

3次元問題における 自己適合移動格子スキームの構築法

早稲田大学理工学術院 丸野健一

Ken-ichi Maruno

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学基幹理工学部 畑絢佳

Ayaka Hata

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

Camassa-Holm 方程式や短パルス方程式などの特異性、多価性がある解を持つソリトン方程式の可積分性を保存する離散化として、急激に変位が変化する領域で格子間隔が自動的に調節される差分スキーム『自己適合移動格子スキーム』(self-adaptive moving mesh scheme)が最近開発され、数値計算法としても強力であることがいくつかの方程式で示されている[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. 自己適合移動格子スキームは大変形移動境界問題の強力な数値計算法であるが、現在までのところ、2次元平面問題に適用が限られている。

本稿では自己適合移動格子スキームの3次元空間問題への拡張を試みる。その例として、局所誘導近似下での渦糸の運動の自己適合移動格子スキームを構築する。自己適合移動格子スキーム構築の鍵はホドグラフ変換の離散化にある。ホドグラフ変換とは、簡単に言えば、ラグランジュ的記述からオイラー的記述への変換であり、保存則と深い関係がある。ホドグラフ変換を離散化することで、メッシュの格子点の時間発展方程式が得られる。この時、格子間隔は保存密度となり、このことが自己適合移動格子スキームでメッシュの自動調節がうまくいく理由である。これまで1次元非線形波動(2次元平面内の1次元曲線の運動の問題)のいろいろな問題で自己適合移動格子スキームが構築され、自己適合移動格子スキームは大変形界面現象のための数値計算法として有効であることが示されてきた。しかしながら、3次元空間問題での自己適合移動格子スキームの構築はまだなされていない。3次元空間問題での自己適合移動格子スキームの構築法を確立するための一つの試みとして、局所誘導近似下での渦糸の運動の自己適合移動格子スキームを構築する。

2 渦糸の局所誘導方程式と複素 WKI 方程式

非圧縮流体中の非常に細い渦糸の運動は、局所誘導方程式 (LIE)

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\log \left(\frac{L}{\sigma} \right) \right] \kappa \mathbf{B} \quad (1)$$

で記述される [8, 9, 10, 11]. ここで, $\mathbf{X}(s, t)$ は渦糸の中心線に沿った座標系での渦糸の中心線の位置 s (すなわち弧長パラメータ), 時間 t における位置ベクトル, Γ は渦糸の循環, σ は渦核の半径, κ は $\mathbf{X}(s, t)$ における渦糸の中心線の曲率, \mathbf{B} は $\mathbf{X}(s, t)$ における渦糸の中心線の単位従法線ベクトルである. また, L は局所的な近似渦輪 (接触円) の半径であり, 点 \mathbf{X} から長さ L の範囲の渦糸のみが局所誘導方程式に寄与する. 局所誘導方程式は渦糸の大まかな特徴を残して単純化したものであり, 渦糸の軸流や伸び縮みは考慮されていない. 適当な時間スケールで局所誘導方程式を書き直すと $\mathbf{X}_t = \kappa \mathbf{B}$ となる. ここで, 渦糸の単位接線ベクトルを $\mathbf{T} = \mathbf{X}_s$, 単位法線ベクトルを \mathbf{N} とすると, $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ は Frenet-Serret の公式

$$\mathbf{T}_s = \kappa \mathbf{N}, \quad (2)$$

$$\mathbf{N}_s = \tau \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_s = -\tau \mathbf{N}, \quad (4)$$

を満たす. 式 (2) を用いると $\kappa \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{T}_s = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}$ となるので, 局所誘導方程式は

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} \quad (5)$$

と書くことができる.

局所誘導方程式は, 橋本変換 $\psi(s, t) = \kappa(s, t) \exp \left[i \int^s \tau(s', t) ds' \right]$ によって, 非線形 Schrödinger (NLS) 方程式 $i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} [|\psi|^2 + A(t)] \psi = 0$ に帰着する [12]. ここで, τ は渦糸の捩率を表す.

Van Gorder と梅木に従って 3次元空間に固定されたデカルト座標系で渦糸の局所誘導方程式を記述してみよう [13, 14]. 渦糸の中心線上の位置ベクトル \mathbf{X} の成分 x, y を z と t の関数とすると

$$\mathbf{X} = (x(z, t), y(z, t), z) = x(z, t)\mathbf{e}_x + y(z, t)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (6)$$

となる. ここで $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ はユークリッド空間 \mathcal{R}^3 の正規直交基底である. 接ベクトル \mathbf{T} は, 位置ベクトル \mathbf{X} を弧長パラメータ s で偏微分することで定義される:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (7)$$

ここで, 複素関数 $\Phi = x + iy$ を導入すると

$$ds = [(dz)^2 + |d\Phi|^2]^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) (1 + |\Phi_z|^2)^{\frac{1}{2}} dz = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) (1 + x_z^2 + y_z^2)^{\frac{1}{2}} dz$$

であるから,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) (1 + x_z^2 + y_z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

が成り立つ. Frenet-Serret の公式 (2) より

$$\kappa \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s}, \quad (9)$$

となり, 式 (6), (7), (8) より

$$\begin{aligned} \kappa \mathbf{N} &= \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (x_{zz} \mathbf{e}_x + y_{zz} \mathbf{e}_y) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \\ &\quad \times \left[-\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) (x_z x_{zz} + y_z y_{zz}) (1 + x_z^2 + y_z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (x_{zz} \mathbf{e}_x + y_{zz} \mathbf{e}_y) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 - (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) (x_z x_{zz} + y_z y_{zz}) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^4 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^4 [(x_{zz} \mathbf{e}_x + y_{zz} \mathbf{e}_y) (1 + x_z^2 + y_z^2) \times - (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) (x_z x_{zz} + y_z y_{zz})] \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^4 \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (10)$$

が導かれる. ここで, \mathbf{J} は

$$\mathbf{J} \equiv (x_{zz} + y_z^2 x_{zz} - x_z y_z y_{zz}) \mathbf{e}_x + (y_{zz} + x_z^2 y_{zz} - x_z y_z y_{zz}) \mathbf{e}_y - (x_z x_{zz} + y_z y_{zz}) \mathbf{e}_z \quad (11)$$

で定義される.

したがって

$$\begin{aligned} \kappa \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{N} = (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \frac{\partial z}{\partial s} \times \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^4 \mathbf{J} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^3 [-y_{zz} \mathbf{e}_x + x_{zz} \mathbf{e}_y + (x_z y_{zz} - y_z x_{zz}) \mathbf{e}_z] \end{aligned} \quad (12)$$

となる. 一方,

$$\mathbf{X}_t = x_t \mathbf{e}_x + y_t \mathbf{e}_y \quad (13)$$

であるから, 式 (12) と式 (13) の $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の係数をそれぞれ比較すると, 次が得られる:

$$x_t = -\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) y_{zz} (1 + x_z^2 + y_z^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (14)$$

$$y_t = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) x_{zz} (1 + x_z^2 + y_z^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (15)$$

$$x_z y_{zz} - y_z x_{zz} = 0. \quad (16)$$

よって、式(14)と(15)より、

$$\begin{aligned} i\Phi_t &= i(x_t + iy_t) = ix_t - y_t = -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)(x_{zz} + iy_{zz})(1 + x_z^2 + y_z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)(1 + |\Phi_z|^2)^{-\frac{3}{2}}\Phi_{zz} \end{aligned} \quad (17)$$

が成立するから、デカルト座標系での渦糸の局所誘導方程式

$$i\Phi_t + \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)(1 + |\Phi_z|^2)^{-\frac{3}{2}}\Phi_{zz} = 0 \quad (18)$$

が導かれる。

さらに、デカルト座標系での渦糸の運動は複素 Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) 方程式

$$i\Phi_t + \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\left(\frac{\Phi_z}{\sqrt{1 + |\Phi_z|^2}}\right)_z = 0 \quad (19)$$

で記述することもできる [15, 16].

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Phi_z}{\sqrt{1 + |\Phi_z|^2}}\right)_z &= (1 + |\Phi_z|^2)^{-\frac{3}{2}}\left[\Phi_{zz}(1 + |\Phi_z|^2) - \frac{1}{2}\Phi_z(\Phi_{zz}\Phi_z^* + \Phi_z\Phi_{zz}^*)\right] \\ &= (1 + |\Phi_z|^2)^{-\frac{3}{2}}\left[\Phi_{zz} + \frac{1}{2}\Phi_z(\Phi_{zz}\Phi_z^* - \Phi_z\Phi_{zz}^*)\right] \end{aligned} \quad (20)$$

となり、 $\Phi = x + iy$ を用いると $\Phi_{zz}\Phi_z^* - \Phi_z\Phi_{zz}^* = 2i(x_z y_{zz} - y_z x_{zz})$ となる。条件(16)より $\Phi_{zz}\Phi_z^* - \Phi_z\Phi_{zz}^* = 0$ が成り立つから、これを式(20)に代入すると

$$\left(\frac{\Phi_z}{\sqrt{1 + |\Phi_z|^2}}\right)_z = (1 + |\Phi_z|^2)^{-\frac{3}{2}}\Phi_{zz} \quad (21)$$

を得る。よって、デカルト座標系での局所誘導方程式(18)と複素 WKI 方程式(19)が等価であることが確かめられる。

3 渦糸の自己適合移動格子スキーム

半離散非線形シュレディンガー方程式 (Ablowitz-Ladik 方程式)

$$i\frac{d}{dt}\Psi_n = \frac{\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}}{(s_{n+1} - s_n)^2} + |\Psi_n|^2(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) \quad (22)$$

を考えよう。以下では $\Delta s \equiv s_{n+1} - s_n = a$ (a は定数) とする。

石森 [17] は式(22)から以下の半離散 Heisenberg 強磁性体方程式を得た：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_n = \frac{2}{a^2(1 + \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_{n+1})}\mathbf{T}_n \times \mathbf{T}_{n+1} - \frac{2}{a^2(1 + \mathbf{T}_{n-1} \cdot \mathbf{T}_n)}\mathbf{T}_{n-1} \times \mathbf{T}_n. \quad (23)$$

ここで, T_n は付加条件

$$T_n^x T_{n+1}^y - T_n^y T_{n+1}^x = 0 \quad (24)$$

を満たす.

半離散 Heisenberg 強磁性体方程式 (23) を用いて渦糸の自己適合移動格子スキームを構成する.

$$T_n = \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n|} = \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{a}, \quad (25)$$

$$\mathbf{X}_n = (x_n(t), y_n(t), z_n(t)) = x_n(t)\mathbf{e}_x + y_n(t)\mathbf{e}_y + z_n(t)\mathbf{e}_z, \quad (26)$$

として式 (23) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{d}{dt} (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) &= \frac{2 \left(\frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{a} \times \frac{\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1}}{a} \right)}{a^2 \left(1 + \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{a} \cdot \frac{\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1}}{a} \right)} - \frac{2 \left(\frac{\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}}{a} \times \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{a} \right)}{a^2 \left(1 + \frac{\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}}{a} \cdot \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{a} \right)} \\ &= \frac{2 (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \times (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})}{a^2 [a^2 + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \cdot (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})]} - \frac{2 (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \times (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)}{a^2 [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} \end{aligned} \quad (27)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) &= \frac{2 (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \times (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})}{a [a^2 + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \cdot (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})]} \\ &\quad - \frac{2 (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \times (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)}{a [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} \end{aligned} \quad (28)$$

を得る. これより

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_n = \frac{2 (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \times (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)}{a [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} + \mathbf{C} \quad (29)$$

($\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$, C_x, C_y, C_z は定数) が成り立つことがわかる. ここで

$$\begin{aligned} &(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \times (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \\ &= \begin{bmatrix} (y_n - y_{n-1})(z_{n+1} - z_n) - (z_n - z_{n-1})(y_{n+1} - y_n) \\ (z_n - z_{n-1})(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})(z_{n+1} - z_n) \\ (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})(x_{n+1} - x_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

であるから, 式 (29) より次を得る:

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{2 [(y_n - y_{n-1})(z_{n+1} - z_n) - (z_n - z_{n-1})(y_{n+1} - y_n)]}{a [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} + C_x, \quad (31)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{2 [(z_n - z_{n-1})(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})(z_{n+1} - z_n)]}{a [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} + C_y, \quad (32)$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{2 [(x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})(x_{n+1} - x_n)]}{a [a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} + C_z. \quad (33)$$

式(41)から渦糸の中心軸に平行な z 軸方向の格子間隔 $z_{n+1} - z_n$ の発展方程式

$$\frac{d}{dt}(z_{n+1} - z_n) = \frac{2}{a} \left[\frac{(x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)(x_{n+2} - x_{n+1})}{a^2 + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \cdot (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})} - \frac{(x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})(x_{n+1} - x_n)}{a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)} \right] \quad (34)$$

が導かれる。

前節で出てきた式(8)は

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \left(1 - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

と書けるので、

$$z = \int^s \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial z}{\partial s'} \right) \left(1 - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds' \quad (36)$$

となるが、これはホドグラフ変換に他ならない、このホドグラフ変換の離散化を考えてみよう。 $\Phi_n = x_n + iy_n$ として、ホドグラフ変換を離散化すると

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sgn} \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{s_{j+1} - s_j} \right) \left(1 - \left| \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{s_{j+1} - s_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (s_{j+1} - s_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sgn} \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{a} \right) (a^2 - |\Phi_{j+1} - \Phi_j|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。これにより

$$z_{n+1} - z_n = \operatorname{sgn} \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{a} \right) (a^2 - |\Phi_{n+1} - \Phi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

を得る。この両辺を時間 t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z_{n+1} - z_n) &= -\operatorname{sgn} \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{a} \right) (a^2 - |\Phi_{n+1} - \Phi_n|^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[(x_{n+1} - x_n) \frac{d}{dt}(x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n) \frac{d}{dt}(y_{n+1} - y_n) \right] \\ &= -(z_{n+1} - z_n)^{-1} \left[(x_{n+1} - x_n) \frac{d}{dt}(x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n) \frac{d}{dt}(y_{n+1} - y_n) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。式(31), (32)より

$$\begin{aligned} &(x_{n+1} - x_n) \frac{d}{dt}(x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n) \frac{d}{dt}(y_{n+1} - y_n) \\ &= \frac{2(z_{n+1} - z_n)}{a} \left[\frac{(y_{n+1} - y_n)(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}{a^2 + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \cdot (\mathbf{X}_{n+2} - \mathbf{X}_{n+1})} - \frac{(y_n - y_{n-1})(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

であるから、これを式(39)に代入して整理すると、式(34)を得る。したがって、式(34)は離散ホドグラフ変換より得られる式であることがわかる。

式(31),(32)を用いて複素関数 $\Phi_n = x_n + iy_n$ の発展方程式を作ると

$$\frac{d\Phi_n}{dt} = \frac{2i[(z_n - z_{n-1})(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - (\Phi_n - \Phi_{n-1})(z_{n+1} - z_n)]}{a[a^2 + (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}) \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)]} \quad (41)$$

となる。式(41),(34)は半離散複素 WKI 方程式であり、これが局所誘導近似下の渦糸の運動の自己適合移動格子スキームである。

得られた渦糸の自己適合移動格子スキームを用いて2つの渦糸ソリトンの衝突の数値計算を行った。ここで時間発展解法として Leap-frog 法を用いた。数値計算の結果のグラフを Fig.1 に示す。

4 おわりに

本稿では、3次元空間問題での自己適合移動格子スキームの構築法を確立するために、渦糸の運動を記述する局所誘導方程式の自己適合移動格子スキームを構築した。この結果から、3次元空間内の1次元曲線の運動問題で自己適合移動格子スキームを構築するには、位置ベクトル $\mathbf{X}_n = (x_n, y_n, z_n)$ を用いて複素関数 $\Phi_n = x_n + iy_n$ を定義し、 Φ_n と z_n の時間発展の方程式を作ればよいことがわかった。

今回、得られた渦糸の自己適合移動格子スキームは、可積分な方程式であり、 N -ソリトン解などの厳密解が存在する。したがって、数値計算法としても非常によい性質を持っていると考えられる。今回得られた渦糸の可積分な自己適合移動格子スキームの精度を詳しく評価し、既存の手法 [18] と比較することは将来の課題である。

参考文献

- [1] Ohta, Y., Maruno, K. and Feng, B. F., "An integrable semi-discretization of the Camassa-Holm equation and its determinant solution", J. Phys. A: Math. Theor., 41 (2008), 355205.
- [2] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., "A self-adaptive moving mesh method for the Camassa-Holm equation", J. Comput. Appl. Math., 235 (2010), pp.229-243.
- [3] Ohta, Y., Maruno, K. and Feng, B. F., "Integrable discretizations for the short-wave model of the Camassa-Holm equation", J. Phys. A: Math. Theor., 43 (2010), 265202.
- [4] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., "Integrable discretizations of the short pulse equation", J. Phys. A: Math. Theor., 43 (2010), 085203.
- [5] Feng, B. F., Inoguchi, J., Kajiwara, K., Maruno, K. and Ohta, Y., "Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves", J. Phys. A: Math. Theor., 44 (2011), 395201.

- [6] Feng, B. F., Inoguchi, J., Kajiwara, K., Maruno, K. and Ohta, Y., “Integrable discretizations of the Dym equation”, *Front. Math. in China*, 8 (2013), pp.1017–1029.
- [7] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., “Self-adaptive moving mesh schemes for short pulse type equations and their Lax pairs”, *Pacific J. Math. for Industry*, 6 (2014), 8.
- [8] Da Rios, L. S., “On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22 (1906), pp.117–135.
- [9] Hama, F. R., “Progressive deformation of a perturbed line vortex filament”, *Phys. Fluids*, 6 (1963), pp.526–534.
- [10] Arms, R. J. and Hama, F. R., “Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring”, *Phys. Fluids*, 8 (1965), pp.553–559.
- [11] Betchov, R., “On the curvature and torsion of an isolated vortex filament”, *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), pp.471–479.
- [12] Hasimoto, H., “A soliton on a vortex filament”, *J. Fluid Mech.*, 51 (1972), pp.477–485.
- [13] Van Gorder, R. A., “Integrable stationary for the fully nonlinear local induction equation describing the motion of a vortex filament”, *Theor. Comput. Fluid. Dyn.*, 26 (2012), pp.591–594.
- [14] Umeki, M., “A Real-Space Representation for a Locally Induced Motion of a Vortex Filament”, *Theor. Appl. Mech. Jpn.*, 61 (2013), pp.195–200.
- [15] Konno, K., Mituhashi, M. and Ichikawa, Y. H., “Soliton on Thin Vortex Filament”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 1 (1991), pp.55–65.
- [16] Wadati, M., Konno, K. and Ichikawa, Y. H., “New Integrable Nonlinear Evolution Equations”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 47 (1979), pp.1698–1700.
- [17] Ishimori, Y., “An Integrable Classical Spin Chain”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 51 (1982), pp.3417–3418.
- [18] Aref, H. and Flinchem, E. P., “Dynamic of a vortex filament in a shear flow”, *J. Fluid Mech.*, 148 (1984), pp.477–497.

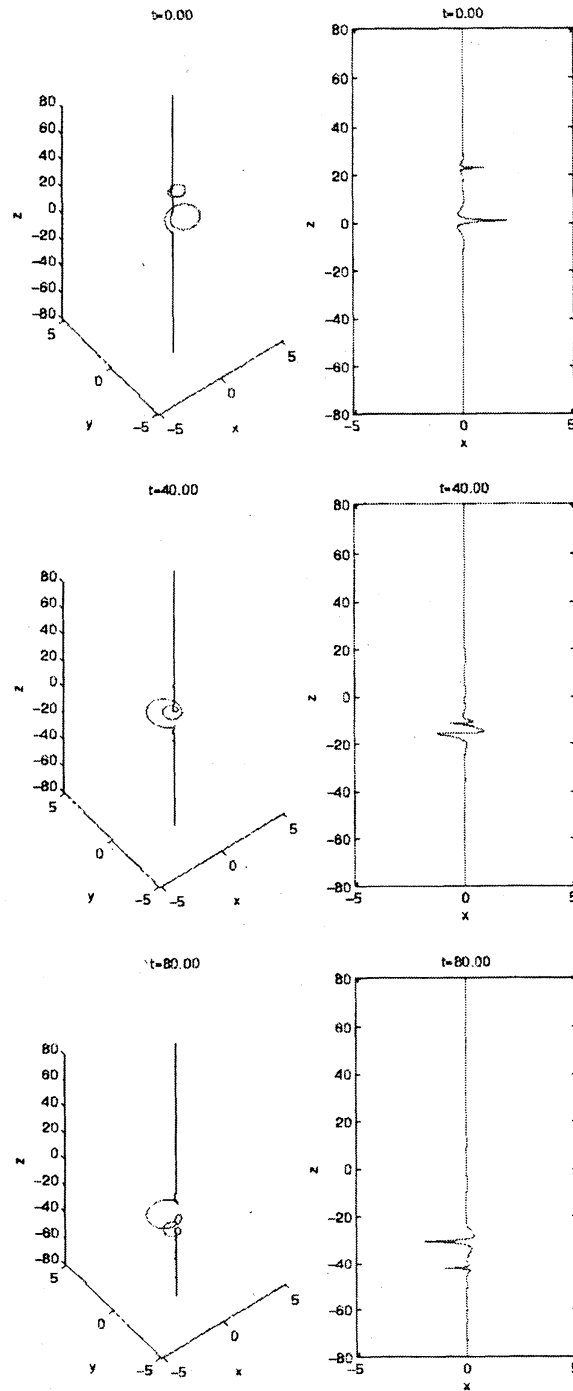


図 1: 自己適合移動格子スキーム (41), (34) を用いた 2 ソリトン相互作用の数値計算.