

## 二層流体中の物体による内部重力波の励起と伝播

京都大学大学院工学研究科 猪又 諒祐 (Ryosuke Inomata)  
沖野 真也 (Shinya Okino)  
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)  
Graduate School of Engineering, Kyoto University

### 1 はじめに

大気や海洋における流体は、温度や塩分濃度の影響により、鉛直方向に密度勾配を有する。このような流体は成層流体と呼ばれ、大気や海洋での流れや運動を考える上で重要である。成層流体中では、密度差による浮力が働くため、内部重力波が発生する。

成層流体の最も単純なモデルとして、異なる密度を有する二つの流体の層からなる二層流体がしばしば用いられる。本研究では、一様流速で流路内を流れる二層流体を考え、流路の底面に置かれた物体によって密度界面に励起される内部重力波の解析を行う (図 1)。

本研究では、まず、ナビエ・ストークス方程式の直接数値計算によって、内部重力波の時間発展解を求める。二層流体を扱うため、時間ステップ毎に界面の形状に合わせて変形する移動格子を用いる。移動格子は、気液二相流体である水面波の数値計算でよく用いられている [1][2]。

次に、直接数値計算によって得られた解を、弱非線形理論による解と比較する。一様流速と波の位相速度が等しくなる共鳴条件下では、波のエネルギーが物体近傍に溜まり、振幅の増大と共に非線形性が大きくなる。弱非線形理論では、そのような内部重力波を近似的に記述するために、forced Korteweg-de Vries (fKdV) 方程式や、その拡張版であり、3 次の非線形項を持つ forced Extended Korteweg-de Vries (fEKdV) 方程式が提案されている [3][4]。本研究では、これらの弱非線形方程式の二層流体への適用性を検証する。

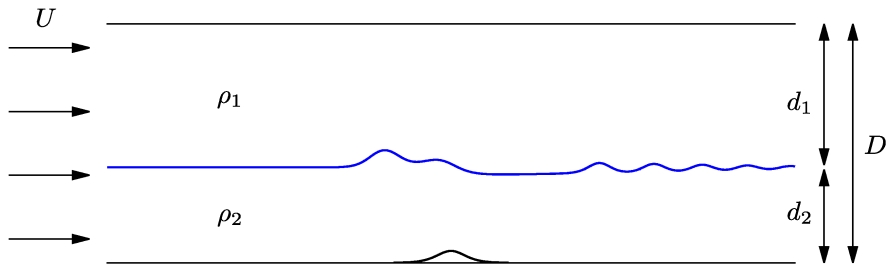


図 1: 系の概略図。

## 2 支配方程式と境界条件

本研究では、深さ  $D$  の2次元上下剛体壁流路内を、非圧縮性の密度二層流体が一様流速  $U$  で流れる系を考える。支配方程式である連続の式とナビエ・ストークス方程式は、代表スケールとして、長さ  $D$ 、速度  $U$ 、密度  $\rho_2$ 、圧力  $\rho_2 U^2$  を用いて無次元化すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p_1 - \frac{1}{F_D^2} \hat{z} + \frac{1}{\rho^* Re} \nabla^2 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 - \frac{1}{F_D^2} \hat{z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

と書き表される。ここで、 $\mathbf{u} = (u, w)$  は速度ベクトル、 $p$  は圧力、 $t$  は時間、 $\hat{z}$  は鉛直上向き方向の単位ベクトルである。また、添え字の1は上層の流体(密度  $\rho_1$ )を、2は下層の流体(密度  $\rho_2$ )を意味し、 $\rho^* = \rho_1/\rho_2$  である。無次元パラメータであるレイノルズ数  $Re$  とフルード数  $F_D$  は、

$$Re = \frac{\rho_2 U D}{\mu}, \quad (3)$$

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{gD}}, \quad (4)$$

と定義されている。 $\mu$  は粘性係数、 $g$  は重力加速度である。以下では特に断らない限り、変数は無次元で表すことにする。

次に、境界条件について示す。密度界面上では、力学的境界条件と運動学的境界条件、及び速度の連続性  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$  を課す。力学的境界条件は、密度界面上での応力のつり合いであり、法線方向と接線方向について

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_1 \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_2 \mathbf{n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_1 \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_2 \mathbf{n}, \quad (6)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{t}$  はそれぞれ、密度界面の単位法線ベクトルと単位接ベクトルである。 $\mathbf{T}$  は応力テンソルであり、

$$\mathbf{T} = - \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

と与えられる。運動学的境界条件は、密度界面上にある流体は常に界面上にある、という条件で

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = w, \quad (8)$$

と表される。ここで、 $f(x, t)$  は密度界面の変位を表す。

上下剛体壁 ( $z=0, D$ ) では、境界層の発達を抑えるためにスリップ条件を採用する。上流端では、一様流速  $\mathbf{u} = (U, 0)$  を与える。

### 3 数値計算法

#### 3.1 数値計算法とその手順

非圧縮性流体の数値計算法としてよく用いられる，差分法の MAC(Marker and Cell) 法を用いる [5]. MAC 法では，圧力と速度を交互に解くことによって計算を進めていく．圧力を直接求めるためには圧力のポアソン方程式を導く必要があり，これについては，運動方程式 (2) の両辺の発散を取ることによって得られる．

また，計算格子には移動格子を用いる．この格子では，格子の形状そのものが二層流体の密度界面の形状になっており，時間進行と共に格子が変形する．ただし，本研究では，格子点は  $z$  方向にのみ移動させる．

計算手順は以下の通りである．

1. 時刻  $t = n\Delta t$  における  $\mathbf{u}^n$  の値を用いて，圧力のポアソン方程式を反復法である SOR 法によって解き， $p^n$  を求める．密度界面上の圧力は，式 (5) から求める．
2.  $p^n, \mathbf{u}^n$  の値を用いて，式 (2) から次の時刻  $t = (n + 1)\Delta t$  における  $\mathbf{u}^{n+1}$  を求める．密度界面上の速度は，式 (1), (6) を連立させて解くことで求める．
3. 密度界面上の  $\mathbf{u}^{n+1}$  を用いて，式 (8) から密度界面の形状  $f^{n+1}$  を求める．
4.  $f^{n+1}$  に合わせて，格子を変形させる．

以上の手順を繰り返すことで，速度，圧力及び密度界面形状の時間発展解が得られる．

#### 3.2 方程式の離散化

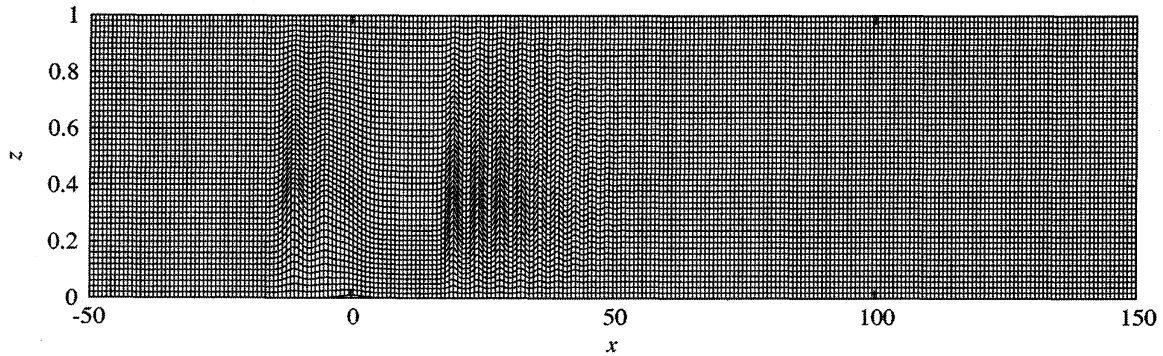
運動方程式 (2) を離散化する際，非線形項には，3 次精度の上流差分を適用する [5]. 他の空間微分項には，2 次精度の中心差分を用いる．時間発展には陰解法を用い，各時刻で SOR 法を用いて速度を求める．運動学的境界条件 (8) の時間積分には，陰解法のクランク・ニコルソン法 (2 次精度) を適用する．

#### 3.3 計算領域と格子，時間刻み

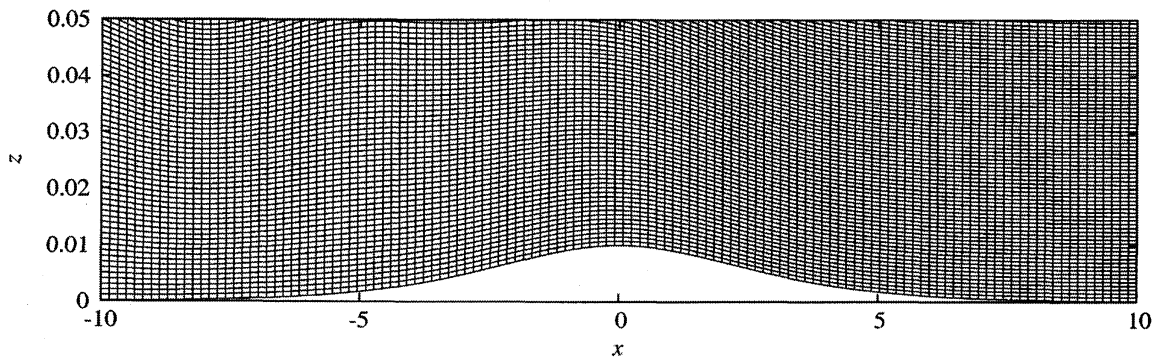
本研究で用いた計算格子を図 2 に示す．底面の  $x = 0$  の地点には

$$h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2(0.3x), \quad (9)$$

で与えられる物体をおく．物体の最大高さは  $h(0) = h_0 = 0.01$  である．計算格子点は計算領域に  $2501 \times 2501$  点を設定する．なお，上流に伝播した波が上流端に到達すると，上流端の境界条件を一定 (一様流，密度一定) とすることができなくなるため，波が上流端に到達する前には計算を打ち切る必要がある．そのため，流れ方向の計算領域は広めに確保し， $-50 \leq x \leq 150$  と設定した．時間刻みは  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$  として計算を行う．



(a) 領域全体。水平方向は10本おき、鉛直方向は50本おきに示している。



(b) 底面物体付近の拡大図。水平方向、鉛直方向共に2本おきに示している。

図 2: 計算格子。ただし、これらは変形後の格子である。

#### 4 計算パラメータ

本研究で用いるパラメータは、密度比が  $\rho_1/\rho_2 = 0.9$ 、上下の層の厚さが  $d_1 = 0.7, d_2 = 0.3$  であるとする。なお、レイノルズ数は  $Re = 10^{10}$  と設定する。レイノルズ数が非常に大きいため、流れはほとんど非粘性流体と同じになり、弱非線形理論との直接比較が可能と考えられる。

次に、本研究では、主流速度  $U$  と内部重力波の位相速度  $c$  の比を、フルード数

$$F_r = \frac{U}{c}, \quad (10)$$

として定義する。今回は、共鳴条件近傍の  $F_r = 0.95, 1.00, 1.02$  とした場合の計算を行う。ここで、二層流体の内部重力波の位相速度  $c$  は、波数  $k$  と振動数  $\omega$  を用いると、有次元表記で

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 k \coth(kd_1) + \rho_2 k \coth(kd_2)}}, \quad (11)$$

と与えられる。ここで、長波長近似 ( $kd_1 \approx 0, kd_2 \approx 0$ ) を適用すると、 $\coth(kd_1) \approx 1/kd_1, \coth(kd_2) \approx 1/kd_2$  より、

$$c = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1/d_1 + \rho_2/d_2}}, \quad (12)$$

となる。今回の計算パラメータの場合、 $\sqrt{gD}$  で無次元化された位相速度は、

$$\frac{c}{\sqrt{gD}} = 0.1471, \quad (13)$$

と求まる。このときのフルード数  $F_D$  については、

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{gD}} = \frac{c}{\sqrt{gD}} F_r = 0.1471 F_r, \quad (14)$$

と計算される。

## 5 弱非線形理論

### 5.1 弱非線形方程式 (fKdV 方程式, fEKdV 方程式)

弱非線形理論では、非粘性の二層流体の内部重力波を記述する近似方程式として、fKdV 方程式が提案されている [3]。fKdV 方程式を導出するには、微小パラメータである

$$\varepsilon = \left(\frac{D}{L}\right)^2, \quad (15)$$

が用いられる。ここで、 $L$  は水平方向の代表スケールであり、流路の深さ  $D$  よりも十分に長いと仮定している。まず、ポテンシャル流れの方程式系を、長さ  $D$ 、速度  $\sqrt{gD}$  で無次元化し、座標変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} [x + (c - U)t], \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad (16)$$

を施す。さらに、界面変位  $f$  と底面物体  $h$  を

$$f(x, t) \simeq \varepsilon A(\xi, \tau), \quad h(x) \simeq \varepsilon^2 H(\xi, \tau), \quad (17)$$

のようにスケーリングすると、次の fKdV 方程式が導かれる。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial \tau} + a_1 A \frac{\partial A}{\partial \xi} - a_2 \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} = b \frac{U}{c} \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad (18)$$

ここで、各項の係数は、

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\rho_1 d_2^2 - \rho_2 d_1^2}{d_1 d_2 (\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1)}, \quad a_2 = \frac{1}{6} \frac{d_1 d_2 (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{\rho_2 d_1}{\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1}, \quad (19)$$

である。

さらに、界面変位が大きい場合に有効となる、3次の非線形項を持った弱非線形方程式として、次のfEKdV方程式が提案されている [4][6].

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial \tau} + a_1 A \frac{\partial A}{\partial \xi} - a_2 \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} + \varepsilon a_3 A^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} = b \frac{U}{c} \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad (20)$$

ここで、3次の非線形項の係数  $a_3$  は、

$$a_3 = 3 \frac{\rho_1 d_2^3 + \rho_2 d_1^3}{d_1^2 d_2^2 (\rho_1 d_2 + \rho_2 d_1)}, \quad (21)$$

となる。  $a_1, a_2, b$  は fKdV 方程式と同じである。

なお、今回の計算パラメータ  $\rho_1/\rho_2 = 0.9, d_1 = 0.7, d_2 = 0.3$  のもとでは、

$$a_1 = -3.012, \quad a_2 = 0.03356, \quad a_3 = 25.76, \quad b = 0.3608, \quad (22)$$

となる。ここで、  $|a_3/a_1| = 8.6$  であり、大きな値であることに注意しておく。このことは、6.2節で3次と2次の非線形項の大きさの比  $|a_3 \varepsilon A/a_1|$  を考える際に重要となる。

## 5.2 計算方法

fKdV 方程式 (18) と fEKdV 方程式 (20) をそれぞれ  $(x, t)$  座標で表し、長さ  $D$ 、速度  $U$  で無次元化すると、

$$\frac{U}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{U}{c} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + a_1 f \frac{\partial f}{\partial x} - a_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = b \frac{U}{c} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\frac{U}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{U}{c} - 1 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + a_1 f \frac{\partial f}{\partial x} - a_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + a_3 f^2 \frac{\partial f}{\partial x} = b \frac{U}{c} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (24)$$

となる。

これらの弱非線形方程式を計算する際はスペクトル法を用いる [7]。周期境界条件を用いているため、波が上流端と下流端に達しないようにする必要がある。このため、計算領域を十分広く取り、  $-256 \leq x \leq 256$  とした。分点の数は 4096、切断波数は 512 に設定する。

また、時間積分には4次精度のルンゲ・クッタ法を用いる。時間刻みは  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$  とする。

## 6 結果・考察

### 6.1 ナビエ・ストークス方程式の直接数値計算の結果

$F_r = 1.00$  とした場合の界面波の時間発展の様子を図 3 に示す。物体の上流側 ( $x \leq 0$ ) には、孤立波 (ソリトン波) と呼ばれる波が生成し、変位は常に正の値を取る。下流側 ( $x \geq 0$ ) には、クノイダル波と呼ばれる波が生成し、界面は正負に振動する。

続いて、時刻  $t = 200$  における、  $F_r = 0.95, 1.00, 1.02$  の時の波形を重ね合わせたものを図 4 に示す。  $F_r = 0.95$  の場合は、主流速度  $U$  よりも位相速度  $c$  の方が速い ( $U < c$ ) た

め、 $F_r = 1.00$  の時と比較すると、波の上流伝播速度は速くなる。逆に、 $F_r = 1.02$  の時は  $U > c$  となるため、波の上流伝播速度は遅くなる。また、 $F_r \approx 1$  では孤立波の振幅が大きく、 $F_r$  が 1 より少し大きい時にその振幅はさらに大きくなる。

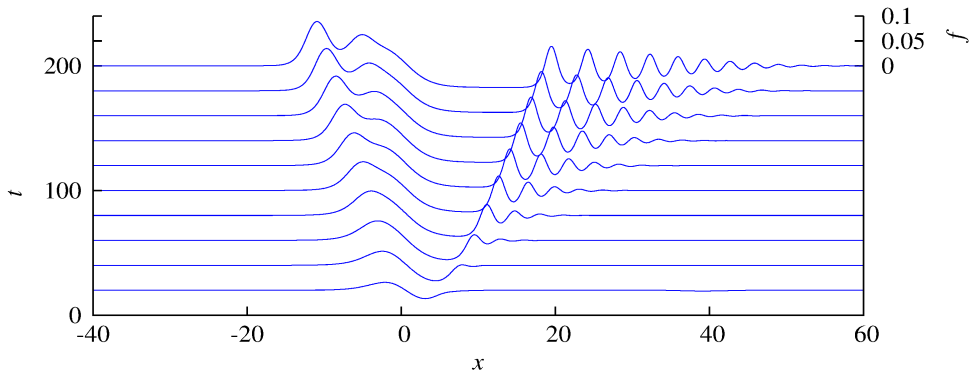


図 3:  $F_r = 1.00$  の時の界面波の時間発展.

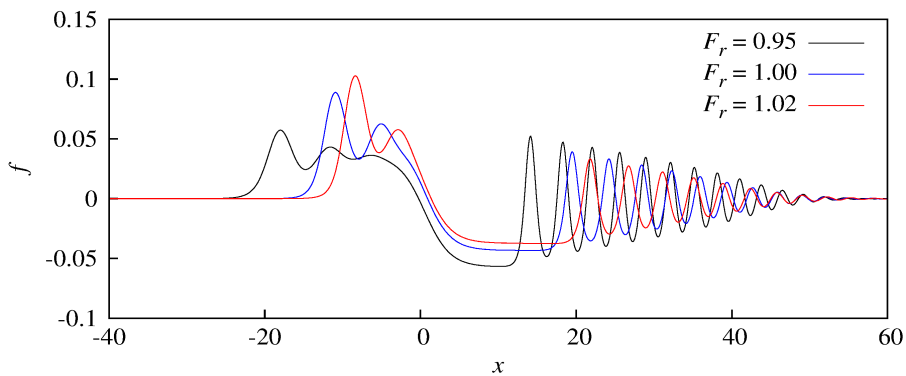


図 4:  $F_r = 0.95, 1.00, 1.02$  の時の波形 ( $t = 200$ ).

## 6.2 弱非線形理論との比較

$F_r = 1.00$  における fKdV 方程式と fEKdV 方程式による計算結果を、直接数値計算の結果と共に図 5(a) に示す。時刻は  $t = 200$  である。この図から、直接数値計算と fEKdV 方程式の結果がおおよそ一致していることが分かる。次に、 $F_r = 0.95$  とした場合も同様に図 5(b) に示す。ここでも、fEKdV 方程式の方が直接数値計算とよい一致を示すが、 $F_r = 1.00$  の時と比較すると、直接数値計算と fKdV 方程式の差が少なくなっていることが分かる。

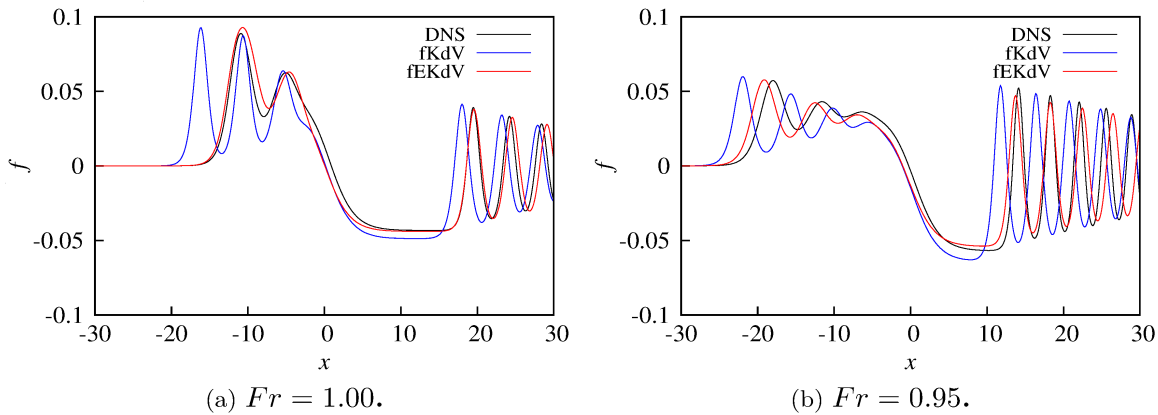


図 5: ナビエ・ストークス方程式の直接数値計算 (DNS) と弱非線形方程式 (fKdV および fEKdV 方程式) の比較 ( $t = 200$ ).

上記の理由を, fEKdV 方程式における 3 次の非線形項と 2 次の非線形項の大きさの比

$$\left| \frac{\varepsilon a_3 A^2 \frac{\partial A}{\partial \xi}}{a_1 A \frac{\partial A}{\partial \xi}} \right| = \left| \frac{a_3}{a_1} \varepsilon A \right| \sim \left| \frac{a_3}{a_1} f \right|, \quad (25)$$

から考える.  $a_1, a_3$  に式 (22) の値を用いると  $|a_3/a_1| = 8.6$  であり, 式 (25) は  $8.6 \times |f|$  となる. このことは,  $8.6 \times |f| \ll 1$ , すなわち,  $|f| \ll 0.1$  (例えば  $f = 0.01$  など) でないと, 3 次の非線形項が 2 次の非線形項に比べて無視できないことを示している. 孤立波の振幅を考えると,  $F_r = 1.00$  の時は  $f \approx 0.09$  で,  $F_r = 0.95$  の時は  $f \approx 0.06$  であり, どちらの場合も,  $|f| \ll 0.1$  を十分満たしているとは言えない. このことが, 図 5(a),(b) のいずれにおいても, fEKdV 方程式の解が, fKdV 方程式の解よりもナビエ・ストークス方程式の解に近かった (fKdV 方程式がよい近似解を与えない) 理由であると考えられる.

一方, 水面波に対する fEKdV 方程式においては,  $|a_3/a_1| = 0.25$  しかなく [8],  $|a_3 f/a_1| \ll 1$  となる条件は  $|f| \ll 4$  である. よって, 振幅  $|f|$  が上記の界面波の 40 倍程度の大振幅の波でも, fKdV 方程式がよい近似となる. 以上のことは, Hanazaki[9] でも議論されているように, 二層流体の界面波と水面波の決定的な違いとなる.

## 7 結論

まず, 移動格子を用いたナビエ・ストークス方程式の直接数値計算から, 二層流体の界面波の時間発展解を求めた. その結果, 主流速度と位相速度の比  $F_r = U/c$  によって, 波の振幅や位相速度が変化することが分かった.

次に, 直接数値計算の解を弱非線形方程式の解と比較することにより, 共鳴条件 ( $F_r = 1$ ) 近傍での界面波は, 少なくとも本研究で調べた場合については, fEKdV 方程式の方が, fKdV 方程式よりも良い近似であることが分かった. この原因は, fEKdV 方程式の 3 次と 2 次の非線形項の係数の比が大きいため, 波の振幅が非常に小さくない限り, 3 次の非線形項



が無視できないことにある。このことは、水面波が水深の  $1/2$  程度の大振幅でも (f)KdV 方程式で記述できることと対照的であり、二層流体の界面波と水面波の決定的な違いを表している。

## 参考文献

- [1] R. W. Yeung & P. Ananthkrishnan 1992 Oscillation of a floating body in a viscous fluid. *J. Eng. Math.* **26**, 211-230.
- [2] D. Zhang & A. T. Chwang 1996 Numerical study of nonlinear shallow water waves produced by a submerged moving disturbance in viscous flow. *Phys. Fluids* **8**, 147-155.
- [3] R. H. J. Grimshaw & N. Smyth 1986 Resonant flow of a stratified fluid over topography. *J. Fluid Mech.* **169**, 429-464.
- [4] W. K. Melville & K. R. Helfrich 1987 Transcritical two-layer flow over topography. *J. Fluid Mech.* **178**, 31-52.
- [5] 高見穎郎, 河村哲也 2007 偏微分方程式の差分解法. 東京大学出版会.
- [6] Kakutani, T & Yamasaki, N. 1978 Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.* **45**, 674-679.
- [7] 石岡圭一 2004 スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会.
- [8] T. R. Marchant & N. F. Smyth 1990 The extended Korteweg-de Vries equation and the resonant flow of a fluid over topography. *J. Fluid Mech.* **221**, 263-288.
- [9] Hanazaki, H. 1992 A numerical study of nonlinear waves in a transcritical flow of stratified fluid past an obstacle. *Phys. Fluids A* **4**, 2230-2243.