数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 176-182

集団混合問題における構造的性質について

小笠原 悠 (Yu OGASAWARA)
金 正道 (Masamichi KON)
弘前大学大学院 理工学研究科
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

1 はじめに

テーブル席のある施設に対して，複数の集団が到着した際にその到着した集団をテーブル席に割り当てて施設全体の期待利益を最大化する問題を考える．このような問題はリベニューマネジメント (以下 RM)[6]，特にその中でもレストランを応用対象としたレストランリベニューマネジメント (以下 RRM) で既に幾つか提案されている [3][4]．RRM における到着集団を席に割り当てることを考える問題は集団混合問題（Party Mix Problem）[4] と呼ばれる．しかし，これまで考えられてきた集団混合問題を考えたモデルは，その中での単調性などの性質に関する議論は殆ど行われていない．それは，集団混合問題を考える際に食事時間 (Meal Duration)[7] を考慮することで状態空間が爆発的に増え，問題が複雑化するなどの理由が考えられる．

一方で，航空機やホテル，レンタカーなどの伝統的な RM では，予約リクエストに対する最適政策を求める問題は古くから研究されており [1][2]，それらでは到着した予約リクエストを受け入れるか断るかを決める Bid-Price の単調性に関する議論はよく行われている．

ここでは，食事時間を考慮しない場合の集団混合問題を考えることで，その時に得られる単調性などの構造的特徴を紹介する．更に，施設の中にいる人数が集団の到着率に影響する場合を考えた時にも，その中の一部の単調性は成り立つことを示す．

2 定式化

モデルを単純化するために，1) 施設にある最大のテーブルサイズより大きい集団は到着しないものとする，2) 集団とテーブルは分割・結合出来ないものとする，3) 施設が開いている時間は有限とする，という集団，テーブル，及び時間に対する前提条件を与える．集団とテーブルに対する表記を以下に示す．

- $p \in P = \{1, \cdots, \overline{P}\}$: サイズの異なる到着集団の集合
- $i \in I = \{1, \cdots, \overline{I}\}$: サイズの異なるテーブルの集合
- g_p: 集団 $p \in P$ のサイズ
- t_i: テーブル $i \in I$ のサイズ
- m_i: 施設にあるテーブル $i \in I$ の数

- $P_i = \{p \in P : g_p \leq t_i\}, i \in I$: テーブル $i \in I$ に座ることのできる集団 p の集合．要素の数を $\overline{P}_i$ とする．
- $I_p = \{i \in I : g_p \leq t_i\}, p \in P$: $p \in P$ が座ることの出来るテーブル i の集合．要素の数を $\overline{I}_p$ とする．

表記を単純にするため，以降 p は集団 $p \in P$，i はテーブル $i \in I$ を表すものとする．また，その p と i はサイズについて昇順になっているものとする．時間は $n = 0, \cdots, N-1, N$ で分かれているものとし，N は施設の開店，0 は施設の閉店を示す．施設が開いる間，集団は集団サイズで独立した非定常ポアソン分布に従って到着するものとし，食事時間を考慮しないことから，時間と集団サイズに依存した指数分布に従って施設から退出するものとする．時間 n では到着，退出，または何も無しのいずれが 1 回のみ起こるものとする [2]．ここでの退出率は集団が座るテーブルサイズに依存しないものとする．また，予約は考慮しないものとする．この時の施設の状態空間と到着率，退出率等の表記を以下に表す．

- $\overline{X}_i = \{\boldsymbol{x}_i = (x_p^i) : x_p^i \geq 0, p \in P_i\,; \sum_p x_p \leq m_i\}, i \in I$: テーブル i の状態に対する状態空間．x_p^i はテーブル i に座る集団 p の数を表す．
- $X_n = \{X = (\boldsymbol{x}_1 | \cdots | \boldsymbol{x}_{\overline{I}}) : \boldsymbol{x}_i \in \overline{X}_i, i \in I; \sum_i \sum_p x_p^i \leq N - n\}, n = 0, \cdots N$: 時間 n の施設に対する状態の状態空間．サブマトリックス $\boldsymbol{x_i}$ はテーブル i の状態を表す．
- r_p^n: 時間 n で集団 p から得られる期待利益
- λ_p^n: 集団 p が時間 n に施設に到着する確率．$\lambda_p^n \neq 0$ とする．
- q_p^n: 集団 p が時間 n に退出する確率．

次に，最大期待利益を示す．時間 n に初期状態 X を与えた時に，閉店までに得られる最大期待利益を $U_n(X)$ とする．最大期待利益は以下で表される．

$$
\begin{aligned}
U_n(X) = \sum_{p=1}^{\overline{P}} \lambda_p^n \left\{ \left(r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) \right)^+ + U_{n-1}(X) \right\} \\
+ \sum_{p=1}^{\overline{P}} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n U_{n-1}(X - \boldsymbol{e}_p^i) \\
+ \left(1 - \sum_{p=1}^{\overline{P}} \lambda_p^n - \sum_{p=1}^{\overline{P}} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n \right) U_{n-1}(X), \\
X \in X_n, n = N, \cdots, 1
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここで，$\boldsymbol{e}_p^i = (\boldsymbol{x}_1 | \cdots | \boldsymbol{x}_{\overline{I}})$ は，x_p^i のみ 1 をとって，それ以外は 0 をとるものとする．また，$(a)^+ = \max\{a, 0\}$ で $\Delta_p^i U_n(X) = U_n(X) - U_n(X + \boldsymbol{e}_p^i)$ とする．境界条件は $U_n(X) = -\infty, X \notin X_n$, $U_0(X) = 0, X \in X_0$ とする．$\Delta_p^i U_n(X)$ は $p \in P_i$ に対する Bid-Price を意味する．(2.1) より，最適政策は以下に示すことが出来る．

最適政策: 時間 n で状態 $X \in X_n$ の時，集団 p に対する最適政策は $r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) \geq 0$ ならば，集団 p をテーブル $\arg\min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X)$ に受け入れ，$r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) < 0$

ならば，集団 p の受け入れを断る．

3 構造的特徴

(2.1) 内の $\Delta_p^i U_n(X)$ は幾つかの単調性を持つ．

補題 1. 与えられたある 1 つの $p \in P$ と $X \in X_n$ に対して，$n = 0, \cdots, N$ において

$$\Delta_p^{\delta} U_n(X) \leq \Delta_p^{\delta'} U_n(X) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで $\delta \in I_p$, $\delta' \in I_p$, $\delta < \delta'$ で $\sum_p x_p^{\delta} < m_{\delta}$, $\sum_p x_p^{\delta'} < m_{\delta'}$ が成り立っているとする．

証明は省略する．この補題 1 は，到着した集団 p を，より大きなテーブルに割当てることで最大期待利益が下がる，もしくは変わらないことを意味している．これは，RM のアップグレードを考慮したモデル [5] と同様の構造を持つことを示している．

ここで，この補題 1 を以下のように現実的な仮定で一般化した場合にも成り立つことを以下に示す．

命題 1. 到着率 λ_p^n が状態 $X \in X_n$ にいる人数に対して非増加関数である場合にも補題 1 は成り立つ．

証明 n の時の施設の状態 $X \in X_n$ にいる人数は以下で表すことが出来る．

$$f(X) = \sum_{p=1}^{\overline{P}} \sum_{i \in I_p} g_p x_p^i$$

更に，$p \in P$ と n に対する到着率を関数 f に関する汎関数 $\lambda_p^n(f_X)$ と表し，任意の $p \in P, n$ に対して，$\lambda_p^n(f_X)$ は f_X に対する非増加関数とする．この仮定を従来のモデルに加えた式は以下になる．

$$\begin{aligned} U_n(X) = \sum_{p=1}^{\overline{P}} \lambda_p^n(f_X) \left\{ \left(r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) \right)^+ + U_{n-1}(X) \right\} \\ + \sum_{p=1}^{\overline{P}} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n U_{n-1}(X - e_p^i) \\ + \left(1 - \sum_{p=1}^{\overline{P}} \lambda_p^n(f_X) - \sum_{p=1}^{\overline{P}} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n \right) U_{n-1}(X), \\ X \in X_n, n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

境界条件は従来と変わらない．この時，$U_n(X + e_p^{\delta})$ と $U_n(X + e_p^{\delta'})$ の到着率 $\lambda_p^n(f_{X+e_p^{\delta}})$, $\lambda_p^n(f_{X+e_p^{\delta'}})$ は等しい．よって，式 (3.1) は補題 1 の証明と同様に示すことができ，$U_n(X + e_p^{\delta}) \geq U_n(X + e_p^{\delta'})$ が成り立つことがわかる．$\square$

ここで，退出率について現実的な以下の仮定を置く．

仮定 1. $\psi < \psi'$ が成り立つ $\psi \in P$ と $\psi' \in P$ に対して，$n = 0, \cdots, N$ で $q_\psi^n \geq q_{\psi'}^n$ が成り立つ.

この仮定1は，より大きな集団はより多く施設に滞在するということを意味する．仮定1の下では，以下に示す Bid-Price の単調性が成り立つ.

命題 2. ある一つの $\sigma \in I, \overline{P}_\sigma \geq 2$ が与えられたとき,

$$\Delta_\psi^\delta U_n(X) \leq \Delta_{\psi'}^\delta U_n(X), \tag{3.3}$$

が $n = 0, \cdots, N$ で成り立つ．ここで，$\psi \in P_\sigma, \psi' \in P_\sigma, \psi < \psi'$ とする.

証明は省略する．この命題2は各テーブル i が埋まっている数が同じでも，その埋まってるテーブルに座っている集団 p の構成の違いに単調性があることを表している．更に，この命題2の大小関係は仮定1の大小関係にのみ依存する．つまり，集団のサイズが変わっても退出率が変わらない場合においては命題2に示している Bid-Price は集団が変わっても全て等しくなる.

これらの単調性は最適政策の探索だけではなく，以下に示す範囲の解析に対して役に立つ.

定理 1. ある1つの $p \in P$ と n が与えられたとき，その時の p の期待利益 r_p^n が

$$r_p^n \notin \left[\min(\Delta_p^{\overline{d}_p^*} U_{n-1}(X), \Delta_p^{\overline{d}_p^*} U_{n-1}(\hat{X})), \max(\Delta_p^{\overline{d}_p^*} U_{n-1}(X), \Delta_p^{\overline{d}_p^*} U_{n-1}(\hat{X}))\right) \tag{3.4}$$

を満たす場合には n の時の状態 X と $\hat{X}$ での p に対する最適政策は等しい．ここで，$X \in X_n$ と $\hat{X} \in X_n$ は，それらの各サブマトリックス $\boldsymbol{x}_i$ と $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ で $\sum_p x_p^i = \sum_p \hat{x}_p^i$，及び，少なくとも1つの $\delta \in I_p$ で $m_\delta - \sum_{k \in P_\delta} x_k^\delta > 0$ を満たしているとする．$\overline{d}_p^*$ は X と $\hat{X}$ に対して p を受け入れることの出来る最小のテーブルとする.

定理1は r_p^n が (3.4) を満たすと，n での状態 $X \in X_n$ に対する p の最適政策は，テーブルの消費状態のみに依存し，最適政策のバリエーションは減少することを意味する．当然，(3.4) の範囲が広くなればなるほど，最適政策のバリエーションは増えやすくなるため，(3.4) の範囲が重要になる．しかし，命題2とその特徴より，p 間で退出率の差が無い場合には，この範囲は生まれないことがわかる．つまり，この最適政策のバリエーションが多くなることは，テーブルや到着集団が与えられたときには，各 p の到着率や期待利益ではなく，p 間での退出率の差のみが起因している.

4 数値実験

先の節で示した定理1の特徴を数値実験で例示する．$p \in P = \{1, \cdots, 4\}$, $i \in I = \{1, 2\}$, $g_p = p$, $t_1 = 2, t_2 = 4$, $m_1 = 6, m_2 = 7$ を満たす施設を考える．この場合の状態空間は $\max_n\{|X_n|\} = 9240$ となる．時間は $n = 0, \cdots, 100$ とした．入力データを以下の表1で示す．表1で示したデータセットを Sample 1 とする.

ここで，Sample 1 のデータセットに対して，$p = 3, 4$ の退出率を $p = 1, 2$ の退出率と等しくしたデータセットを Sample 2 とする．状態空間が大きいため，ここでは消費状態が

表 1: 到着率，退出率，期待利益

	到着率		退出率		期待利益			
n	$p=1,2$	$p=3,4$	$p=1,2$	$p=3,4$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
0-19	.035	.018	.005	.003	10	20	30	40
20-29	.074	.037	.016	.008	10	20	30	40
30-39	.123	.061	.027	.013	10	20	30	40
40-59	.140	.070	.038	.019	20	40	60	80
60-69	.123	.061	.027	.013	10	20	30	40
70-79	.074	.037	.016	.008	10	20	30	40
80-100	.035	.018	.005	.003	10	20	30	40

同じ 2 つの状態 $X=(0,5|0,0,6,0), \hat{X}=(0,5|0,6,0,0)$ のみ見る．Sample 1 と Sample 2 のそれぞれのデータセットに対して計算を行った際の状態 X と $\hat{X}$ に対する $p=1$ の最適政策と，そのときの定理 1 に示した範囲 (3.4) を表 2 に示す．n が多いため，表 2 は一部省略している．表 2 中の $d_p^{n*}(X)$ は時間 n で状態 X の時の p に対する最適政策を表している．

表 2: Sample 1, 2 に対する $p=1$ の最適政策と範囲 (3.4)

		Sample 1				Sample 2			
n	r_1^n	$\Delta_1^1 U_{n-1}(X)$	$\Delta_1^1 U_{n-1}(\hat{X})$	$d_1^{n*}(X)$	$d_1^{n*}(\hat{X})$	$\Delta_1^1 U_{n-1}(X)$	$\Delta_1^1 U_{n-1}(\hat{X})$	$d_1^{n*}(X)$	$d_1^{n*}(\hat{X})$
0	10	-	-	-	-	-	-	-	-
1	10	0	0	1	1	0	0	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	10	8.74	7.92	1	1	9.9	9.9	1	1
24	10	9.06	8.19	1	1	10.31	10.31	0	0
25	10	9.36	8.44	1	1	10.69	10.69	0	0
26	10	9.63	8.67	1	1	11.04	11.04	0	0
27	10	9.86	8.88	1	1	11.37	11.37	0	0
28	10	10.06	9.07	0	1	11.67	11.67	0	0
29	10	10.24	9.25	0	1	11.95	11.95	0	0
30	10	10.42	9.42	0	1	12.21	12.21	0	0
31	10	10.69	9.68	0	1	12.61	12.61	0	0
32	10	10.94	9.91	0	1	12.96	12.96	0	0
33	10	11.16	10.12	0	0	13.27	13.27	0	0
34	10	11.36	10.33	0	0	13.56	13.56	0	0
35	10	11.53	10.52	0	0	13.81	13.81	0	0
36	10	11.68	10.71	0	0	14.04	14.04	0	0
37	10	11.82	10.87	0	0	14.25	14.25	0	0
38	10	11.94	11.02	0	0	14.44	14.44	0	0
39	10	12.05	11.16	0	0	14.61	14.61	0	0
40	20	12.15	11.28	1	1	14.76	14.76	1	1
41	20	13.43	12.32	1	1	16.4	16.4	1	1
42	20	15.38	14.17	1	1	18.59	18.59	1	1
43	20	16.7	15.11	1	1	20.35	20.35	0	0
44	20	17.78	16.02	1	1	21.82	21.82	0	0
45	20	18.6	16.66	1	1	23.02	23.02	0	0
46	20	19.26	17.23	1	1	23.98	23.98	0	0
47	20	19.8	17.65	1	1	24.76	24.76	0	0
48	20	20.25	18.02	0	1	25.42	25.42	0	0
49	20	20.66	18.32	0	1	25.99	25.99	0	0
50	20	21.03	18.59	0	1	26.49	26.49	0	0
51	20	21.35	18.83	0	1	26.93	26.93	0	0
52	20	21.62	19.03	0	1	27.32	27.32	0	0

53	20	21.85	19.21	0	1	27.66	27.66	0	0
54	20	22.05	19.37	0	1	27.96	27.96	0	0
55	20	22.21	19.51	0	1	28.23	28.23	0	0
56	20	22.35	19.63	0	1	28.48	28.48	0	0
57	20	22.46	19.73	0	1	28.71	28.71	0	0
58	20	22.56	19.83	0	1	28.92	28.92	0	0
59	20	22.63	19.91	0	1	29.11	29.11	0	0
60	10	22.7	19.99	0	0	29.29	29.29	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
88	10	14.58	13.66	0	0	18.81	18.81	0	0

表2を見ると，定理1で示した範囲に r_p^n が入っているかいないかで最適政策が消費状態が同じ状態の中で変わり，退出率の差が無くなると，定理1で示した範囲が無くなることがわかる．

5 まとめ

RRMにおける集団混合問題で食事時間を考慮しない場合に見られる構造的特徴を紹介した．更にその中にある補題1は，施設の中にいる人数が到着率に影響を与える場合でも成り立つことを示した．本報告の中に載せた定理1の範囲は，最適政策の保存容量に影響する．本モデルでは，施設のテーブルサイズや数が多くなると爆発的にその状態空間は大きくなるが，集団間の退出率に差が無い場合は，他の値が如何なる場合であろうとも，最適政策の保存に必要なサイズは非常に少なくすることが出来ることを保証する．前節の例であれば，状態は最大で9240あるが，集団間で退出率に差が無い場合では，各 p の最適政策のバリエーションは $7 \times 8 = 56$ と，大きく減少する．

本モデルはテーブルのある施設の混雑度を命題1のように考慮することが可能である．これは，施設の混雑度と，その施設に対して到着してくる集団への最適政策によって得られる最大期待利益を同時に考えることが出来ることを意味する．現在RMはCRM(Customer Relationship Management)との理論的統合が目指されている[10]．そのCRMと顧客満足は強い関係があることが知られている[9][8]．今後は顧客満足に対して有用な，施設の混雑度への最適政策の影響を明らかにすることが課題である．

参考文献

[1] T. Lee and M. Hersh: A Model for Dynamic Airline Seat Inventory Control with Multiple Seat Bookings. *Transportation Science*, **27**(1993), 252-256.

[2] J. Subramanian, S. Stidham JR. and C. J. Lautenbacher: Airline Yield Management with Overbooking, Cancellations, and No-Shows. *Transportation Science*, **33**(1999), 147-167.

[3] D. Bertsimas and R. Shioda: Restaurant Revenue Management. *Operations Research*, **51**(2003), 472-486.

[4] F. Guerriero, G. Miglionico and F, Olivito: Strategic and operational decisions in restaurant revenue management. *European Journal of Operational Research*, **237**(2014), 1119-1132.

[5] C. Steinhardt and J. Gönsch: Integrated revenue management approaches for capacity control with planned upgrades. *European Journal of Operational Research*, **223**(2012), 380-391.

[6] K. T. Talluri, G. J. Van Ryzin: *The theory and practice of revenue management*(Springer, 2005).

[7] Kimes Sheryl E. and Stephani KA Robson: The impact of restaurant table characteristics on meal duration and spending. *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly*, **45**(4)(2004), 333-346.

[8] Hassan, Rana Saifullah, et al.: Effect of Customer Relationship Management on Customer Satisfaction. *Procedia Economics and Finance*, **23**(2015), 563-567.

[9] Mithas, Sunil, Mayuram S. Krishnan, and Claes Fornell: Why do customer relationship management applications affect customer satisfaction?. *Journal of Marketing*, **69**(4)(2005), 201-209.

[10] Wang, Xuan Lorna, et al.: Revenue Management: Progress, Challenges, and Research Prospects. *Journal of Travel & Tourism Marketing*, **32**(7)(2015), 797-811.