数理解析研究所講究録
第 1990 巻 2016 年 238-243

Zadeh の拡張原理に関する一考察

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概 要

Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合は、クリスプ写像の下でのファジィ集合の像として定義される。クリスプ写像の下でのファジィ集合のレベル集合の像と Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合の関係が [2] において得られている。本稿では、[2] において得られているそれらの結果を拡張する。そして、その拡張した結果を用いて応用上有用ないくつかの結果を導く。

1 準備

$\mathbb{R}$ および $\mathbb{C}$ をそれぞれすべての実数および複素数の集合とする。$a,b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ および $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。本稿を通して、X, Y, Z を空でない集合とする。

X 上のファジィ集合 $\widetilde{a}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、その同一視されたメンバーシップ関数も $\widetilde{a} : X \to [0,1]$ と表す。X 上のすべてのファジィ集合の集合を $\mathcal{F}(X)$ とする。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ と $\alpha \in]0,1]$ に対して $\widetilde{a}$ の α-レベル集合は

$$[\widetilde{a}]_\alpha = \{x \in X : \widetilde{a}(x) \geq \alpha\}$$

と定義される。

クリスプ集合 $S \subset X$ に対して、S の指示関数は各 $x \in X$ に対して

$$c_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in S \\ 0 & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

である $c_S : X \to \{0,1\}$ と定義される。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ は

$$\widetilde{a} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{a}]_\alpha}$$

と表現でき、分解定理として知られている（例えば、[1] 参照)。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &= \{\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} : S_\alpha \subset X, \alpha \in]0,1]\} \\ \mathcal{S}(X) &= \{\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{P}(X) : S_\beta \supset S_\gamma \text{ for } \beta, \gamma \in]0,1] \text{ with } \beta < \gamma\} \end{aligned}$$

とし、$M_X : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X)$ を各 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}$$

と定義する。$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{P}(X)$ と $x \in X$ に対して

$$M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}(x) = \sup\{\alpha \in]0,1] : x \in S_\alpha\}$$

と表せる。ただし、$\sup\emptyset = 0$ とする。また、分解定理は、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ に対して

$$\widetilde{a} = M_X(\{[\widetilde{a}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と表せる。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ と $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{P}(X)$ に対して、$\widetilde{a} = M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$ であるとき、$\widetilde{a}$ は $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ によって生成されたファジィ集合といい、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ を $\widetilde{a}$ の生成元という。

2 主な結果

本節では、[2] において得られているクリスプ写像の下での 1 つまたは 2 つのファジィ集合のレベル集合の像と Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合の関係をより有用な形に拡張する。

次の定義は、Zadeh の拡張原理によるクリスプ写像の下でのファジィ集合の像の定義である。Zadeh の拡張原理に関しては、例えば [1] 参照。

定義 1

(i) $f : X \to Y$ と $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ に対して、$f(\widetilde{a}) \in \mathcal{F}(Y)$ を

$$f(\widetilde{a})(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \widetilde{a}(x), \quad y \in Y$$

と定義する。

(ii) $f : X \times Y \to Z$ と $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X), \widetilde{b} \in \mathcal{F}(Y)$ に対して、$f(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \in \mathcal{F}(Z)$ を

$$f(\widetilde{a}, \widetilde{b})(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \widetilde{a}(x) \wedge \widetilde{b}(y), \quad z \in Z$$

と定義する。ここで、$\widetilde{a}(x) \wedge \widetilde{b}(y) = \min\{\widetilde{a}(x), \widetilde{b}(y)\}$ である。

命題 1 （[2] の Proposition 2.1(i) ）$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{P}(X)$ とし、$\widetilde{a} = M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X)$ とする。このとき

$$S_\alpha \subset [\widetilde{a}]_\alpha, \quad \alpha \in]0,1]$$

となる。

命題2 $f : X \to Y$ とし、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{P}(X)$ とし、$\widetilde{a} = M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X)$ とする。このとき

$$f(\widetilde{a}) = M_Y(\{f(S_\alpha)\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{f(S_\alpha)}$$

となる。

命題1より

$$f(S_\alpha) \subset [f(\widetilde{a})]_\alpha, \quad \alpha \in]0,1]$$

となるが、一般には

$$f(S_\alpha) \neq [f(\widetilde{a})]_\alpha$$

となる。[2] の Proposition 3.1 において、命題2で $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} = \{[\widetilde{a}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ のときの結果が得られている。命題2は、[2] の Proposition 3.1 の拡張である。

命題3 $f : X \times Y \to Z$ とし、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(X)$, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(Y)$ とし、$\widetilde{a} = M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X), \widetilde{b} = M_Y(\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(Y)$ とする。このとき

$$f(\widetilde{a},\widetilde{b}) = M_Z(\{f(S_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{f(S_\alpha,T_\alpha)}$$

となる。

命題1より

$$f(S_\alpha,T_\alpha) \subset [f(\widetilde{a},\widetilde{b})]_\alpha, \quad \alpha \in]0,1]$$

となるが、一般には

$$f(S_\alpha,T_\alpha) \neq [f(\widetilde{a},\widetilde{b})]_\alpha$$

となる。[2] の Proposition 3.2 において、命題3で $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} = \{[\widetilde{a}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} = \{[\widetilde{b}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ のときの結果が得られている。さらに、[2] の Proposition 3.3 において

$$f([\widetilde{a}]_\alpha,[\widetilde{b}]_\alpha) = [f(\widetilde{a},\widetilde{b})]_\alpha, \quad \alpha \in]0,1]$$

となるための必要十分条件が、任意の $z \in Z$ に対して $f^{-1}(z) = \emptyset$ または $\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \widetilde{a}(x) \wedge \widetilde{b}(y)$ の値が取られることであることが示されている。命題3は、[2] の Proposition 3.2 の拡張である。

命題3より、次の命題が得られる。

命題4 $m \geq 2$ とし、$X_i, i = 1,2,\cdots,2m-1$ を空でない集合とし、$f_i : X_{2i-1} \times X_{2i} \to X_{2i+1}, i = 1,2,\ldots,m-1$ とする。$\{S_{1\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(X_1)$ とし、$\widetilde{a}_1 = M_{X_1}(\{S_{1\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X_1)$ とし、$\{S_{2i-2,\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(X_{2i-2}), i = 2,3,\cdots,m$ とし、$\widetilde{a}_i = M_{X_{2i-2}}(\{S_{2i-2,\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X_{2i-2}), i = 2,3,\cdots,m$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
&f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2),\widetilde{a}_3),\widetilde{a}_4)\cdots,\widetilde{a}_m) \\
&= M_{X_{2m-1}}(\{f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1(S_{1\alpha},S_{2\alpha}),S_{4\alpha}),S_{6\alpha})\cdots,S_{2m-2,\alpha})\}_{\alpha\in]0,1]}) \\
&= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1(S_{1\alpha},S_{2\alpha}),S_{4\alpha}),S_{6\alpha})\cdots,S_{2m-2,\alpha})}
\end{aligned}$$

となる。

命題4で $\{S_{1\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]}=\{[\widetilde{a}_1]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$, $\{S_{2i-2,\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]}=\{[\widetilde{a}_i]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}, i=2,3,\cdots,m$ とすると

$$\begin{aligned}&f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2),\widetilde{a}_3),\widetilde{a}_4)\cdots,\widetilde{a}_m)\\&=M_{X_{2m-1}}(\{f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1([\widetilde{a}_1]_\alpha,[\widetilde{a}_2]_\alpha),[\widetilde{a}_3]_\alpha),[\widetilde{a}_4]_\alpha)\cdots,[\widetilde{a}_m]_\alpha)\}_{\alpha\in]0,1]})\\&=\sup_{\alpha\in]0,1]}\alpha c_{f_{m-1}(\cdots f_3(f_2(f_1([\widetilde{a}_1]_\alpha,[\widetilde{a}_2]_\alpha),[\widetilde{a}_3]_\alpha),[\widetilde{a}_4]_\alpha)\cdots,[\widetilde{a}_m]_\alpha)}\end{aligned}$$

を得るが、[2] の Proposition 3.2 からは導かれない。

3 応用

本節では、前節で得られた結果を適用して、応用上有用ないくつかの結果を導く。

次は、Zadeh の拡張原理によるファジィ内積の定義である。

定義2 V を複素内積空間とする。各 $x,y\in V$ に対して、x と y の内積を $\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}$ と表す。$\widetilde{a},\widetilde{b}\in\mathcal{F}(V)$ に対して、$\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle\in\mathcal{F}(\mathbb{C})$ を次で定義されるファジィ集合とする。

$$\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle(x)=\sup_{\langle y,z\rangle=x}\widetilde{a}(y)\wedge\widetilde{b}(z),\quad x\in\mathbb{C}$$

$\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ のファジィ内積とよぶ。

命題3をファジィ内積に適用することによって、次の命題が得られる。

命題5 V を複素内積空間とし、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]},\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}\in\mathcal{S}(V)$ とし、$\widetilde{a}=M_V(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}),\widetilde{b}=M_V(\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})\in\mathcal{F}(V)$ とする。このとき

$$\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle=M_{\mathbb{C}}(\{\langle S_\alpha,T_\alpha\rangle\}_{\alpha\in]0,1]})=\sup_{\alpha\in]0,1]}\alpha c_{\langle S_\alpha,T_\alpha\rangle}$$

となる。

次は、Zadeh の拡張原理によるファジィ距離の定義である。

定義3 X は距離関数 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ をもつ距離空間とする。$\widetilde{a},\widetilde{b}\in\mathcal{F}(X)$ に対して、$d(\widetilde{a},\widetilde{b})\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ を次で定義されるファジィ集合とする。

$$d(\widetilde{a},\widetilde{b})(x)=\sup_{d(y,z)=x}\widetilde{a}(y)\wedge\widetilde{b}(z),\quad x\in\mathbb{R}$$

$d(\widetilde{a},\widetilde{b})$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の間のファジィ距離とよぶ。

命題3をファジィ距離に適用することによって、次の命題が得られる。

命題6 X は距離関数 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ をもつ距離空間とし、$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]},\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}\in\mathcal{S}(X)$ とし、$\widetilde{a}=M_X(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}),\widetilde{b}=M_X(\{T_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})\in\mathcal{F}(X)$ とする。このとき

$$d(\widetilde{a},\widetilde{b})=M_{\mathbb{R}}(\{d(S_\alpha,T_\alpha)\}_{\alpha\in]0,1]})=\sup_{\alpha\in]0,1]}\alpha c_{d(S_\alpha,T_\alpha)}$$

となる。

次は、Zadeh の拡張原理によるファジィ集合の二項演算の定義である。

定義 4 任意の $x, y \in X$ に対して、二項演算 $x * y \in X$ が定義されているとする。$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(X)$ に対して、$\widetilde{a} * \widetilde{b} \in \mathcal{F}(X)$ を次で定義されるファジィ集合とする。

$$(\widetilde{a} * \widetilde{b})(x) = \sup_{y * z = x} \widetilde{a}(y) \wedge \widetilde{b}(z), \quad x \in X$$

命題 4 をファジィ集合の二項演算に適用することによって、次の命題が得られる。

命題 7 任意の $x, y \in X$ に対して、二項演算 $x * y \in X$ が定義されているとする。$\{S_{i\alpha}\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{S}(X), i = 1, 2, \cdots, m$ とし、$\widetilde{a}_i = M_X(\{S_{i\alpha}\}_{\alpha \in]0,1]}) \in \mathcal{F}(X), i = 1, 2, \cdots, m$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
&(\cdots((\widetilde{a}_1 * \widetilde{a}_2) * \widetilde{a}_3) \cdots * \widetilde{a}_m) \\
&= M_X(\{(\cdots(((S_{1\alpha} * S_{2\alpha}) * S_{3\alpha}) * S_{4\alpha}) \cdots * S_{m-1,\alpha}) * S_{m\alpha}\}_{\alpha \in]0,1]}) \\
&= \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{(\cdots(((S_{1\alpha} * S_{2\alpha}) * S_{3\alpha}) * S_{4\alpha}) \cdots * S_{m-1,\alpha}) * S_{m\alpha}}
\end{aligned}$$

となる。

以下、X は距離関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ をもつ距離空間とし、ファジィ配置問題を定式化する。

ある地域に単一の施設を配置しようとする問題は、単一施設配置問題とよばれる。$a_i \in X, i = 1, 2, \cdots, m$ を需要点とする。需要点は、配置する施設の利用者の位置を表す固定された点である。各 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して、$w_i > 0$ を需要点 a_i に付随する重みとする。$x \in X$ を配置する施設の位置を表す変数とし、$S \subset X, S \neq \emptyset$ を施設の配置可能領域とする。このとき、(クリスプ) ミニサム型配置問題は次のように定式化される。

$$(\mathrm{P}) \qquad \left| \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i d(a_i, x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{array} \right.$$

問題 (P) における需要点 $a_i, i = 1, 2, \cdots, m$ をファジィ需要点 $\widetilde{a}_i \in \mathcal{F}(X), i = 1, 2, \cdots, m$ に置き換えることによってファジィミニサム型配置問題を定式化することができる。ファジィ需要点は配置する施設の利用者の位置を表すファジィ集合であり、$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ 上に何らかの順序が定義されていることを仮定する。ファジィミニサム型配置問題は次のように定式化される。

$$(\widetilde{\mathrm{P}}) \qquad \left| \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i d(\widetilde{a}_i, x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{array} \right.$$

ここで、$d(\widetilde{a}_i, x) = d(\widetilde{a}_i, c_{\{x\}})$ である。また、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ は Zadeh の拡張原理によって次のように定義される。

$$(\lambda\widetilde{a})(y) = \sup_{\lambda z = y} \widetilde{a}(z), \quad y \in \mathbb{R}$$

分解定理と命題2, 6および7より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} w_i d(\widetilde{a}_i, x) &= M_{\mathbb{R}}\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i d([\widetilde{a}_i]_\alpha, x)\right\}_{\alpha \in]0,1]}\right) \\ &= \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{\sum_{i=1}^{m} w_i d([\widetilde{a}_i]_\alpha, x)} \end{aligned}$$

となる。

4 結論

本稿では、ファジィ集合のレベル集合とそれらのファジィ集合から Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合の関係として得られている結果 [2] の Proposition 3.1 および 3.2 それぞれを命題2および3として拡張した。さらに、命題3からより有用な形として命題4が得られた。次に、これら得られた結果を適用して、応用上有用ないくつかの結果として命題5, 6および7が得られた。命題5, 6および7はそれぞれファジィ内積, ファジィ距離およびファジィ集合の演算に関する性質を調べるときに非常に有用になる。最後に、ファジィミニサム型配置問題を定式化した。本稿で得られた結果は、ファジィミニサム型配置問題のような様々なファジィ数理計画問題を解析する場合に重要になる。

参考文献

[1] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21-124.

[2] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 64, 1978, pp.369-380.