

# 渦をもつ非線形イオン音波の非可積分性について

大野裕司, 吉田善章

東京大学大学院新領域創成科学研究科

Yuji Ohno and Zensho Yoshida

Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

## 概要

Korteweg-de Vries 方程式や Kadomtsev-Petviashvili 方程式といった、非線形イオン音波方程式に逡減摂動法を適用することで得られるソリトン方程式たちには渦がない。我々は、これらの系ではさらに全てのオーダーの渦度がゼロであることを明らかにした。そして、速度場の摂動展開を変更することで、有限の渦度をもつような系を導出した。その方程式は Painlevé の意味で非可積分である。数値計算によって、局在したイオン音波が渦の場によってどのような影響を受けるかを解析した。

## 1 導入

イオン音波を記述する方程式には対流に起因する非線形性と電氣的相互作用に起因する分散効果があり、これらの組み合わせによって多様な非線形現象が現れる。もっとも単純な例として、Washimi & Taniuti [1] は逡減摂動法によって 1 次元 Korteweg-de Vries (KdV) 方程式を導いた。Kako & Rowlands [2] はこれを多次元化することを試み、2 次元の Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式 [3] を導出した。

Washimi & Taniuti [1], そして Kako & Rowlands [2] の研究に続いて、現在に至るまでさまざまな方向での拡張が取り組まれている。特に現実の系を模擬するための拡張が多く、イオンの温度を有限にするもの [4] や複数種類のイオンを考えるもの [5], 捕捉電子を扱うことで高次の非線形項が追加されるもの (修正 KdV/KP 方程式) [6] などがある。さらに、KdV 方程式や KP 方程式だけでなく、逡減摂動法の高次項のダイナミクスを扱う研究 [7] もある。

我々が取り組んでいるのは、「渦」を持ち込むという新たな方向への拡張である。KdV 方程式は空間を 1 次元に限定しているため、渦を持ち得る自由度が存在しない。そして、多次元空間への拡張である KP 方程式でも渦度はゼロになっている。さらに我々は、KP 方程式を導くような逡減摂動法が、全てのオーダーの渦度がゼロである場合にしか適用できないことを示した。このような結果から、KdV 方程式や KP 方程式といった非線形イオン音波のソリトン方程式は、渦がゼロという特殊な場合 (状態空間の限られた部分) に埋め込まれていると考えることができる [8]。

我々は速度場の摂動展開を変更することによって、一般化された 3 次元 KP 方程式と 2 次元 Euler 渦度方程式の組を導いた。このモデルの一つの特徴として、渦の場のダイナミクスがイオン音波から

影響を受けないことがある。我々は渦に単純な定常解を用いて、その影響下にある3次元KP方程式について、その(非)可積分性を中心に解析をおこなった。本稿はプレプリント[9]を元としている。

## 2 透減摂動法によるKP方程式の導出

まず透減摂動法によるKP方程式の導出から始める。KP方程式が渦なしになることは途中の計算からすぐに明らかになる。出発点となる方程式系は、運動方程式・連続の式・Poisson方程式である：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\phi, \quad (2)$$

$$-\Delta\phi = n - e^\phi, \quad (3)$$

ここで $\mathbf{u} = (u, v, w)^\top$ はイオンの速度、 $n$ は数密度、 $\phi$ は静電ポテンシャル、 $\Delta$ はLaplacianである。イオン温度は無視し、電子温度 $T_e$ は一定としている。Poisson方程式の中で、電子密度については、断熱近似を用いて $n_e = e^\phi$ としている。各変数の規格化には、電子温度の他に、背景密度 $n_0$ とイオン質量 $m_i$ を用いる。具体的には、速度はイオン音速 $\sqrt{T_e/m_i}$ 、静電ポテンシャルは $T_e/e$ 、長さはDebye長 $\sqrt{\varepsilon_0 T_e/n_0 e^2}$ を、時間はプラズマ周波数 $\sqrt{n_0 e^2/\varepsilon_0 m_i}$ の逆数でそれぞれ規格化している。

イオン音波の主たる伝搬方向を $x$ とし、微小なパラメータ $\varepsilon$ を導入して次のように独立変数を変換する：

$$\tilde{x} = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tilde{y} = \varepsilon y, \quad \tilde{z} = \varepsilon z, \quad \tilde{t} = \varepsilon^{3/2}t, \quad (4)$$

そして、従属変数は次のように $\varepsilon$ の級数に展開できると仮定する：

$$\begin{cases} n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \\ \phi = 0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \\ u = 0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ v = 0 + \varepsilon^{3/2} v_1 + \varepsilon^{5/2} v_2 + \dots, \\ w = 0 + \varepsilon^{3/2} w_1 + \varepsilon^{5/2} w_2 + \dots, \end{cases} \quad (5)$$

これらを式(1)–(3)へ代入して $\varepsilon$ で整理する。その結果、展開係数について次のような関係式が得られる：

$$n_1 = \phi_1 = u_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{y}}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{z}}, \quad (6)$$

$$n_2 - \phi_2 = \frac{\phi_1^2}{2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (7)$$

$\phi_1$ の時間発展方程式について、これらの関係式を用いて整理すると、3次元のKP方程式

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{t}} + \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \tilde{x}^3} \right) + \frac{1}{2} \Delta_\perp \phi_1 = 0. \quad (8)$$

が得られる。ただし $\Delta_\perp = \partial^2/\partial \tilde{y}^2 + \partial^2/\partial \tilde{z}^2$ である。

ここで渦度を計算してみよう。まず $z$ 方向の最低次の渦度は $\partial v_1/\partial \tilde{x} - \partial u_1/\partial \tilde{y}$ と評価できるが、これは式(6)から明らかにゼロである。 $y$ 方向の渦度についても、最低次は $\partial u_1/\partial \tilde{z} - \partial w_1/\partial \tilde{x}$ なの

で、同様にゼロである。\$x\$ 方向の渦度の最低次は \$\partial w\_1/\partial \bar{y} - \partial v\_1/\partial \bar{z}\$ である。これを \$\bar{x}\$ で微分すると、式(6)からゼロになる。そこで、\$x \rightarrow \pm\infty\$ で渦度が消滅する境界条件を仮定すれば、\$x\$ 方向の渦度は空間全体でゼロでなくてはならない。

以上のように、最低次の渦度、すなわち KP 方程式の渦度がゼロになることが直接計算からわかった。次のオーダーの（つまり \$u\_2, v\_2, w\_2\$ の）渦度もゼロでなくてはならないことが計算で確かめられる。それだけでなく、すべてのオーダーにおいて渦度がゼロになることが以下のようにして証明できる。（渦度について \$x \rightarrow \pm\infty\$ でゼロになるという境界条件を仮定する。）

運動方程式(2)に対して回転作用素 \$\nabla \times\$ を作用させることで渦度方程式が得られる。通減摂動法では、式(4)のように \$x\$ 方向に Galilei ブーストを施している。その結果、渦度方程式は次のような形になる：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (9)$$

摂動展開したときの各項の最低次数を計算すると、左辺第2項が他の項より低くなっている。そのため \$\partial \omega/\partial x = 0\$ でなくてはならない。ここで前述の境界条件を利用すると、渦度が空間全体でゼロでなくてはならない。この議論は最低次（1次）の渦度に関するものであるが、それがゼロなので、すべての項のオーダーは \$\epsilon^1\$ だけ増加する。すると同様の議論から、2次の渦度についても空間全体でゼロでなくてはならない。これを繰り返すことにより、すべてのオーダーの渦度がゼロでなくてはならないことがわかった。

### 3 有限な渦度を持つ系への拡張

本節で KP 方程式を有限の渦度をもつ系へと拡張する。前節では通減摂動法(4)–(5)を用いるときには渦度はゼロでなくてはならないことを証明したが、これは \$\partial \omega/\partial x = 0\$ と \$x \rightarrow \infty\$ で渦度がゼロになるという境界条件との組み合わせが原因であった。そこで、速度の展開式(5)を次のように変形する：

$$\begin{cases} v = \epsilon^{1/2}(\partial \psi(\bar{y}, \bar{z})/\partial \bar{z}) + \epsilon^{3/2}v_1 + \epsilon^{5/2}v_2 + \dots, \\ w = \epsilon^{1/2}(-\partial \psi(\bar{y}, \bar{z})/\partial \bar{y}) + \epsilon^{3/2}w_1 + \epsilon^{5/2}w_2 + \dots. \end{cases} \quad (10)$$

\$x\$ 方向に一様で、かつ非圧縮な速度場 \$\mathbf{v}\_0 = \nabla \psi(\bar{y}, \bar{z}) \times \mathbf{e}\_x\$ を低次に追加した。\$\psi\$ の時間発展方程式は、その渦度場 \$\Delta\_{\perp} \psi\$ に対する2次元 Euler 方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\perp} \psi + [\Delta_{\perp} \psi, \psi] = 0. \quad (11)$$

ただし \$[f, g] = (\partial f/\partial \bar{y})(\partial g/\partial \bar{z}) - (\partial f/\partial \bar{z})(\partial g/\partial \bar{y})\$ である。そして KP 方程式は、\$\psi\$ による移流項が追加される：

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \bar{x}^3} + [\phi_1, \psi] \right) + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \phi_1 = 0. \quad (12)$$

以降では簡単のために \$\phi\_1\$ などの添字と \$\bar{x}\$ などのチルダを省略する。

方程式を見てみると、渦の場 \$\psi\$ no 振る舞いは \$\phi\$ からの影響を受けないことがわかる。これは、前者の次数が後者のそれよりも低いことが原因である。そのため、イオン音波の場 \$\phi\$ が空間全体に偏在する場 \$\psi\$ によって散乱されながら伝搬するように考えることができる。簡単のため、\$\psi\$ には定常解

を用いて、 $\phi$  の時間発展のみを解析することにする。具体的には  $\psi = a \sin(ky) - a \cos(kz)$  が定常解の例になる。 $\phi$  に関する方程式 (12) を Kadomtsev-Petviashvili-Yoshida (KPY) 方程式と呼ぶことにする。

#### 4 KPY 方程式の Painlevé 解析

非線形微分方程式が可積分か否かを判別する手法として Painlevé テスト [10] というものが知られている。非線形偏微分方程式の解の特異多様体が動きうる極のみであるとき、その方程式は Painlevé 性を持つという。Painlevé 性は可積分性と同値であると考えられている。Painlevé テストとは、解  $\phi$  が特異多様体  $\varphi(x, y, z, t) = 0$  の近傍で

$$\phi(x, y, z, t) = \chi^{-q} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x, y, z, t) \chi^j \quad (13)$$

と Laurent 展開できると仮定し (展開関数  $\chi$  は  $\varphi = 0$  で  $\chi = 0$  となるものとする)、方程式へ代入して矛盾がないかを確認するものである。矛盾がないというのは、 $q$  が自然数であること、そしてすべての  $\phi_j$  が (方程式の階数に応じた任意性を除いて) 整合的に決定できるということである。

$\chi$  の選び方にはいくつか候補がある。もっとも単純なのは  $\chi = \varphi$  とすることだが、実はこの選び方では  $\phi_j$  が複雑な形になる。(KdV 方程式や KP 方程式などに対する結果は [10] にあるが、高次の項に関しては省略されている。) Conte [11] によって、

$$\chi = \left( \frac{\varphi_x}{\varphi} - \frac{\varphi_{xx}}{2\varphi_x} \right)^{-1}, \quad (14)$$

という選び方が (添字は微分を表す)、 $\varphi$  に対して制約をかけずに、計算を簡単にすることが示された。なお  $\varphi_x \neq 0$  という制約があるが、これは  $\chi = \varphi$  という選び方でも課せられるものである。

KdV 方程式や 2 次元 KP 方程式などのソリトン方程式は Painlevé テストをパスする [10]。しかし、3 次元 KP 方程式 (8) はこれをパスしない [12]。KPY 方程式 (12) は 3 次元 KP 方程式に移流項が追加されたものであり、同様にテストをパスしない、すなわち非可積分だと考えられる。(係数の選び方によって 1 次元 KdV 方程式や 2 次元 KP 方程式に帰着できる場合には可積分となる。解析結果は [9] に示した。) 次節では、数値解析によって非可積分性を検証することを試みる。

#### 5 数値解析

まず数値計算の設定について述べる。空間領域は  $(x, y, z) \in [0, 20] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$  とし、周期境界条件を用いた。周期境界条件を利用することで、KPY 方程式 (12) の最初の空間微分 (時間微分とともに作用している)  $\partial/\partial x$  を  $ik_x$  で置き換えて逆数をとることができる。ただし、 $k_x = 0$  の成分に関しては  $\Delta_{\perp} \phi_{k_x=0} = 0$  でなくてはならない。これは、Fourier 成分に対して  $\phi_{k_x=0, k_y^2+k_z^2 \neq 0} = 0$  とすることで処理できる。なお、 $1/(ik_x)$  を計算するときには  $-i/(k_x + i\delta)$  とおく [13, 14]。 $\delta$  は十分に小さい数で、ここでは倍精度浮動小数点数の計算機イプシロン  $2^{-52} \sim 2.2 \times 10^{-16}$  を用いた。この処理は、複素積分で特異点を回避するように経路をとることと同様のものである。時間を反転したときなど、 $1/(ik_x)$  がかかる部分の符号が逆転したときには、 $\delta$  の前の符号も逆転しなくてはなら

ない。時間発展法には 2 次 Strang 分割法 [15] を用いた。線形項は Fourier 変換を利用して解き、非線形項は 4 次 Runge-Kutta 法で近似した。初期条件には、2 次元 KP 方程式のソリトン解である線ソリトン

$$\phi_0(x, y, z) = 3A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{A}{2}}(x - By - C) \right] \quad (15)$$

に対して周期境界条件と  $\Delta_{\perp} \phi_{k_x=0} = 0$  を満たすよう修正したものを用いた (図 1)。 $A, B, C$  は任意だが、ここでは  $A = 1, B = 2, C = 10$  とした。 $z$  方向には一様であり、もしも渦の場  $\psi$  がなければ、 $\phi$  は形状を保ったまま伝搬する。 $\psi$  には、第 3 節の最後に述べたように、定常解

$$\psi(y, z) = a \sin \left( \frac{2\pi\kappa y}{L} \right) - a \cos \left( \frac{2\pi\kappa z}{L} \right), \quad (16)$$

を用いる。 $L$  は領域の  $y, z$  方向への長さであり、ここでは  $L = 10$  とした。 $a$  は渦の場の強さ、 $\kappa$  はその波数 (スケール) を表しているパラメータである。

以下に数値計算の結果を示す。まず  $a = 0.06, \kappa = 2$  としたときの、 $\phi$  の変化の様子が図 2 である。これは  $y = 0$  での断面図であり、初期状態では  $z$  方向に一様なものであった。それが時間発展とともに非一様、すなわち 3 次元的な構造へ変化していることがわかる。さらに時間が進むと、初期状態のように  $z$  方向へ一様なものへ戻っている様子が見える。このような変化が周期的に繰り返されることが確認された。なお、このパラメータでは、 $z$  平面による断面図では初期状態 (図 1) からほとんど変化は確認されなかった。

$a = 0.30, \kappa = 2$  とした場合には、 $\phi$  の変形は大きくなり、元の状態へ戻るような現象も確認されなかった。さらに、 $z$  平面による断面図でも、直線だった構造から振れた構造へ変化した。次に  $a = 1.0, \kappa = 2$  での結果を図 3 に示す。この場合は、初期状態の孤立した構造が崩れ、空間の中に広がっていることがわかる。

以上の結果から、2 次元の線ソリトンは弱い渦があってもその局在した構造を保つが、渦が強くなると、3 次元性が強くなって、非可積分性が顕著になり分裂して空間の中へ広がると考えられる。この観察を定量的に裏付けるために、Fourier 係数から平均波数を計算してその時間発展を調べた。図 4-6 に、振幅の二乗で重み付けした  $y$  方向の平均波数  $\langle k_y \rangle = \sum_{\mathbf{k}} k_y |\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 / \sum_{\mathbf{k}} |\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2$  の時間発展を示す。まず  $a = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08$  の場合が図 4 である。周期的な時間発展をしていて、その周期が  $a$  が増加したときに短くなっていることがわかる。図 5 が  $a = 0.08, 0.09, 0.10$  のときのもので、 $a = 0.09$  で周期的な振る舞いから増加する振る舞いへ変化している。さらに  $a$  を大きくすると、平均波数はより大きな値へ成長する。これらの結果は、先の  $\phi$  に関する観察の結果と一致している。 $\kappa$  の値を 2 から 8 に増加させたものとの比較を図 6 に示す。 $a$  の値が十分に大きいため、すべての場合で平均波数が増加しているが、 $\kappa = 8$  のときにより大きく増加していることがわかる。

## 6 結論

KP 方程式を導くための通減摂動法は渦度がゼロの場合にしか適用できないことを示し、摂動展開の変更によって有限の渦度をもつ系を導いた。それは 3 次元 KP 方程式に渦の場による移流項が追加されたものと、その渦の場のダイナミクスを記述する方程式の組である。後者はイオン音波の影響を

受けにくいようなものである。渦はイオン音波の伝搬方向に垂直なものであるから、必然的に方程式は3次元系となり、Painlevéの意味で非可積分となる。数値解析によって、2次元 KP 方程式のソリトン解である線ソリトンが渦によって変形・分裂する様子を観察した。渦が弱い場合には局在した構造が保たれ、変形は周期的であったが、渦が強くなると分裂して空間領域へ広がっていくことがわかった。

なお本稿での議論は、イオンの温度が有限の場合であっても変わらない。これは、イオンの温度を含むように拡張しても、渦の生成効果である傾圧効果は働かず、得られる方程式 (KP 方程式・KPY 方程式) の係数が変化するだけだからである。方程式の導出について、KdV 方程式は [4]、KP 方程式・KPY 方程式は [9] の Appendix を参照されたい。

## 参考文献

- [1] H. Washimi and T. Taniuti, "Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude," *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996–998 (1966).
- [2] M. Kako and G. Rowlands, "Two-dimensional stability of ion-acoustic solitons," *Plasma Phys.* **18**, 165–170 (1976).
- [3] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, "On the stability of solitary waves in weakly dispersing media," *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 539–541 (1970).
- [4] S. G. Tagare, "Effect of ion temperature on propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitudes in collisionless plasma," *Plasma Phys.* **15**, 1247–1252 (1973).
- [5] M. Q. Tran and P. J. Hirt, "The Korteweg–de Vries equation for a two component plasma," *Plasma Phys.* **16**, 617–621 (1974).
- [6] H. Schamel, "A modified Korteweg–de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons," *J. Plasma Phys.* **9**, 377–387 (1973).
- [7] R. S. Tiwari and M. K. Mishra, "Ion-acoustic dressed solitons in a dusty plasma," *Phys. Plasmas* **13**, 062112 (2006).
- [8] Z. Yoshida and P. J. Morrison, "Hierarchical structure of noncanonical Hamiltonian systems," *Phys. Scr.* **91**, 024001 (2016), arXiv:1410.2936.
- [9] Y. Ohno and Z. Yoshida, "Nonlinear ion acoustic waves scattered by vortices," arXiv preprint (2015), arXiv:1512.00289.
- [10] J. Weiss, M. Tabor, and G. Carnevale, "The Painlevé property for partial differential equations," *J. Math. Phys.* **24**, 522–526 (1983).
- [11] R. Conte, "Invariant Painlevé analysis of partial differential equations," *Phys. Lett. A* **140**, 383–390 (1989).
- [12] T. Brugarino and A. M. Greco, "Integrating the Kadomtsev–Petviashvili Equation in the 1 + 3 Dimensions via the Generalised Monge–Ampère Equation: An Example of Conditioned Painlevé Test," in *Physics on Manifolds*, Mathematical Physics Studies, Vol. 15, edited by M. Flato, R. Kerner, and A. Lichnerowicz (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1994) pp. 337–345.
- [13] C. Klein, C. Sparber, and P. Markowich, "Numerical study of oscillatory regimes in the Kadomtsev–Petviashvili equation," *J. Nonlinear Sci.* **17**, 429–470 (2007), arXiv:math-ph/0601025.
- [14] L. Einkemmer and A. Ostermann, "A splitting approach for the Kadomtsev–Petviashvili equation," *J. Comput. Phys.* **299**, 716–730 (2015), arXiv:1407.8154.
- [15] G. Strang, "On the construction and comparison of difference schemes," *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, 506–517 (1968).

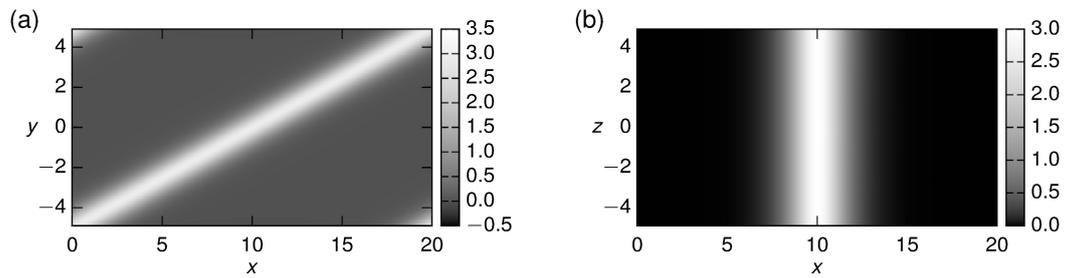


図1  $\phi$  の初期状態. (a)  $z = 0$  での断面図, (b)  $y = 0$  での断面図.

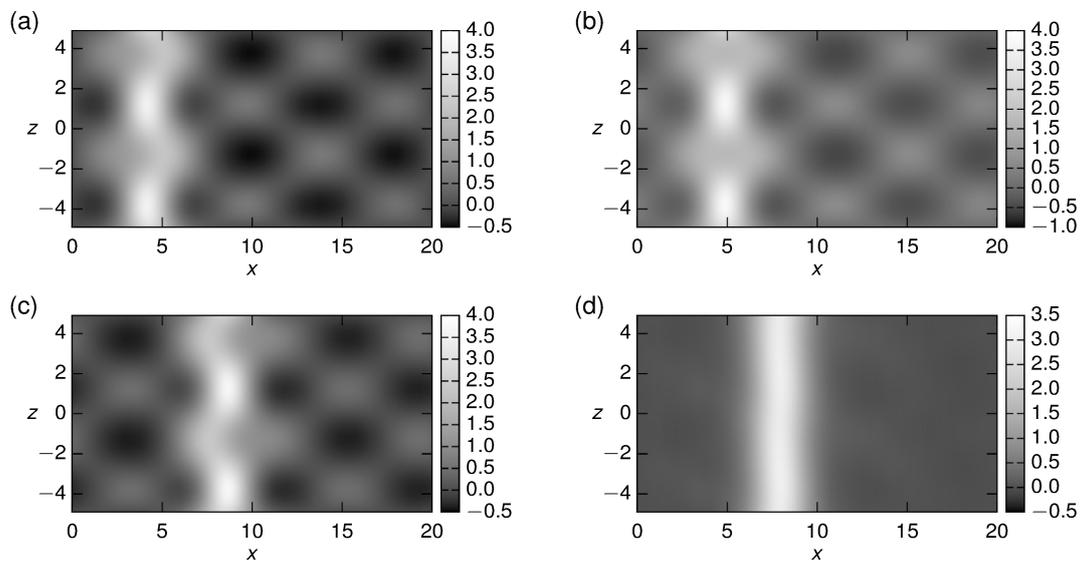


図2  $a = 0.06, \kappa = 2$  としたときの  $\phi$  の時間変化. (a)  $t = 25$ , (b)  $t = 32$ , (c)  $t = 40$ , (d)  $t = 60$ . (a)–(c) では異なる向きへ変形したのち, (d) で初期状態のように  $z$  方向へ一様な構造へ戻っている.

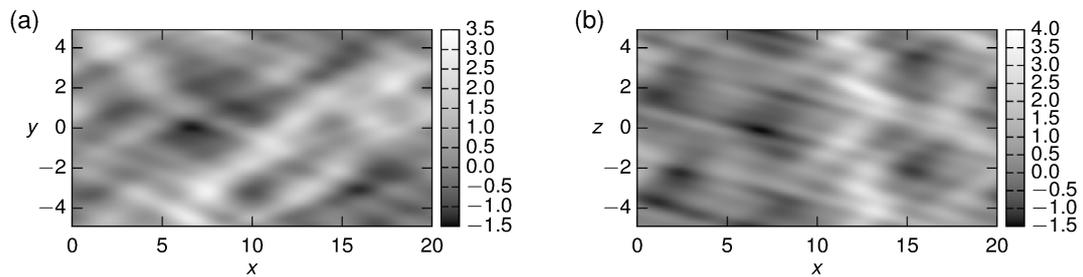


図3  $a = 1.0, \kappa = 2$  としたとき,  $t = 40$  での  $\phi$  の様子. (a)  $z = 0$  での断面図, (b)  $y = 0$  での断面図. 初期状態では孤立波だったものが, 領域全体に広がっている.

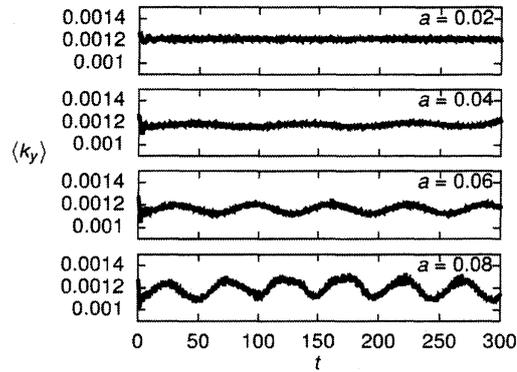


図4 平均波数  $\langle k_y \rangle$  の時間発展の様子 ( $a = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, \kappa = 2$ ). 周期的な振る舞いをしている。

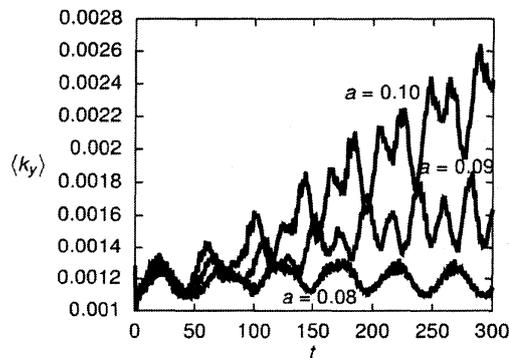


図5 平均波数  $\langle k_y \rangle$  の時間発展の様子 ( $a = 0.08, 0.09, 0.10, \kappa = 2$ ).  $a$  が増加すると平均波数は増加するようになる。

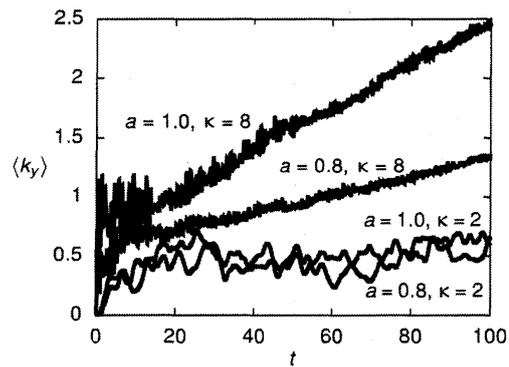


図6 平均波数  $\langle k_y \rangle$  の時間発展の様子 ( $a = 0.8, 1.0; \kappa = 2, 8$ ).  $\kappa$  の値が大きくなった場合、より平均波数も大きな値へ成長している。