数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 65-72

セミフィボナッチ制約下の2次最適化 (I)

岩本誠一* (九州大学・名誉教授), 木村寛 † (秋田県立大学)

Seiichi Iwamoto (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University)

概 要

本報告ではダ・ヴィンチ・コードさらには一般にフィボナッチ・コードが最適点になるような条件付き最小化問題および条件付き最大化問題を紹介し、それら2つの問題は互いに双対の関係にあることを述べる。また双対問題の導出について動的法 (Dynamic Method)、プラス・マイナス法 (Plus-minus Method)、不等式法 (Inequality Method) の3つの方法で示す。

1 セミフィボナッチ制約付き最適化問題

フィボナッチ数列(Fibonacci sequence) は以下の2階線形差分方程式 (3項間漸化式)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1, \ x_0 = 0 \tag{1}$$

の解として定義される (表 1)。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

フィボナッチ数列の第1項から8項まではダ・ヴィンチ・コードとしても知られている [2]。定数 $c (\in R^1)$ を与える。このとき次の8変数最小化問題

$$(\mathrm{P}_1) \quad \begin{array}{lll} \text{minimize} & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + y_8^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\ & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\ & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\ & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c \\ & \text{(v)} & y \in R^8 \end{array}$$

は、$\hat{y} = (\hat{y}_1, \ \hat{y}_2, \ \ldots, \ \hat{y}_8) = \dfrac{c}{F_9}(F_1, \ F_2, \ \ldots, \ F_8)$ のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。特に、$c = F_9$ のときは、最小点 $\hat{y}$ はダ・ヴィンチ・コードになり、最小値は $m = F_8F_9$ になる。

*† 本研究は、科学研究費補助金「平成 26 年度基盤研究 (C)」課題番号 26400207 の助成を受けた。

他方、最大化問題

$$
(\mathrm{P}_2)\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & -(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2+\mu_5^2+\mu_6^2+\mu_7^2+\mu_8^2)+2c\mu_8 \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ \mu_1 = \mu_2 \\
& \text{(ii)}\ \ \mu_2+\mu_3 = \mu_4 \\
& \text{(iii)}\ \ \mu_4+\mu_5 = \mu_6 \\
& \text{(iv)}\ \ \mu_6+\mu_7 = \mu_8 \\
& \text{(v)}\ \ \mu \in R^8
\end{array}
$$

も、$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*) = \dfrac{c}{F_9}\big(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8\big)$ のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。特に、$c = F_9 = 34$ のときは、最大点 μ^* はダ・ヴィンチ・コードになり、最大値は $M = F_8F_9$ になる。実際、ラグランジュ未定乗数法によってこの最大解が得られる。

2 3つの双対化

8変数条件付き最小化問題 (P_1) と8変数条件付き最大化問題 (P_2) は互いに双対であることを3つの方法

1. 動的法 (Dynamic Method)
2. プラス・マイナス法 (Plus-minus Method)
3. 不等式法 (Inequality Method)

で示す。

2.1 動的法 (Dynamic Method)

最小化問題 (P_1) から 最大化問題 (P_2) を導き、逆も導こう。ここでは新たな条件付き最適化問題を媒介して Lagrange 乗数法を用い、平方完成も行っている。

まず、変数 $u = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_8) \in R^8$ を

$$u_k = y_k \quad 1 \le k \le 8$$

で定義すると、(P_1) はこれも制約に組み込んだ条件付き最小化問題

$$
(\mathrm{P}_1')\quad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & u_1^2+u_2^2+\cdots+u_8^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ y_1+y_2 = y_3 \\
& \text{(ii)}\ \ y_3+y_4 = y_5 \\
& \text{(iii)}\ \ y_5+y_6 = y_7 \\
& \text{(iv)}\ \ y_7+y_8 = c \\
& \text{(v)}\ \ u_k = y_k \ \ 1 \le k \le 8 \\
& \text{(vi)}\ \ y \in R^8,\ u \in R^8
\end{array}
$$

に同値になることに注意する。(P_1') は 12 線形制約下の 16 変数 2 次最小化である。このとき、(P_1) の任意の実行可能な $y = (y_1, y_2, \ldots, y_8) \in R^8$ に対して、(P_1') の実行可能な (y, u) が対応して

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_8^2$$

になる。制約 (v) より $y_k - u_k = 0 \quad 1 \le k \le 8$ である。したがって任意の $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8) \in R^8$ をとると、

$$\begin{aligned}
&u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_8^2 \\
&= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_8^2 + 2\mu_1(y_1 - u_1) + 2\mu_2(y_2 - u_2) + \cdots + 2\mu_8(y_8 - u_8) \\
&= (u_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + (u_2 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 + \cdots + (u_8 - \mu_8)^2 - \mu_8^3 + 2c\mu_8 \\
&\quad + 2(\mu_1 - \mu_2)y_1 + (\mu_2 + \mu_3 - \mu_4)y_3 + (\mu_4 + \mu_5 - \mu_6)y_5 + (\mu_6 + \mu_7 - \mu_8)y_7
\end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)}' & \mu_1 = \mu_2 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\
\text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8
\end{array}$$

の下では

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_8^2 \ge -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8$$

が成り立つ。この等号は

$$\text{(e)} \quad u_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

のとき成り立つ。したがって、任意の実行可能な $y \in R^8$ と (i)′〜(iv)′ を満たす μ に対して、不等式

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 \ge -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8$$

が成り立つ。等号は 条件 (i)〜(iv), (e*), (i)′〜(iv)′ が成り立つときに限り成立する。この 16 元 16 連立 1 次方程式系は

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}$$

$$(\mathrm{e}^*) \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

に同値になり、唯一の解

$$(y_1, y_2, \ldots, y_8) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1, F_2, \ldots, F_8)$$

をもつ。よって、最小化問題 (P_1) から (P_1') を経て最大化問題 (P_2) が導かれた。

今度は、逆に (P_2) から (P_1) を導こう。まず、変数 $v = (v_1, v_2, \ldots, v_8) \in R^8$ を

$$v_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

で定義すると、(P_2) はこれも制約に追加した条件付き最大化問題

$$(\mathrm{P}_2') \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_8^2) + 2c\mu_8 \\ \text{subject to} & \text{(i)}' \ \mu_1 = \mu_2 \\ & \text{(ii)}' \ \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 \\ & \text{(iii)}' \ \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\ & \text{(iv)}' \ \mu_6 + \mu_7 = \mu_8 \\ & \text{(v)}' \ v_k = \mu_k \ \ 1 \le k \le 8 \\ & \text{(vi)}' \ \mu \in R^8, \ v \in R^8 \end{array}$$

に同値である。(P_2') は 12 線形制約下の 16 変数 2 次最大化である。いま $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8) \in R^8$ を (P_2) の実行可能解とすると、(P_2') の実行可能解 (μ, v) が対応して

$$-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8 = -(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_8^2) + 2c\mu_8$$

になる。制約 (v)$'$ より $v_k - \mu_k = 0 \quad 1 \le k \le 8$ である。したがって任意の $y = (y_1, y_2, \ldots, y_8) \in R^8$ をとると、

$$\begin{aligned} & -(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_8^2) + 2c\mu_8 \\ = \ & -(v_1 - y_1)^2 + y_1^2 - (v_2 - y_2)^2 + y_2^2 - \cdots - (v_8 - y_8)^2 + y_8^2 \\ & - 2(y_1 + y_2 - y_3)\mu_2 - 2(y_3 + y_4 - y_5)\mu_4 - 2(y_5 + y_6 - y_7)\mu_6 - 2(y_7 + y_8 - c)\mu_8 \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\ \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c \end{array}$$

の下では

$$-(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_8^2) + 2c\mu_8 \le y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2$$

が成り立つ。この等号は

$$(\mathrm{e}') \quad v_k = y_k \quad 1 \le k \le 8$$

のとき成り立つ。したがって、(i)$'$〜(iv)$'$ を満たす μ と (i)〜(iv) を満たす y に対して、不等式

$$-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8 \le y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2$$

が成り立つ。等号は 条件 (i′)〜(iv′), (e*), (i)〜(iv) が成り立つときに限り成立する。この 16 元 16 連立 1 次方程式系は

$$\begin{array}{llll} \text{(i)}'' & y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\ \text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\ \text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\ \text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c \end{array}$$

$$\text{(e}^\star\text{)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \leq k \leq 8$$

に同値になり、唯一の解

$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

をもつ。よって、最大化問題 (P_2) から (P_2') を経て最小化問題 (P_1) が導かれた。

2.2 プラス・マイナス法 (Plus-minus Method)

8 変数最小化問題 (P_1) から 8 変数最大化問題 (P_2) を導き、逆も導こう。この方法では目的関数の 2 次性に着目して、双対変数を係数とする 1 次関数を引いて加えている。さらに平方完成も行っている。

$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) \in R^8$ を (P_1) の実行可能解とすると、任意の $\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) \in R^8$ に対して

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 \\ = \ & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2\mu_1 y_1 - 2\mu_2 y_2 - \cdots - 2\mu_8 y_8 + 2\mu_1 y_1 + 2\mu_2 y_2 + \cdots + 2\mu_8 y_8 \\ = \ & (y_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + (y_2 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 + \cdots + (y_8 - \mu_8)^2 - \mu_8^3 + 2c\mu_8 \\ & + 2\big[(\mu_1 - \mu_2)y_1 + (\mu_2 + \mu_3 - \mu_4)y_3 + (\mu_4 + \mu_5 - \mu_6)y_5 + (\mu_6 + \mu_7 - \mu_8)y_7\big] \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{llll} \text{(i)}' & \mu_1 = \mu_2 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\ \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8 \end{array}$$

の下では

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 \ \geq\ -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8$$

が成り立つ。この等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \leq k \leq 8$$

のとき成り立つ。すなわち、(i)〜(iv) を満たす y と (i)′〜(iv)′ を満たす μ に対して、不等式

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 \ \geq\ -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8$$

が成り立つ。等号は 条件 (i)〜(iv), (e), (i)′〜(iv)′ が成り立つときに限り成立する。この16元16連立1次方程式系は

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}
$$

$$\text{(e)}\quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

に同値になり、唯一の解

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

をもつ。よって、最小化問題 (P_1) から最大化問題 (P_2) が導かれた。

今度は、逆に (P_2) から (P_1) を導こう。いま $\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) \in R^8$ を (P_2) の実行可能解とすると、任意の $y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) \in R^8$ に対して

$$
\begin{aligned}
&-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8 \\
=\ & -(\mu_1 - y_1)^2 + y_1^2 - (\mu_2 - y_2)^2 + y_2^2 - \cdots - (\mu_8 - y_8)^2 + y_8^2 \\
& - 2(y_1 + y_2 - y_3)\mu_2 - 2(y_3 + y_4 - y_5)\mu_4 - 2(y_5 + y_6 - y_7)\mu_6 - 2(y_7 + y_8 - c)\mu_8
\end{aligned}
$$

が成り立つ。特に条件

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}
$$

の下では

$$-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8 \ \leq\ y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2$$

が成り立つ。この等号は

$$\text{(e}'\text{)}\quad \mu_k = y_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

のとき成り立つ。すなわち、(i)′〜(iv)′ を満たす μ と (i)〜(iv) を満たす y に対して、不等式

$$-(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8 \ \leq\ y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2$$

が成り立つ。等号は 条件 (i′)〜(iv′), (e′), (i)〜(iv) が成り立つときに限り成立する。この16元16連立1次方程式系は

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}
$$

$$\text{(e}'\text{)}\quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

に同値になり、唯一の解

$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

をもつ。よって、最大化問題 (P_2) から最小化問題 (P_1) が導かれた。

2.3 Inequality Method (不等式法)

8 変数最小化問題 (P_1) から 8 変数最大化問題 (P_2) を導こう。

定理 1 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \leq x^2 + y^2 \tag{2}$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (2) は**相加・相乗平均不等式** (arithmetic-geometric mean inequality, AG) とよばれる。

$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) \in R^8$ を (P_1) の実行可能解、$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) \in R^8$ を (P_2) の実行可能解とする。すなわち、y と μ は次を満たしている。

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 & \text{(i)}' & \mu_1 = \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + y_8 = c & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8.
\end{array}$$

ここで、AG 不等式 (2) を $y_k, \mu_k, k = 1, 2, \ldots, 8$ として用いて加えると

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k \leq \sum_{1}^{8} y_k^2 + \sum_{1}^{8} \mu_k^2\ ; \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8 \tag{3}$$

が得られる。この不等式 (3) の右辺は条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′ より、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k &= y_1\mu_2 + (y_3 - y_1)\mu_2 + y_3(\mu_4 - \mu_2) + (y_5 - y_3)\mu_4 \\
&\qquad + y_5(\mu_6 - \mu_4) + (y_7 - y_5)\mu_6 + y_7(\mu_8 - \mu_6) + (c - y_7)\mu_8 \\
&= c\mu_8
\end{aligned}$$

となる。よって、不等式 (3) は

$$2c\mu_8 \leq \sum_{1}^{8} y_k^2 + \sum_{1}^{8} \mu_k^2$$

であり、等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

のときのみ成立する。すなわち (i)〜(iv) を満たす y と、(i)$'$〜(iv)$'$ を満たす μ に対して不等式

$$-(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_8^2)+2c\mu_8 \le y_1^2+y_2^2+\cdots+y_8^2$$

が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)$'$〜(iv)$'$ が成り立つときのみ成立する。この 16 元 16 連立 1 次方程式系は

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rrcl}
\text{(i)}'' & y_1 & = & y_2 & \text{(i)} & y_1+y_2 & = & y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2+y_3 & = & y_4 & \text{(ii)} & y_3+y_4 & = & y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4+y_5 & = & y_6 & \text{(iii)} & y_5+y_6 & = & y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6+y_7 & = & y_8 & \text{(iv)} & y_7+y_8 & = & c
\end{array}$$

$$\text{(e)}\ \ y_k = \mu_k \qquad 1 \le k \le 8$$

に同値になり、唯一の解

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

をもつ。よって、最小化問題 (P_1) の双対問題は最大化問題 (P_2) となる。さらに最大化問題 (P_2) の双対問題は最小化問題 (P_1) であることも同時に示された。

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳) , 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[3] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

[4] 岩本 誠一、 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード（ VI) — , 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.

[5] 岩本 誠一、 ダ・ヴィンチ・コードは最適か?、数理経済学研究センター会報、第 37 号、平成 21(2009) 年 9 月、pp.1–9.

[6] 岩本誠一、 最適経路 — フィボナッチから黄金へ — 、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録 1734、２０１１年３月、ｐｐ．１９６−２０４．

[7] 岩本 誠一、最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization II – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[8] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.