

Coarse 空間の積とその境界

東京大学・大学院数理科学研究科 嶺 幸太郎

Kotaro Mine

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

千葉工業大学・工学部 山下 温

Atsushi Yamashita

Faculty of Engineering, Chiba Institute of Technology

1. 序

局所コンパクトな粗空間, およびそのコンパクト化に関して得られた次の事実について報告する.

- (1) Higson コンパクト化として実現できないコンパクト化の新しい例について (系 4.5),
- (2) 距離付け可能なコンパクト化から誘導される粗空間について, それらの積の Higson コンパクト化が 1 点コンパクト化になること (系 4.6),
- (3) 粗空間の積の Higson コンパクト化が, もとの Higson コンパクト化たちの積と一致するのは自明な場合に限ること (系 4.7).

本論において位相空間にはハウスドルフの分離公理が仮定されているとする. また, 自然数全体の集合を可算無限離散空間と見なし, これを \mathbb{N} と書く.

2. 粗空間

擬等長変換で不変な性質を調べる幾何学 (coarse 幾何学) をより広い立場から論ずるための枠組みとして, 粗空間は導入された. 次の定義をみれば分かるように, 粗空間は一樣空間の双対概念に相当する. 一樣空間を与える一樣構造は, ある種のフィルターとして定義されていた. フィルターの双対概念はイデアル¹であり, したがって粗構造はある種のイデアルとして定められる:

定義 2.1. X を集合とする. X^2 の部分集合族 \mathcal{E} が次の (i) から (v) の条件を満たすとき, \mathcal{E} を X の粗構造 (coarse structure) と呼び, 集合と粗構造の組 (X, \mathcal{E}) を粗空間 (coarse space) という:

- (i) $\Delta_X \in \mathcal{E}$,
- (ii) $E \in \mathcal{E} \implies E^{-1} \in \mathcal{E}$,
- (iii) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \circ F \in \mathcal{E}$,
- (iv) $E \in \mathcal{E}, F \subset E \implies F \in \mathcal{E}$,
- (v) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cup F \in \mathcal{E}$.

ここで, Δ_X および E^{-1} , $E \circ F$ は次で定義される X^2 の部分集合である:

¹定義 2.1 にある条件 (iv) および (v) を満たす束のことをイデアルと呼ぶ.

- $\Delta_X := \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$,
- $E^{-1} := \{(x, y) \in X^2 \mid (y, x) \in E\}$,
- $E \circ F := \{(x, z) \in X^2 \mid \exists y \in X \text{ s.t. } (x, y) \in E, (y, z) \in F\}$.

本論で主に扱う粗構造は次の二つである:

定義 2.2. 固有距離空間² (X, d) において, 次で定義される粗構造 \mathcal{E}_d を有界粗構造 (bounded coarse structure) という:

$$\mathcal{E}_d := \{E \subset X^2 \mid \sup\{d(x, y) \mid (x, y) \in E\} < \infty\}.$$

定義 2.3 (cf. Theorem 2.27 of [R]). 局所コンパクト空間 X のコンパクト化 \tilde{X} について, 次の条件を満たす $E \subset X^2$ たち:

$$(\text{cl}_{\tilde{X} \times \tilde{X}} E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X}$$

の全体で構成される X^2 の部分集合族 $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ を \tilde{X} による位相的粗構造 (topological coarse structure) と呼ぶ.

次節で述べる Higson コンパクト化を通して, 有界粗構造は位相的粗構造の特別な場合とみなすことができる (cf. Proposition 2.47 of [R]).

X の粗構造 \mathcal{E} とは, X における一様な近さの尺度を与えるものと考えられる. 例えば, 粗空間においては部分集合 (族) の (一様) 有界性が次のように定められる. ここで, $E \in \mathcal{E}$ および $p \in X$ に対して, $E[p] := \{x \in X \mid (x, p) \in E\}$ を点 p の E -近傍という.

定義 2.4 (cf. Proposition 2.16 of [R]). 粗空間 (X, \mathcal{E}) の部分集合 B が有界であるとは, 次の同値条件 (a)~(c) のいずれかを満たすときと定義する:

- $B \times B \in \mathcal{E}$,
- $\exists p \in X \text{ s.t. } B \times \{p\} \in \mathcal{E}$,
- $\exists p \in X, \exists E \in \mathcal{E} \text{ s.t. } B = E[p]$.

定義 2.5. 粗空間 (X, \mathcal{E}) の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \times A_\lambda \in \mathcal{E}$ を満たすとき一様有界であるという.

有界粗構造をともなう粗空間において, 距離に関する部分集合 (族) の (一様) 有界性と上で定義した (一様) 有界性は同値になる.

3. HIGSON コンパクト化と位相的粗構造

位相空間 X のコンパクト化 γX が与えられているとき, γX の境界 $\partial X := \gamma X \setminus X$ を適当に潰すことによって得られる γX の商空間 δX は再び X のコンパクト化となる. このような状況のとき, コンパクト化 γX はコンパクト化 δX よりも大きいといい,

²位相空間 X の部分集合 A について, その閉包 $\text{cl}_X A$ がコンパクトであるとき, A は X において相対コンパクトであるという. 任意の部分集合について相対コンパクト性と有界性が同値になるような距離空間を固有距離空間という.

$\delta X \leq \gamma X$ と書く. これは $p|_X = \text{id}_X$ を満たす連続写像 $p: \gamma X \rightarrow \delta X$ が存在することと同値である.

さて, 以下では粗空間が局所コンパクトな位相構造を持ち, また位相構造と粗構造の間の関係として, 部分集合の有界性と相対コンパクト性が同値になることを仮定しよう (前節で挙げた二つの粗構造の例はいずれもこれを満たす). このとき, 粗空間 (X, \mathcal{E}) に **Higson 境界** と呼ばれる無限遠境界 $\nu(X, \mathcal{E})$ を付加することにより, X の **Higson コンパクト化** $h(X, \mathcal{E}) := X \cup \nu(X, \mathcal{E})$ が得られる³.

非有界な固有距離空間 (X, d) の Higson コンパクト化 $h(X, \mathcal{E}_d)$ はかなり大きなコンパクト化であることが知られている. 何故なら, その境界 $\nu(X, \mathcal{E}_d)$ が \mathbb{N} の Stone-Čech 境界 $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ を部分空間として含むからである.

いま, 粗空間に対してコンパクト化を与える操作 (Higson コンパクト化), およびコンパクト化に対して粗構造を与える操作 (位相的粗構造) が導入された. これらの操作の間には次の関係が成り立つことが知られる:

事実 3.1 (Proposition 2.45 of [R]). X を局所コンパクト空間とする.

- (1) \tilde{X} を X のコンパクト化とし, $\gamma X := h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ とする. このとき,
 - (i) $\tilde{X} \leq \gamma X$. つまり $\mathcal{E}_{\gamma X} \subset \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ が成り立つが, 実は (ii) $\mathcal{E}_{\gamma X} = \mathcal{E}_{\tilde{X}}$.
- (2) X の粗構造 \mathcal{E} について, $\tilde{X} := h(X, \mathcal{E})$ とすれば,
 - (i) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{\tilde{X}}$. つまり $h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}}) \leq \tilde{X}$ が成り立つが, 実は (ii) $h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}}) = \tilde{X}$.

そこで, 上の (1)(i) におけるコンパクト化の大小関係が真の大小関係 $<$ となるような例について考えてみたい. そのようなコンパクト化はある程度大きなコンパクト化に限ることが次の事実より分かる:

事実 3.2 (Proposition 2.48 of [R]). X を局所コンパクト空間とする. 第 1 可算公理を満たす X のコンパクト化 \tilde{X} について, $\tilde{X} = h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ が成り立つ⁴.

上の事実は, コンパクト化 \tilde{X} が Higson コンパクト化として実現できることを意味している. 一方で, 事実 3.1(2)(ii) から直ちに分かる帰結として, 事実 3.1(1)(i) において真の大小関係が成り立つとき \tilde{X} は Higson コンパクト化として実現されない:

事実 3.3. 局所コンパクト空間 X のコンパクト化 \tilde{X} について, $\tilde{X} < h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ が成り立つとき, \tilde{X} は Higson コンパクト化として実現されない. すなわち, $h(X, \mathcal{E}) = \tilde{X}$ を満たすような X の粗構造 \mathcal{E} は存在しない.

逆に, コンパクト化 \tilde{X} が Higson コンパクト化として実現できないとき, $\tilde{X} < h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ となることは事実 3.1(1)(i) より明らかである. つまり, $\tilde{X} < h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ を満たすコンパクト化の例を探すという問題は, Higson コンパクト化として実現できないようなコンパクト化を探す問題と言い換えてもよい.

³Higson 境界は **Higson コロナ**とも呼ばれる. Higson 境界および Higson コンパクト化の定義は [R] を参照のこと.

⁴[R] の Proposition 2.48 では第 2 可算公理を満たすコンパクト化について論じているが, 同様の事実は第 1 可算公理を満たす場合にも成り立つ.

いまのところ, このようなコンパクト化の例は, たった一つしか知られていなかった. それは次の例である:

例 3.4 (Example 2.34 of [R]). Stone-Čech コンパクト化 $\beta\mathbb{N}$ の境界から任意に二点を選び, それらを潰すことで得られる \mathbb{N} のコンパクト化を $\tilde{\mathbb{N}}$ とすれば, $h(\mathbb{N}, \mathcal{E}_{\tilde{\mathbb{N}}}) = \beta\mathbb{N}$ が成り立つ. したがって, $\tilde{\mathbb{N}} < h(\mathbb{N}, \mathcal{E}_{\tilde{\mathbb{N}}})$.

本研究において, Higson コンパクト化の積を取ることににより, $\tilde{X} < h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ を満たすコンパクト化 \tilde{X} の新しい例を構成した.

4. 粗空間の積とコンパクト化

定義 4.1 (Example 2.10 of [R]). 二つの粗空間 (X, \mathcal{E}) および (Y, \mathcal{F}) に対して, \mathcal{E} と \mathcal{F} から定まる $X \times Y$ の自然な積構造 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ を次で定める:

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} := \{ H \subset (X \times Y)^2 \mid \text{proj}_{X^2}(H) \in \mathcal{E} \text{ かつ } \text{proj}_{Y^2}(H) \in \mathcal{F} \}.$$

(X, d_X) および (Y, d_Y) が共に固有距離空間であるとき, それらの有界粗構造に関する積 $\mathcal{E}_{d_X} \otimes \mathcal{E}_{d_Y}$ は, $X \times Y$ 上の固有距離

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

から定まる有界粗構造 \mathcal{E}_ρ に一致する. この意味において, 上の積の定義は自然である.

二つのコンパクト化の積と, それらの位相的粗構造の積との間には次の関係がある:

命題 4.2. \tilde{X} および \tilde{Y} をそれぞれ局所コンパクト空間 X, Y のコンパクト化とすれば, $\mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}} \subset \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}}$. ゆえに $h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}}) \leq h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}})$.

事実 3.1(1)(i) によれば $\tilde{X} \times \tilde{Y} \leq h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}})$ である. 一方で, $h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ と $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ との間の大小関係については, いまのところ詳しくは分かっていない.

積構造とコンパクト化の関係として, 今回我々は次の結果を得た.

定理 4.3 (嶺・山下). (X, \mathcal{E}) および (Y, \mathcal{F}) を粗空間とし, \tilde{X} および \tilde{Y} をそれらの Higson コンパクト化とする. このとき, $h(X \times Y, \mathcal{P}) = \tilde{X} \times \tilde{Y}$ を満たすような $X \times Y$ の粗構造 \mathcal{P} が存在するならば, 粗空間 $(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ の Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化に等しい.

固有距離空間において定理 4.3 を適用すると次が得られる.

系 4.4. (X, d_X) および (Y, d_Y) を非有界な固有距離空間とし, $\tilde{X} := h(X, \mathcal{E}_{d_X})$ および $\tilde{Y} := h(Y, \mathcal{E}_{d_Y})$ とする. このとき, $\tilde{X} \times \tilde{Y} < h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}})$ である.

Proof. 事実 3.1(1)(i) より $\tilde{X} \times \tilde{Y} \leq h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}})$ である. 仮に $\tilde{X} \times \tilde{Y} = h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X} \times \tilde{Y}})$ が成り立つと仮定すれば, 定理 4.3 より $h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ は 1 点コンパクト化となる. ところが積構造 $\mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}}$ は固有距離から定まる有界構造に一致し, したがってその Higson 境界は $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ を部分空間として含む. これは境界が 1 点であることに矛盾する. \square

いまの系と事実 3.3 から次を得る:

系 4.5. 系 4.4 の設定のもとで, $X \times Y$ のコンパクト化 $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ を Higson コンパクト化として実現することはできない.

一方で, 距離付け可能なコンパクト化から誘導される粗空間に定理 4.3 を適用すれば次を得る:

系 4.6. X および Y を局所コンパクト空間とし, \tilde{X} および \tilde{Y} をそれらの距離付け可能なコンパクト化とする. このとき, $(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ の Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化に等しい.

Proof. \tilde{X} および \tilde{Y} , $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ はそれぞれ第 1 可算公理をみたす. よって事実 3.2 より, これらは Higson コンパクト化として実現される. ゆえに定理 4.3 より $(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ の Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化である. \square

最後に, 数学的にはナンセンスかもしれないが, 位相的粗構造の積に関して定理 4.3 が次のように言い換えられることに言及しておく.

系 4.7. \tilde{X} および \tilde{Y} をそれぞれ局所コンパクト空間 X, Y のコンパクト化とする. このとき, $h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}}) = h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}}) \times h(Y, \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ ならば, これらは $X \times Y$ の 1 点コンパクト化に等しい.

Proof. $\gamma X := h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}})$ および $\gamma Y := h(Y, \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$ とすれば, 事実 3.1(1)(ii) より, $\mathcal{E}_{\gamma X} = \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ および $\mathcal{E}_{\gamma Y} = \mathcal{E}_{\tilde{Y}}$ である. 仮定より,

$$h(X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}}) = h(X, \mathcal{E}_{\tilde{X}}) \times h(Y, \mathcal{E}_{\tilde{Y}}) = \gamma X \times \gamma Y.$$

つまり Higson コンパクト化の積 $\gamma X \times \gamma Y$ は Higson コンパクト化として実現できる. したがって定理 4.3 より, 粗空間

$$(X \times Y, \mathcal{E}_{\gamma X} \otimes \mathcal{E}_{\gamma Y}) = (X \times Y, \mathcal{E}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}})$$

の Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化である. \square

上の主張は Stone-Čech コンパクト化に関する次の古典的結果の類似物とも考えられる.

定理 4.8 (Glicksberg). 有限集合でないチコノフ空間 X, Y に対して, $\beta(X \times Y) = \beta X \times \beta Y$ ならば $X \times Y$ は擬コンパクト (pseudo-compact) である.

Higson コンパクト化が 1 点コンパクト化であること, および積空間 $X \times Y$ が pseudo-compact であることを「自明な状況であること」と解釈すれば, 系 4.7 および定理 4.8 はいずれも, 積とコンパクト化の操作が可換になるのは自明な状況に限ることを主張する命題とみなせる.

REFERENCES

- [R] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.