4], p.150). Lebesgue可積でない導函数を持つP_2型の函数が存在する。

(証明) 3段階に分けて示す。

(I) $a, b\ (a<b)\in\mathbb{R}$とする。このとき, 次の様なPompeiu函数fが存在する, 即ち, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)$.

(証明略.)

(II). 区間$I=[a,b]$で定義された函数fに対して, fの$[a,b]$における全変分を$T_f(a,b)$ (Tと略記する)と表す。 $a<b$, $\varepsilon>0$に対して次の様な$[a,b]$上で定義されたPompeiu函数fが存在する, 即ち, $\max\{|f(x)|\mid a\leq x\leq b\}<\varepsilon$で $T_f(a,b)>1$.

(証明) (I)により次の様な $[a,b]$ 上の Pompeiu 函数 f_1 がとれる, 即ち $f_1(a)=f_1(b)=f_1'(a)=f_1'(b)=0$。 $M:=\max\{|f(x)|\mid a\leq x\leq b\}$, $T_1:=T_{f_1}(a,b)$, $f_2(x):=\frac{\varepsilon}{2M}f_1(x)$ とおく。N を $N>\frac{2M}{\varepsilon T_1}$ なる自然数とし, $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ を区間 $[a,b]$ の N 等分点とする。 L_k を $[a,b]$ から小区間 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,N)$ への上への1次函数とし, $g_k(x):=f_2(L_k(x))$ とおく。このとき, g_k は $[x_{k-1},x_k]$ 上の Pompeiu 函数で $g_k(x_{k-1})=g_k(x_k)=g_k'(x_{k-1})=g_k'(x_k)=0$, また, $\max\{|g_k(x)|\mid x_{k-1}\leq x\leq x_k\}$ $=\max\{|f_2(x)|\mid a\leq x\leq b\}<\varepsilon$. で $T_{g_k}(x_{k-1},x_k)=\frac{\varepsilon}{2M}T_1$

次に,

$$f(x):=\begin{cases}0 & : \quad x=a\\ g_k(x) & : \quad x_{k-1}<x\leq x_k\end{cases}$$

とおくと, f は $[a,b]$ 上で定義された Pompeiu 函数で, $f(a)=f(b)=$ $=f'(a)=f'(b)=0$, $\max\{|f(x)|\mid a\leq x\leq b\}<\varepsilon$ で $T_f(a,b)=$ $\sum_{k=1}^{N}T_{g_k}(a,b)=\frac{NT_1\varepsilon}{2M}>1$.

(定理5の証明) $a=0$, $b=1$ とする。 $1=x_1>x_2>x_3>\cdots\to 0$ なる数列をとり, 任意の n に対して, f_n を次の様な $[x_{n+1},x_n]$ 上の Pompeiu 函数とする, 即ち, $f_n(x_{n+1})=f_n(x_n)=f_n'(x_{n+1})=f_n'(x_n)=0$ で $|f_n(x)|<x^2$ $([x_{n+1},x_n]$ で$)$, で $T_{f_n}(x_{n+1},x_n)>1$.

$$f(x):=\begin{cases}0 & : \quad x=0\\ f_n(x) & : \quad x_{n+1}<x\leq x_n\end{cases}$$

とおくと, f は $[0,1]$ 上の P_2 型の函数である。 そして, f は有界変分ではない, 従って, f' は Lebesgue 可積でない。

3. Pompeiu 函数の作り方.

Pompeiu 函数の作り方は種々あると思はれるが，ここでは Pompeiu [11], Marcus [9] による方法を見ることにします。

$\{A_n \mid n=1,2,\cdots\}$ を正の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は収斂するものとする。$\{a_n \mid n=1,2,\cdots\}$ を区間 $I=[a,b]$ において稠密な数列とする。このとき級数

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n (x-a_n)^{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

を考える。ここで，$(x-a_n)^{1/3}$ は単調増加であるから，$F(x)$ も単調増加である。今 $t=F(x)$ とおき $\tilde{a}=F(a)$, $\tilde{b}=F(b)$ とおくと，$t=F(x)$ の逆函数 $x=G(t)$ $(\tilde{a}\leq t\leq \tilde{b})$ がとれる。

次に

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{(x-a_n)^{2/3}} \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

とおく。このとき，(2) の収斂する実 x において

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{y}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\boxed{\frac{(x+y-a_n)^{1/3}-(x-a_n)^{1/3}}{y}}}_{\text{(*)}} \qquad (2)'$$

$$(*)=\frac{1}{(x+y-a_n)^{2/3}+(x+y-a_n)^{1/3}(x-a_n)^{1/3}+(x-a_n)^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{(x-a_n)^{2/3}\left\{\left(\frac{x+y-a_n}{x-a_n}\right)^{2/3}+\left(\frac{x+y-a_n}{x-a_n}\right)^{1/3}+1\right\}}$$

$\alpha_m=\left(\frac{x+y-a_n}{x-a_n}\right)^{1/3}$ とおくと，上の式の $\{\ \}$ 内 $=\alpha^2+\alpha+1$ と表される.

ここで，x は (2) の収斂実であるから，十分小なる $\eta>0$ をとると，$y\in(-\eta,\eta)$ に対して，

$\alpha^2+\alpha+1=(\alpha+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4}$ より

$$(*)=\frac{1}{(x-a_n)^{2/3}(\alpha_m^2+\alpha_m+1)}\leqq\frac{4}{3}\frac{1}{(x-a_n)^{2/3}}$$

$$\therefore \quad \frac{F(x+y)-F(x)}{y} \leq \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{(x-a_n)^{2/3}}$$

よって，(2)′の級数は一様収斂で $F(x)$ は(2)が収斂する実 x において導函数 $f(x)$ を持つ。

次に，(2)が発散する実 ξ をとると，十分大なる正の数 M に対して，正の整数 m がとれて

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n}{(\xi-a_n)^{2/3}} > M$$

とできる。これより

$$\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y} > M$$

$(y \to 0$ として$)$，この左辺は無限大となる。

次に，$t=F(x)$ の逆函数 $x=G(t)$ の導函数を $x'=g(t)$ とし，$t_n=F(a_n)\ (n=1,2,\cdots)$，$\tau=F(\xi)$ とおくと，$g(t_n)=0$，$g(\tau)=0$ となるが，この様な τ の存在は導函数（1級の Baire 函数）の実性不連続性による。

ここで，$g(t)$ の有界性を示す。級数(2)において

$$|x-a_n| \leqq |b-a| \quad \therefore\ |x-a_n|^{2/3} \leqq |b-a|^{2/3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{(x-a_n)^{2/3}} \geqq \frac{1}{3}\cdot\frac{\sum A_n}{(b-a)^{2/3}}\ .$$

故に，$f(x)$ の下限は $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sum A_n}{(b-a)^{2/3}}$ であり，$g(t)$ は有界である。

また，Lusin の定理により，集合 $\{x \mid F'(x)=\infty\}$ の測度は 0 である。

これらの函数の詳細な議論については [1], [2], [5], [6], [11], [12] 参照のこと。

文 献

[1]. R. Baire : Leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier-Villars (1930).

[2]. E. Borel : Leçons sur la theorie des fonctions, Gauthier-Villars (1950).

[3]. A. M. Bruckner : Differentiation of Real Functions, Lecture Notes in Math. 659. Springer-Verlag. (1978).

[4]. ―〃― : On derivatives with a dense set of zeros, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 10 (1965). 149―153.

[5]. A. Denjoy : Sur les fonctions derivées sommables, Bull. Soc. Math. France. 43 (1915) 161―248.

[6]. ―〃― : Sur une propriété des fonctions derivées, Enseignement Math. 18 (1916) 320―328.

[7]. K. M. Garg : Theory of Differentiation, John Wiley & Sons. Inc. (1998)

[8]. K. Kuratowski : Topology I. Academic Press, (1966)

[9]. S. Marcus : Sur les dérivées dont les zéros forment un ensemble frontière partout dense, Rend. Circ. Mat. Palermo 2. 12 (1963) 5―40.

[10]. I. Natanson : Theory of functions of a real variable, Ungar N. Y. (1961).

[11]. D. Pompeiu : Sur les fonctions derivées, Math. Ann. 63 (1906) 326―332.

[12] S. Saks : Theory of the Integral, Monografie Mat. 7. Warszawa-Lwow (1937).

[13]. 辻正次 : 実変数函数論, 清水書 (昭和25年).

[14]. F. Hausdorff : Set Theory, Chelsea Publ. Company (1962).