

# 質量交換型 2 粒子模型のソリトン相互作用への応用

富山大・工 角 浩 (Hiroshi Kakuhata)  
Faculty of Engineering, University of Toyama

## 1 はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られている [1], その挙動から、ソリトンを粒子としてとらえた Skyrme 模型など原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方にたつて、これまでにソリトンを粒子として扱うために、ソリトンの相互作用に類似した相互作用をする二粒子系の振る舞いを調べ、その理論形式を考察してきた [3, 4, 5]。

KdV 方程式など多くのソリトン衝突では振幅を交換することが知られている。例えば、外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [7, 8]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}) \tag{1}$$

のソリトン解は双方向に進行するループソリトンである。ここで、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$  はストリングの位置ベクトル、 $\mathbf{J}$  は一定の外部電流ベクトル、 $\tau$  は時間、 $\sigma$  はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。それぞれ位相速度  $v$  と  $-v$  でソリトンが同一平面内で正面衝突するとき、連立非分散方程式の 2 ソリトン相互作用には、相対速度  $2v$  と振幅の正負に依存して 3 つのパターンがある (図 1)。正 (負) の振幅同士の衝突のときは、小さい相対速度ではループソリトン同士が重ならず弾くように衝突し、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。正と負の振幅の衝突のときには相対速度に関わりなく、小さいループが一時的に消え、このとき大きいループがさらに大きくなる。

このとき  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  をそれぞれ右に向かうソリトンと左に向かうソリトンのピーク ( $\partial^2 Z = 0; \partial^3 Z > 0$ ) の位置とすると  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  を厳密に求めることが可能である。しかし、解はあまりにも複雑であるので十分遠方での衝突前の近似解

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{v^2 [1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}] e^{2\gamma v \tau}}{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{v^2 [1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}] e^{2\gamma v \tau}} \end{aligned} \tag{2}$$

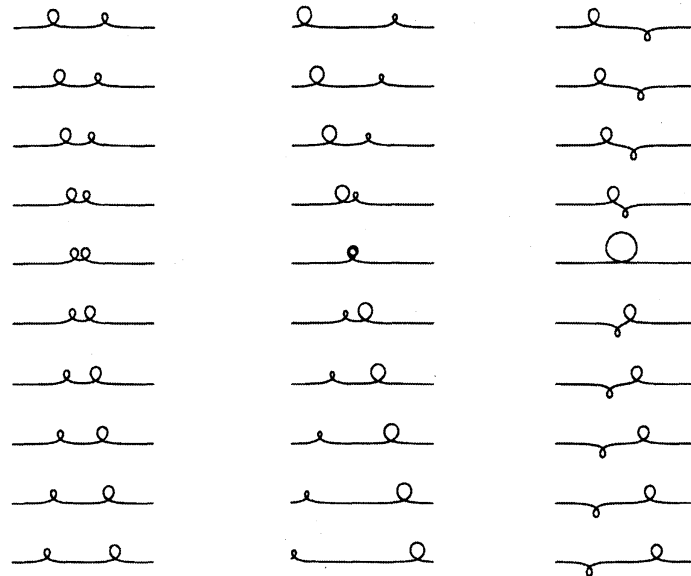


図1  $v = 0.12,$   $v = 0.24,$   $v = 0.12$

と衝突後の近似解

$$\begin{aligned}
 e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v) \cos\theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{v^2 [1 + 2(1-v) \cos\theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}, \\
 e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{v^2 [1 + 2(1+v) \cos\theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v) \cos\theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}
 \end{aligned} \tag{3}$$

を用いる。ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \theta_{12} = 0, \pi$$

であり、 $\theta_{12}$  は二つのループソリトンが作る面の間の角度で、 $\theta_{12} = 0$  は正（負）の振幅同士の、 $\theta_{12} = \pi$  は正と負の振幅のソリトン衝突に対応する。以下では、 $\theta_{12} = 0$  のときを考察する。ソリトンの質量を運動量の  $z$  成分、 $P_z = \int d\sigma \partial_\tau Z$  から定義することにすれば、右に進む大きいソリトンと左に進む小さいソリトンの質量はそれぞれ

$$m_1 = 4\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad m_2 = 4\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tag{4}$$

である。これらはソリトンの振幅に対応する。衝突前のそれぞれのソリトンに作用する力の  $z$  成分、 $\dot{P}_z$  から正の振幅同士では互いに斥力を及ぼすことが判るが (図2)、両ソリトンに作用する力を足してもゼロにならない。実際、両方のソリトンに働く力の和の  $z$  成分、 $(P_1 + P_2)_z$  をみると近似の範囲でも0にならず (図3)、全運動量が保存しない。これは並進不変性の破れを意味する (ここでは衝突前の様子のみを記したが衝突後も同様である)。これらのことは、元のソリトンが並進不変であることと矛盾する。

このように通常の質量を一定とする単純な粒子モデルでは、それぞれのソリトン粒子に作用する力の和が0にならず、全運動量が保存しない [4]。これは現実のソリトンは遠隔作用で相互作用

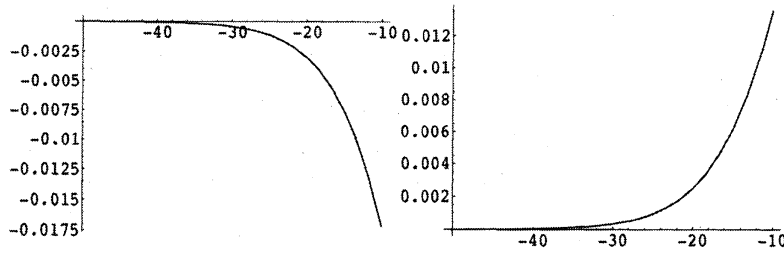


図2 図左：大きいソリトンに作用する力，図右：小さいソリトンに作用する力（横軸は時間  $\tau$ ）

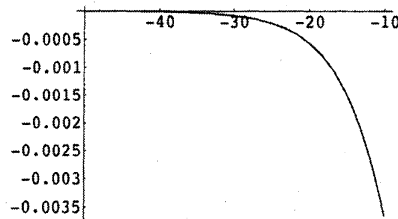


図3  $(P_1 + P_2)_z$

をしないためと考えられ，遠隔作用に基づくポテンシャルでのみ相互作用するような二粒子系では全運動量が保存しないことになる。すなわち，質量  $m_n$  ( $n = 1, 2$ ) を定数とするラグランジアン，

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - U(r) \quad (5)$$

で与えられるモデルではソリトン粒子の相互作用を記述できない。ここで， $q_n$  ( $n = 1, 2$ ) は各粒子の座標で，記号“ $\dot{\phantom{x}}$ ”は時間  $t$  による導関数を表し， $r$  は相対座標  $r = q_2 - q_1$  で， $U(r)$  は粒子間相互作用のポテンシャルである。従来のソリトン粒子の相互作用の記述ではこの点が十分考慮されていないと思われる [9]。図 1 の様に，連立非分散方程式のソリトンも衝突する際には振幅を交換する。ソリトン相互作用において Ansatz として振幅を質量と見なせば，ソリトン粒子の衝突は可変質量の粒子に対する二体問題になる。

これまでに，質量を交換しながら相互作用する二粒子系のできるだけ簡単に解析解を持つ toy model の定式化し，質量を交換する閉じた 2 体系のモデルを具体的に構成することが可能であることを示した [3]。

本稿では，このモデルを実際に連立非分散方程式に適用しその問題点を探る。

## 2 質量を交換する二粒子系

本節では，質量を交換する二粒子系の概要を述べる。ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - U(r) - V(m) \quad (6)$$

で与えられる系を考える。ここで、 $r$  は相対座標、 $U(r)$  はポテンシャル、 $q_1$  と  $q_2$  とともに質量  $m_1$  と  $m_2$  も力学変数である。ただし  $m_n$  ( $n=1,2$ ) の和  $M$  は定数として、質量差  $m = m_2 - m_1$  が変数であるとする。このラグランジアンでは  $m$  は運動項を持たない。 $V(m)$  は

$$V(m) = \frac{1}{M\alpha} \left( \frac{\beta}{2} m^2 - \frac{1}{4} \frac{m^4}{4\alpha} \right) \quad (7)$$

と  $m$  の関数であるが  $m$  を未定乗数のようにして扱うのでポテンシャルではない。なお、 $\alpha$  と  $\beta$  は運動方程式と初期条件から決める未定の定数である。全質量  $M$ 、重心座標  $Q$ 、換算質量  $\mu$  を

$$M = m_1 + m_2, \quad Q = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

とそれぞれ導入すれば、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} M \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r) - V(m)$$

になる。ラグランジアン第1項にある  $\dot{m}$  は一定質量の場合には現れない項である。 $Q$ 、 $r$  のみならず  $m$  についても変分をとると、変分原理により Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) &= -\frac{1}{2} \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) \dot{m} - \frac{dU}{dr}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) r \right] &= \frac{m}{4M} \dot{r}^2 + \frac{dV}{dm} \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。重心  $Q$  に対する運動方程式を積分し、積分定数を  $P_0$  とすれば

$$M \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} r \right) = P_0$$

となり、これを  $m$  の運動方程式に代入して

$$P_0 \dot{r} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{2\beta}{\alpha} m - \frac{m^3}{2\alpha^2}$$

を得る。ここで  $m$  の解として  $m$  が相対速度に比例するように

$$m = \alpha \dot{r}$$

とおけば

$$P_0 = 2\beta$$

を得る。 $\alpha$  を与えることが  $m$  の、 $\beta$  を与えることが  $P$  の初期値を与えることにそれぞれ対応する。これらを  $r$  に対する運動方程式に用いれば、原理的に通常の手順で運動方程式を解くことができる。また、相対運動に対する運動方程式から相対運動に対するハミルトニアン

$$H = \frac{1}{8} \left[ \left( M + 2 \frac{\alpha P_0}{M} \right) \dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M} r^4 \right] + U \quad (10)$$

を得るので、これらに適切な解を与えればポテンシャルを求めることができる。図1に類似の相互作用をする一定質量の  $\text{sech}^2$  ポテンシャルに対する以下の解（ただし、最後の解は対応するソリトン相互作用はないと思われる）

- $r = -\sinh^{-1}(\sqrt{1-a} \sinh 2vt)$  ( $a < 1$ ), passage type
- $r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1} \cosh 2vt)$  ( $a > 1$ ), reflection type
- $r = \sinh^{-1}(e^{-2vt})$  ( $a = 1$ ) asymptotically approaching type

を与えれば、ポテンシャル  $U(r)$  が

$$U(r) = \frac{g_1}{2} \text{sech}^2 r + \frac{g_2}{4} \text{sech}^4 r$$

の形で、 $g_1$  と  $g_2$  が適切な関係を満たせば質量を交換するソリトン相互作用に類似の衝突が記述できることは以前に示した [3]。

### 3 モデルの適用

非分散連立方程式のソリトン質量は (4) で定義されるので、全質量  $M$  と質量差  $m$  は

$$M = 8\gamma, \quad m = -8v\gamma = 4\gamma(-2v),$$

になる。これを見ると質量差  $m$  が相対速度に比例していることが判る。従って、前節で述べたモデルを適用できそうに思える。試みに、通過型の相互作用を考察する。近似解 (2) と (3) より相対座標  $\rho = \sigma_2 - \sigma_1$  から衝突前の相対速度

$$\dot{\rho}(\tau) \approx -2v \frac{1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}$$

と衝突後の相対速度

$$\dot{\rho}(\tau) \approx -2v \frac{1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}$$

を得る。次に、近似解 (2) と (3) を逆に近似的に解いて、これらを  $\rho$  の関数として表すと衝突前の相対速度は

$$\dot{\rho}(\rho) \approx -2v \frac{v^2 e^{\gamma \rho} + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12}}{v^2 e^{\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}},$$

また、衝突後の相対速度は

$$\dot{\rho} \approx -2v \frac{v^2 e^{-\gamma\rho} + 2(5-v^2) \cos \theta_{12}}{v^2 e^{-\gamma\rho} + 4(3-v^2) \cos \theta_{12}}$$

になる。これを全範囲での  $\rho$  に

$$\dot{\rho} = -2v \frac{v^2 \cosh \gamma\rho + (5-v^2) \cos \theta_{12}}{v^2 \cosh \gamma\rho + 2(3-v^2) \cos \theta_{12}}$$

と拡大し、これを用いればハミルトニアン (10) において、 $\dot{r} = \dot{\rho}$  とすれば、ポテンシャル

$$U = 2\gamma v^2 [4(1-2v^2)f - 2(1-8v^2)f^2 - 12v^2 f^3 + 3v^2 f^4]$$

を得る。これは変形 sech ポテンシャル (図 4) の

$$f(\rho, v) = \frac{(1-v^2) \cos \theta_{12}}{v^2 \cosh \gamma\rho + 2(3-v^2) \cos \theta_{12}}$$

の 4 次多項式になる。ポテンシャルの形状は図 5 に示した。これは左から順に

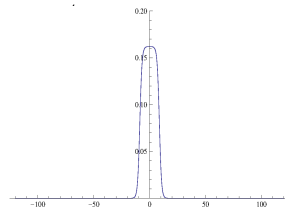


図 4  $f(\rho, v)$

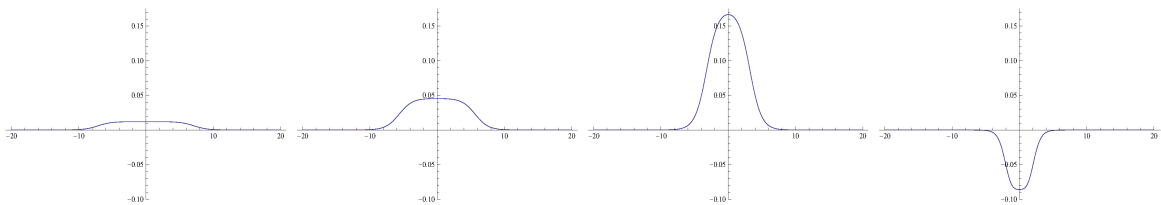


図 5 Potential  $U(\rho)$

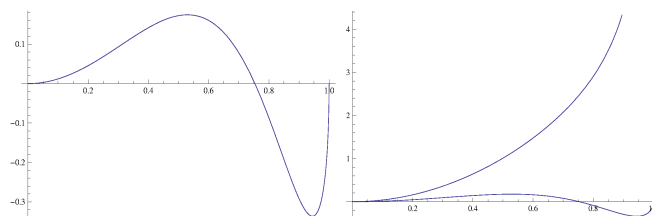


図 6 Peak of the potential as a function of  $v$

$v = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$  の場合である。相互作用の強さは  $v$  に依存し、小さな  $v$  では斥力で

あるが、大きな  $v$  では引力に転じる。ポテンシャルのピークを  $v$  の関数として図示すれば図 6 左のようになる。図 6 右（上の曲線が無限遠での運動エネルギー，下がポテンシャルのピーク曲線）のようにポテンシャルのピークは無限遠での運動エネルギー， $2\gamma v^2(2-v^2)$ ，すなわち全エネルギーの曲線とは交点を持たないので，反射型の相互作用は決して起きない。結局，ソリトン衝突を再現するためには質量交換だけでは不十分である。

## 4 Discussion

質量交換をする 2 体系のモデルを連立非分散方程式に適用することを試みた。近似解 (2) と (3) から求めたポテンシャルでは反射型の衝突が起きないことがわかった。運動量は質量と速度の積である。運動量が一定のとき粒子の質量が減少すれば，速度が増加するであろうように，質量交換は速度の変化をもたらすが，質量交換だけではほとんどが質量の移動にのみ費やされ，速度の移動が不十分だと考えられる。このためには gauge field を導入することが必要であろう [7]。しかし，gauge field だけでは引力や斥力また質量交換を説明することができないので，質量交換と gauge field の併用が必要である。

## 参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, "The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications", Springer-Verlag, 1993.
- [3] 角島浩, 「質量交換を伴う二粒子系」, 数理解析研究所講究録 1890 「非線形波動現象の数理と応用」, p.228, 京都大学数理解析研究所, 2014 年
- [4] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [5] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.1118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [6] 角島浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル III」, 数理解析研究所講究録 1800 「非線形波動現象の研究の新たな進展」, p.120, 京都大学, 2012 年
- [7] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [8] H. Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [9] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.