数理解析研究所講究録
第 1986 巻 2016 年 1-10

ハミンググラフの埋め込みを含む最大な距離集合の分類

愛知教育大学　安達沙織
Saori Adachi
Mathmatics Education, Graduate School of Education,
Aichi University of Education

1　はじめに

ユークリッド空間上の有限集合 X の異なる 2 つのベクトル間のユークリッド距離の種類の個数が s となるとき, X は s 距離集合と呼ばれる. また, s 距離集合の性質を保ったまま, 新たにベクトルを加えることができないとき, その集合は s 距離集合として極大であるという. 本稿では, ある条件を満たす極大な距離集合のうち, サイズが最大なものを考える. 第 3, 4 節では, ハミンググラフをユークリッド空間へ s 距離集合として埋め込み, それを含む極大な s 距離集合を考える. ハミンググラフの埋め込みが s 距離集合として極大でないときの必要十分条件を与え, s が小さいときについてその埋め込みを含む最大な s 距離集合の分類を与える. 第 5 節では, $\mathbb{R}^{m+k+l}$ の部分集合で, 成分 -1 の個数が m, 0 の個数が k, 1 の個数が l となるようなベクトル全体の集合における s 距離集合について考える. $m=1, k\geq 1, l=2$ のとき, 最大距離は 10 となるが, それを避ける最大な部分集合を分類したい. この問題は, 距離が 10 となる 2 つのベクトルを結んで出来るグラフの最大独

立集合の問題ととらえることができる. そこから得られる, 2 部グラフのマッチングを用いて部分集合の位数の上界を与え, 上界を達成する集合を分類する. さらに, 第 6 節では, この結果を利用して, Bannai, Sato, Shigezumi [1] において未解決とされていた, ジョンソングラフの埋め込みを含む最大な 4 距離集合の分類を与える.

2 準備

この節では, 本稿で用いる定義を与える.

定義 2.1 (s 距離集合)**.** ユークリッド空間上の有限集合 X で, 互いに異なる X 上の 2 点間のユークリッド距離の集合のサイズが s のとき, X は s 距離集合と呼ばれる.

定義 2.2 (極大)**.** X を s 距離集合とする. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, $\mathbf{x} \notin X$ かつ $X \cup \{\mathbf{x}\}$ が s 距離集合となる $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき, X は極大であると呼ばれる.

$x_i \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq n)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}\,(\sum_{i=1}^n \lambda_i = d)$ に対して, $(x_1^{\lambda_1}, \ldots, x_n^{\lambda_n})^P$ は $\mathbb{R}^d$ の部分集合で, x_i が成分として λ_i 回現れるベクトル全てから構成される集合であるとする. また, $X_i \subset \mathbb{R}^{d_i}(1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n d_i = d)$ に対して, $(X_1, \ldots, X_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^d$ とする. ここで $(x_1, \ldots, x_n)$ は x_i の成分を並べてできる $\mathbb{R}^d$ の元である. そのとき, $(X_1, \ldots, X_n)^P = \{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n, \sigma \in S_n\}$ と定義する. ここで S_n は n 次対称群である.

定義 2.3 (ハミンググラフ)**.** $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in F_n^s$ に対して, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のハミング距離を $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$ とする. そのとき, ハミンググラフ $H(n, s)$ の頂点集合 $V(n, s)$ と

辺集合 $E(n,s)$ は以下のように定義される:

$$
\begin{aligned}
V(n,s) &:= F_n^s,\\
E(n,s) &:= \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in F_n^s \times F_n^s \mid h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1\}.
\end{aligned}
$$

ハミンググラフ $H(n,s)$ をユークリッド空間へ次のように埋め込む:

$$
\tilde{H}(n,s) = (\underbrace{(0^{n-1},1)^P,\ldots,(0^{n-1},1)^P}_{s\text{ 個のブロック}}) \subset \mathbb{R}^{sn}.
$$

$\mathbf{j}_k = (0,\ldots,0,\underbrace{(1,\ldots,1)}_{\text{第 } k \text{ ブロック}},0,\ldots 0) \in \mathbb{R}^{sn}$ とすると, 任意の $\mathbf{x} \in \tilde{H}(n,s)$ に対して, $\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{x} = 1$ であるから, $\tilde{H}(n,s) \subset \mathbb{R}^{sn-s}$ とみなせる. また, $\tilde{H}(n,s)$ の異なる 2 点間の距離は $\sqrt{2},\ldots,\sqrt{2s}$ となる. よって, $\tilde{H}(n,s)$ は $\mathbb{R}^{sn-s}$ 上の s 距離集合である.

3 $\tilde{H}(n,s)$ が極大でないときの条件

この節では, $\tilde{H}(n,s)$ が極大でないとき, すなわち s 距離集合の性質を保ったまま $\tilde{H}(n,s)$ にベクトルを加えることができるときの条件を与える. s 距離集合の性質を保ったまま $H(n,s)$ にベクトル $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_{sn})$ が加えられるならば, $\mathbf{x}$ は以下を満たす:

1. 任意の k $(1 \le k \le s)$ に対して, $\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{x} = 1$.
2. 任意の $\mathbf{y} \in H(n,s)$ に対して, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{\sqrt{2},\sqrt{4},\ldots,\sqrt{2s}\}$.

これらの条件から, $\mathbf{x}$ の第 j ブロックを $\mathbf{x}_j$ とすれば, $\mathbf{x}_j$ の成分の差が整数であることが示され,

$$
\mathbf{x}_j \in \left(\frac{k_0^{(j)}}{n}^{k_1^{(j)}}, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - 1\right)^{k_2^{(j)}}, \ldots, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - t_j\right)^{k_{t_j}^{(j)}} \right)^P
$$

と表せることがわかる. ここで, $k_0^{(j)} = 1 + \sum_{i=1}^{t_j}(i-1)k_i^{(j)} \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{m} t_j \leq 2s-1$ である. また, 候補となるベクトル $\mathbf{x}$ の集合を以下のように表す:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\}) = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m).$$

ただし,

$$\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j(k_0^{(j)}, \ldots, k_{t_j}^{(j)}) = \left(\frac{k_0^{(j)}}{n}^{k_1^{(j)}}, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - 1\right)^{k_2^{(j)}}, \ldots, \left(\frac{k_0^{(j)}}{n} - t_j\right)^{k_{t_j}^{(j)}} \right)^P.$$

である. $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ を固定し, $M_{\mathfrak{X}}$ を以下のように定義する:

$$M_{\mathfrak{X}} := \max_{\mathbf{y} \in \tilde{H}(n,s)} (d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2.$$

ただし, これは $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ の選び方によらないことに注意する. そのとき, 以下の補題が成り立つ.

補題 3.1 ([4]). $M_{\mathfrak{X}}$ が $2s$ 以下の偶数であるならば, そのときに限り, s 距離集合の性質を保ったまま $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ を $\tilde{H}(n,s)$ に加えることができる.

ここで, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\{k_i^{(j)}\})$ から以下を満たすような別の集合 $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}'_l(\{k'^{(j)}_i\})$ を以下のように構成する.

- $(j,i) \neq (l,1), (l,2), (l,t_l - 1), (l,t_l)$ のとき, $k'^{(j)}_i = k_i^{(j)}$.
- $t_l \geq 4$ のとき, $k'^{(l)}_1 = k_1^{(l)} - 1, k'^{(l)}_2 = k_2^{(l)} + 1, k'^{(l)}_{t_l-1} = k_{t_l-1}^{(l)} + 1, k'^{(l)}_{t_l} = k_{t_l}^{(l)} - 1$.
- $t_l = 3$ のとき, $k'^{(l)}_1 = k_1^{(l)} - 1, k'^{(l)}_2 = k_2^{(l)} + 2, k'^{(l)}_3 = k_3^{(l)} - 1$.

そのとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.2 ([4]). $M_{\mathfrak{X}}$ が偶数であるならば, $M_{\mathfrak{X}'}$ もまた偶数である. さらに,

$$M_{\mathfrak{X}} > M_{\mathfrak{X}'}.$$

$\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{X}'$ を構成する操作を繰り返すことで, 任意の j に対して, $t_j \leq 2$ となるような集合を構成することができる. よって, 補題 3.1, 補題 3.2 より次の補題を示すことができる.

補題 3.3 ([4]). $\tilde{H}(n,s)$ が s 距離集合として極大でないための必要十分条件は $n \geq k_0^{(1)} \geq \cdots \geq k_0^{(l)} > 1 = k_0^{l+1} = \cdots = k_0^{(s)}$ を満たし, $\sum_{j=1}^{s} \frac{k_0^{(j)}(n-k_0^{(j)})}{n} + 2l$ が $2s$ 以下の偶数となるような l, $k_0^{(1)}, \ldots, k_0^{(s)}$ が存在することである.

また, 補題 3.3 を用いることで, 次の定理を示すことができる.

定理 3.4. $\tilde{H}(n,s)$ が s 距離集合として極大でないような最大の n は $s^2 + s - 1$ である.

定理 3.4, 補題 3.3 より, s を固定したとき $\tilde{H}(n,s)$ に加えられるベクトルの選び方は有限個であり, それを全て書き出すことが可能である.

4 $\tilde{H}(n,s)$ を含む最大な s 距離集合の分類

前節で与えた定理 3.4 から, s 距離集合として極大でないような $\tilde{H}(n,s)$ は有限個しかないことがわかる. 補題 3.3 の必要十分条件を満たす l, $k_0^{(1)}, \ldots, k_0^{(s)}$ の組をコンピュータなどを用いることで, s 距離集合として極大でないような $\tilde{H}(n,s)$ を全て求めることができる. さらに, $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{X}'$ を構成する操作と逆の操作を行うことで, 極大でない $\tilde{H}(n,s)$ に対してどのようなベクトルが加えられるかも全て求めることができる. 加えることができるベクトル間の距離を全て計算することで, $\tilde{H}(n,s)$ を含む最大な s 距離集合を決定することができる. いくつかの (n,s) に対しては, Erdös-Ko-Rado の定理や第 5 節の定理 5.3 を用いる必要がある.

以下は, $\tilde{H}(n,s)$ を含む最大な s 距離集合と, 現在知られている最大な s 距離集合のサイズである. 次元 $d = sn - s$ であり, $\#$ は $\tilde{H}(n,s)$ を含む最大な

s 距離集合のサイズ, max は現在知られている最大な s 距離集合のサイズである.

$s=2$

n	5
d	8
#	40
max	45

$s=3$

n	3	5	9	11
d	6	12	24	30
#	40	200	981	1451
max	35	286	2300	4495

$s=4$

n	2	3	5	6	7	9	11	13	14	19
d	4	8	16	20	24	32	40	48	52	72
#	25	222	1600	2016	3390	8829	16566	29056	39417	133381
max	25	258	2380	5985	12675	40920	101270	211876	292825	1088430

$\mathbb{R}^6$ における最大な 3 距離集合はジョンソングラフの埋め込みの 35 点が最大であったが, 今回の結果から 37 点の集合を構成することができた. また, $\mathbb{R}^4$ における最大な 4 距離集合は $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)^P \cup \{(0,0,0,0)\}$ の 25 点が最大であったが, 距離集合として同型なものが構成できた.

5 最大距離を避ける最大な部分集合

$L_{mkl} = (-1^m, 0^k, 1^l)^P$ とする. $D(X) = \max\{d(x,y) \mid x, y \in X\}$ とする. $D(X) < D(L_{mkl})$ となるような最大の $X \subset L_{mkl}$ を分類したい. ここで, X の直径グラフ $G(V,E)$ を以下のように定義する:

$$V = X,\ E = \{(x,y) \mid d(x,y) = D(X)\}.$$

最大距離を避ける最大な部分集合は, L_{mkl} の直径グラフの最大独立集合の問題としてとらえることができる. $L_{mkl} = -L_{lkm}$ であるから, 以後, $m \leq l$

とする. M_{mkl} を $D(X) < D(L_{mkl})$ となるような最大の $X \subset L_{mkl}$ のサイズとする.

命題 5.1. $m = l$ とする. そのとき

$$M_{mkl} = \frac{1}{2}\binom{n}{m}\binom{k+m}{m} = \frac{1}{2}|L_{mkl}|$$

が成り立ち, 最大な集合は, 任意の $x \in L_{mkl}$ に対して x または $-x$ のどちらかだけを含む集合である.

$$I_n = \{1, \dots, n\},\ N_j(X, i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_i = j\} \text{ とする.}$$

命題 5.2. $m + k \leq l$ とする. そのとき

$$M_{mkl} = \binom{n-1}{m+k-1}\binom{k+m}{m}$$

が成り立つ. $m + k < l$ のとき, 最大な集合は $N_1(L_{mkl}, -1) \cup N_1(L_{mkl}, 0)$ である. $m + k = l$ のとき, 最大な集合は任意の位数 l の集合 $J \subset I_n$ に対して, $\{(x_1, \dots, x_n) \in L_{mkl} \mid x_i = 1, \forall i \in J\}$ または $\{(x_1, \dots, x_n) \in L_{mkl} \mid x_i = 1, \forall i \in I_n \setminus J\}$ のどちらかだけを含む集合である.

ここで, L_{1k2} の部分集合を以下のように定義する:

$$S_k(i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in L_{1k2} \mid x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0, x_i = -1\},\ i = 1, \dots k+1.$$

$$T_k(i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in L_{1k2} \mid x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0, x_i = 1\},\ i = 1, \dots k+1.$$

$$U_k(i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in L_{1k2} \mid x_1 = 1, x_t = -1, x_j = 1, 2 \leq t \leq i, i < j\},$$

$$i = 2, \dots k+2.$$

$$X_k = T_k(k+1) \cup (\bigcup_{i=1}^{k+1} S_k(i)),\ Y_k = T_k(k) \cup (\bigcup_{i=1}^{k-1} S_k(i)),\ Z_k = T_k(k-1) \cup (\bigcup_{i=1}^{k-2} S_k(i)).$$

定理 5.3 ([3]). $X \subset L_{1k2}$ が $D(X) < D(L_{1k2})$ を満たすとする. そのとき

$$|X| \leq \binom{k+3}{3} + 2.$$

等号を達成するのは

(1) $k = 1$ のとき $X = X_1$ または Y_1,
(2) $k \geq 2$ のとき $X = X_k$, Y_k または Z_k.

$k = 1, 2, 3$ のときは, L_{1k2} の直径グラフの最大マッチングを調べることで, 最大な集合を具体的に決定する. $k \geq 4$ に関しては, 数学的帰納法を用いることで証明できる.

6 $\tilde{J}(n, 4)$ を含む最大な 4 距離集合の分類

Johnson グラフ $J(n, m) = (V, E)$ は以下のように定義される:

$$V = \{\{i_1, \ldots, i_m\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\},$$
$$E = \{(v_i, v_j) \mid |v_i \cap v_j| = m - 1, v_i, v_j \in V(n, m)\}.$$

また, ジョンソングラフ $J(n, m)$ をユークリッド空間に以下のように埋め込む:

$$\tilde{J}(n, m) = (1^m, 0^{n-m})^P.$$

成分の和が m であることから, $\tilde{J}(n, m)$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ における m 距離集合であるといえる. Bannai, Sato, Shigezumi [1] では $m \leq 5$ の任意の n に対して, $\tilde{J}(n, m)$ を含む極大な m 距離集合の分類を与えている. しかし, $(n, m) = (9, 4)$ に関しては, 未解決とされていた. そこで, この節では $\tilde{J}(9, 4)$ を含む最大な 4 距離集合の分類を与える.

4 距離集合の性質を保ったまま $\tilde{J}(9, 4)$ に加えられるベクトルの候補は以

下の通りである:

$$X^{(i)} = \left(\frac{2}{3}^7, -\frac{1}{3}^2\right)^P, \qquad X^{(ii)} = \left(\frac{2}{3}^8, -\frac{4}{3}\right)^P,$$
$$X^{(iii)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}^8\right)^P, \qquad X^{(iv)} = \left(\frac{4}{3}^2, \frac{1}{3}^6, -\frac{2}{3}\right)^P.$$

ベクトル間の距離を調べることで $X^{(i)}, X^{(iii)}$ のベクトルは全て加えられることがわかる. $X^{(iv)}$ からは距離が $\sqrt{10}$ となるベクトルが存在しないように選んでくる必要があり, 前節の定理 5.3 を用いることで, そのような最大の集合を求めることができる. $X^{(ii)}$ からは全て加えることができるが, $X^{(ii)}$ と $X^{(iv)}$ の間の距離を考えることで, 1 点のみ加えるときが最大であることがわかる. 最大の集合は, X_6, Y_6, Z_6 と対応している集合をそれぞれ含む集合であり, 258 点の集合が構成できるとわかる. 以下がその最大な集合である:

$$\tilde{J}(9,4) \cup X^{(i)} \cup X^{(iii)} \cup \left\{ \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}^8\right) \right\} \cup X^{(iv)\prime}$$

$$\tilde{J}(9,4) \cup X^{(i)} \cup X^{(iii)} \cup \left\{ \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}^8\right) \right\} \cup X^{(iv)\prime\prime}$$

$$\tilde{J}(9,4) \cup X^{(i)} \cup X^{(iii)} \cup \left\{ \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}^8\right) \right\} \cup X^{(iv)\prime\prime\prime}$$

ただし, $X^{(iv)\prime}$ は $X^{(iv)}$ において $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ を $-1, 0, 1$ と置き換えたときの X_6 と対応しており,

$$X^{(iv)\prime} = \left\{ (x_1, \ldots, x_9) \in X^{(iv)} \mid x_i = -\frac{2}{3}, x_{j_1} = \frac{4}{3}, x_{j_2} = \frac{4}{3}, i < j_1, j_2 \right\}$$
$$\cup \left\{ \left(\frac{1}{3}^6, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{3}^6, \frac{4}{3}^2, -\frac{2}{3}\right) \right\}$$

である. また, $X^{(iv)\prime\prime}, X^{(iv)\prime\prime\prime}$ も同様にそれぞれ Y_6, Z_6 と対応したものである.

参考文献

[1] E. Bannai, T. Sato, and J. Shigezumi, Maximal m-distance sets containing the representation of the Johnson graph $J(n, m)$, Discrete Math. 312 (2012), 3283–3292.

[2] P. Erdös, C. Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 12 (1961), 313–320.

[3] S. Adachi, H. Nozaki, On the largest subsets avoiding the diameter of $(0, \pm 1)$-vectors, preprint, arXiv:1509.01326.

[4] S. Adachi, R. Hayashi, H. Nozaki, C. Yamamoto, Maximal m-distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n, m)$, preprint.