数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 138-145

一般化された主部分空間と中間頂点代数

川節　和哉
Kazuya Kawasetsu
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo
E-mail adress: kawasetu@ms.u-tokyo.ac.jp

頂点代数や, 頂点代数に共形構造を入れた頂点作用素代数（VOA）の理論において, 指標のモジュラー不変性は重要な性質である. VOA 理論の金字塔である Zhu 理論 [Z] において, VOA のモジュラー不変性の理論が展開された. 一方, 共形構造を持たない頂点代数に関するモジュラー不変性の一般論はまだ存在せず, まずは具体例を研究する必要がある. 本稿では, 格子擬 GVA に付随する一般化された主部分空間（GPS）の概念を導入し, フェルミオニックな（組合せ論的な）基底と指標公式を与える. 格子擬 GVA は整格子に付随する格子（超）VOA の一般化であり, GPS は, [MP] による格子（超）VOA の Feigin-Stoyanovsky 型主部分空間の一般化である. GPS の非自明な頂点部分代数は共形構造を持たないが, 指標公式を用いて, A_1 型のウェイト格子 A_1° に付随する GPS W の極大頂点部分代数 $W^{(0)}$ がモジュラー不変性を持つことを示す. ところで, 頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ [K1] も, モジュラー不変性を持つが共形構造は持たない. 頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ と部分 VOA $V_{E_7} \subset V_{E_{7+1/2}}$ の組の分岐則を $W^{(0)}$ とその上の表現によって記述する.

研究集会での講演を薦めてくださった荒川知幸氏並びに代表者の直井克之氏に感謝する.

1　擬 GVA と頂点代数

本節では, 頂点代数と, その一般化である擬 GVA の概念を説明する. $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の元を, $\mathbb{C}$ の $\mathbb{Z}$-不変な部分集合と同一視する. ベクトル空間 U を考え, 形式的ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $f_k \in U$ 全体のなす空間を $U[[z]]$ と書く. Γ を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の元とし, 形式的ベキ級数 $\sum_{k\in\Gamma} f_k z^k$, $f_k \in U$ 全体のなす空間を $U[[z^\Gamma]]$ と書く. また, 形式的ローラン級数 $z^d \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $d \in \Gamma$, $f_k \in U$ 全体のなす空間を $U[[z]]z^\Gamma$ と書く. $\Gamma = \mathbb{Z}$ のときは, $U[[z^\mathbb{Z}]] = U[[z, z^{-1}]]$, $U[[z]]z^\mathbb{Z} = U((z))$ とも書く.

Q をアーベル群とし, 関数 $\eta : Q\times Q \to \mathbb{C}^\times$ を考える. 関数 $\mu_\eta : Q^{\times 3} \to \mathbb{C}$, $\mu_\eta(\alpha,\beta,\gamma) := \eta(\alpha+\beta,\gamma)^{-1}\eta(\alpha,\gamma)\eta(\beta,\gamma)$ を考える. 関数 η は次の条件を満たすとき, 擬乗法的であるという：

- 関数 $\mu_\eta(\alpha,\beta,\gamma)$ は γ に関して乗法的,

- 双線型写像 $\Delta : Q^{\times 2} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ であって, $\eta(\alpha,\beta)\eta(\beta,\alpha) = e^{-2\pi i \Delta(\alpha,\beta)}$ を満たすものが唯一つ存在する,
- $\eta(Q,0) = \eta(0,Q) = 1$.

ベクトル空間 V, 非零元 $|0\rangle \in V$（真空元）, 線型写像 $\partial : V \to V$, 線型写像

$$Y : V \to \mathrm{End}(V)[[z^{\mathbb{C}}]], \quad a \mapsto Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} a(n) z^{-n-1}$$

（頂点作用素）を考える. 四組 $(V, Y, |0\rangle, \partial)$ は次の公理を満たすとき, 擬 GVA という：

1. （真空公理）$Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V$, $Y(a,z)|0\rangle \in V[[z]]$, $a = \mathrm{Res}_{z=0} Y(a,z)|0\rangle$, $\partial|0\rangle = 0$;
2. $[\partial, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z)$;
3. アーベル群 Q, 擬乗法的関数 $\eta : Q \times Q \to \mathbb{C}^\times$（局所性の補正項）, ベクトル空間 V 上の Q-次数付け $V = \bigoplus_{\alpha\in Q} V^\alpha$ が存在して, 任意の $\alpha, \beta \in Q$, $a \in V^\alpha$, $b \in V^\beta$ に関して,
   (a) （場）$Y(a,z)b \in V^{\alpha+\beta}[[z]]z^{-\Delta(\alpha,\beta)}$;
   (b) （局所性）数 $N \in \Delta(\alpha,\beta)$ が存在して,
   $$\iota_{z,w}(z-w)^N Y(a,z)Y(b,w) = \eta(\alpha,\beta)\iota_{w,z}(z-w)^N Y(b,w)Y(a,z)$$
   を満たす;
   (c) $|0\rangle \in V^0$, $\partial(V^\alpha) \subset V^\alpha$

   が成り立つ. ここで, $\Delta : Q \times Q \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ は $e^{-2\pi i \Delta(\alpha,\beta)} = \eta(\alpha,\beta)\eta(\beta,\alpha)$ を満たす双線型写像である.

擬 GVA は $V = (V, Y, |0\rangle, \partial)$ と表す. 擬 GVA V と, 公理 3 を満たす Q, η, Q-次数付け $V = \bigoplus_{\alpha\in Q} V^\alpha$ との四組を, Q-チャージされた擬 GVA と呼び, (V, Q, η) と表す. $\alpha \in Q$, $v \in V^\alpha$ に対して, α を v のチャージと呼ぶ.

(V, Q, η) を Q-チャージされた擬 GVA とする. η が双乗法的関数のとき, V は [DL],[BK] による一般化された頂点代数（GVA）である. また, $\eta \equiv 1$ のとき, V は頂点代数であり, $Q = \mathbb{Z}_2$, $\eta(\alpha,\beta) = (-1)^{\alpha+\beta}$ のときは, $V = V^0 \oplus V^1$ は頂点超代数である. 部分擬 GVA $V^0 \subset V$ は頂点代数である. なお, 擬 GVA は, [DL] によるアーベリアン交絡代数の部分クラスである.

Q をアーベル群, $\varepsilon : Q \times Q \to \mathbb{C}^\times$ を関数とし, 次の式で定まるアーベル群のコホモロジー [EM] のコバウンダリー (f, ω) を考える：

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \varepsilon(\alpha,\beta+\gamma)\varepsilon(\beta,\gamma)\varepsilon(\alpha+\beta,\gamma)^{-1}\varepsilon(\alpha,\beta)^{-1}, \quad \alpha,\beta,\gamma \in Q,$$

$$\omega(\alpha,\beta) = \varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\beta,\alpha)^{-1}, \quad \alpha,\beta \in Q.$$

関数 ε は次の条件を満たすとき, 擬 2-コサイクルという：

1. $\varepsilon(0,Q)=\varepsilon(Q,0)=1$;

2. $f(\alpha,\beta,\gamma)=f(\beta,\alpha,\gamma)\quad(\alpha,\beta,\gamma\in Q)$.

通常の群コホモロジーの意味での 2-コサイクル ε は, $f\equiv 1$ を満たすので, 擬 2-コサイクルである.

$((V,Y,|0\rangle,\partial),Q,\eta)$ を Q-チャージされた擬 GVA とし, $\varepsilon: Q\times Q\to\mathbb{C}^\times$ を擬 2-コサイクルとする. 線型写像 $Y^\varepsilon: V\times V\to \mathrm{End}(V)[[z^{\mathbb{C}}]]$ を, 対応

$$Y^\varepsilon(v,z)w=\varepsilon(\alpha,\beta)Y(v,z)w,\quad v\in V^\alpha, w\in V^\beta, (\alpha,\beta\in Q)$$

を線型に拡張し定める. 関数 $\eta^\varepsilon: Q\times Q\to\mathbb{C}^\times$ を,

$$\eta^\varepsilon(\alpha,\beta)=\omega(\alpha,\beta)\cdot\eta(\alpha,\beta)\quad \alpha,\beta\in Q$$

と定める. このとき, $((V,Y^\varepsilon,|0\rangle,\partial),Q,\eta^\varepsilon)$ は Q-チャージされた擬 GVA である. これを, ε-補正された擬 GVA と呼び, V^ε と表す.

2 格子擬 GVA

L を整格子とは限らない格子とし, $(\cdot,\cdot): L\times L\to\mathbb{C}$ をその $\mathbb{Z}$-双線型形式とする. 可換リー環 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$ を考え, アフィンリー環 $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{K}$ とその部分リー環 $\hat{\mathfrak{h}}_+=\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{K}\subset\hat{\mathfrak{h}}$ を考える. 元 $h\otimes t^n\in\hat{\mathfrak{h}}$ $(h\in\mathfrak{h}, n\in\mathbb{Z})$ を $h(n)$ と書く. $\hat{\mathfrak{h}}_+$ 上の一次元表現 $\mathbb{C}_1=\mathbb{C}v$, $h(n)v=0$ $(h\in\mathfrak{h}, n\geq 0)$, $Kv=v$ を考え, 誘導加群 $M(1)=U(\hat{\mathfrak{h}})\otimes_{U(\hat{\mathfrak{h}}_+)}\mathbb{C}_1$ を考える. $M(1)$ 上に, 真空元 $\mathbf{1}=1\otimes v$, 頂点作用素 $X(h(-1)\mathbf{1},z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)z^{-n-1}$ を持つ頂点代数の構造が定まる（ハイゼンベルグ頂点代数）. 群環 $\mathbb{C}[L]=\bigoplus_{\alpha\in Q}\mathbb{C}e^\alpha$, $e^\alpha\cdot e^\beta=e^{\alpha+\beta}$ を考える. テンソル積 $V_L=M(1)\otimes\mathbb{C}[L]$ には, 真空元 $|0\rangle=\mathbf{1}\otimes e^0$, 頂点作用素

$$X(e^\alpha,z)=\exp\left(\sum_{n<0}\frac{1}{-n}\alpha(n)z^{-n}\right)\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1}{-n}\alpha(n)z^{-n}\right)\otimes e^\alpha z^\alpha,$$

局所性の補正項 $\eta_0(\alpha,\beta)=e^{\pi i(\alpha,\beta)}$ を持つ L-チャージされた GVA の構造が定まる. これを L に付随する格子 GVA と呼ぶ. 擬 2-コサイクル $\varepsilon: L\times L\to\mathbb{C}^\times$ に対して, ε-補正された擬 GVA V_L^ε を格子擬 GVA と呼ぶ.

L が整格子のとき, 2-コサイクル $\varepsilon: L\times L\to\{\pm1\}$ であって $\varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\beta,\alpha)^{-1}=(-1)^{(\alpha,\beta)}$ を満たすものを考えると, V_L^ε は頂点超代数となる. これを L に付随する格子頂点超代数と呼び, V_L と表す. 特に L が偶格子のときには, V_L は頂点代数となり, 格子頂点代数と呼ばれる. 格子頂点（超）代数は共形構造を持ち, 格子頂点作用素（超）代数とも呼ばれる.

L を格子とし, $(\cdot,\cdot): L\times L\to\mathbb{C}$ をその $\mathbb{Z}$-双線型形式とする. L 上の擬 2-コサイクル ε を考え, 格子擬 GVA $V_L:=V_L^\varepsilon$ を考える. 元 $v=h_1(n_1)\cdots h_m(n_m)e^\alpha$ $(m\geq 0$, $h_1,\ldots,h_m\in\mathfrak{h}$, $n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in L)$ を考える. v のウェイトを,

$$\mathrm{wt}(v)=-n_1-\cdots-n_m+\frac{(\alpha,\alpha)}{2}\in\mathbb{C}$$

と定める．これによって，V_L は $\mathbb{C}$-次数付け $V_L=\bigoplus_{n\in\mathbb{C}}(V_L)_n$（ウェイト次数付け）を持つ．チャージ次数とウェイト次数はコンパチブルであるため，V_L は双次数付け $V_L=\bigoplus_{\alpha\in L,n\in\mathbb{C}}(V_L)_n^\alpha$ を持つ（チャージ・ウェイト次数付け）．

l を正整数とし，L がランク l であると仮定する．B を L の $\mathbb{Z}$-基底とし，B 上の全順序 $\leq$ を考え，$B=\{\beta_1<\cdots<\beta_l\}$ と書く．格子擬 GVA V_L のチャージ・ウェイト次数付ベクトル部分空間 $U\subset V_L$ の指標を，

$$\chi_U(x_1,\ldots,x_l;q):=\sum_{k_1,\ldots,k_l\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{C}}U_n^{k_1\beta_1+\cdots k_l\beta_l}x_1^{k_1}\cdots x_l^{k_l}q^n$$

と定める．ここで，$x_1,\ldots,x_l,q$ は不定元である．

3 一般化された主部分空間

L を格子とし，$(\cdot,\cdot):L\times L\to\mathbb{C}$ をその $\mathbb{Z}$-双線型形式とする．L 上の擬 2-コサイクル ε を考え，格子擬 GVA $V_L:=V_L^\varepsilon$ を考える．B を L の $\mathbb{Z}$-基底とする．

定義 3.1. 格子擬 GVA V_L の一般化された主部分空間（GPS）とは，部分擬 GVA

$$W_L(B)=\langle e^\beta|\beta\in B\rangle_{\text{quasi-GVA}}\subset V_L$$

である．

ここで，部分集合 $A\subset V_L$ に対して，$\langle A\rangle_{\text{quasi-GVA}}$ は，A を部分集合として持つ最小の部分擬 GVA を表す．L が整格子のとき，格子頂点超代数 V_L の GPS $W_L(B)$ は [MP] の主部分空間と一致する．なお，特に，L がルート格子であって，B としてルート系の基を取った場合には，主部分空間 $W_L(B)$ は [SF] の主部分空間である．

L' を L を含む $\mathfrak{h}$ のアーベル部分群，$\varepsilon:L'\times L'\to\mathbb{C}^\times$ を ε を拡張した擬 2-コサイクルとし，格子擬 GVA $V_{L'}:=V_{L'}^\varepsilon$ を考える．$\lambda\in L'$ に対して，巡回 $W_L(B)$-加群

$$W_L(B;\lambda)=W_L(B)\cdot e^\lambda\subset V_{L'}$$

も一般化された主部分空間（GPS）と呼ぶ．$\lambda=0$ のときは，$W_L(B)$-加群として $W_L(B;0)=W_L(B)$ である．L が整格子，L' が双対格子 L° であって，$V_{L^\circ}^\varepsilon$ が格子頂点超代数 V_L 上の加群となるような $\varepsilon:L^\circ\times L^\circ\to\mathbb{C}^\times$ を取ったときには，$W_L(B;\lambda)$ は [MP] の主部分空間と一致する．

B 上の全順序 $\leq$ を考える．k を非負整数，$\beta_1\leq\cdots\leq\beta_k$ を B の元とする．次の元全体のなす部分集合 $\mathcal{C}(\lambda;\beta_1,\ldots,\beta_k)\subset W_L(B)^{\lambda+\beta_1+\cdots+\beta_k}$ を考える：

$$\prod_{i=1}^k\left(e^{\beta_i}(m_i-\textstyle\sum_{j=1}^{i-1}(\beta_i,\beta_j)-(\beta_i,\lambda))\right)e^\lambda$$

$(m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{Z}_{<0}$ は非負整数であって，$i<j$ かつ $\beta_i=\beta_j$ ならば $m_i\geq m_j$ を満たすもの）．ここで，$v_1,\ldots,v_k\in W_L(B)$，$m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{C}$ に対し，$\prod_{i=1}^k v_i(m_i)|0\rangle$ は，元 $v_k(m_k)\cdots v_1(m_1)|0\rangle\in W_L(B)$ を表す．

定理 3.1. [K2] $\mathcal{C}(\lambda;\beta_1,\ldots,\beta_k)$ は $W_L(B;\lambda)^{\lambda+\beta_1+\cdots+\beta_k}$ の $\mathbb{C}$-基底である.

$\mathcal{C}(\lambda)=\bigcup_{k\geq 0,\beta_1\leq\cdots\leq\beta_k\in B}\mathcal{C}(\lambda;\beta_1,\ldots,\beta_k)$ とおく.

系 3.1. $\mathcal{C}(\lambda)$ は $W_L(B;\lambda)$ の $\mathbb{C}$-基底である.

定理 3.1 より, 次のフェルミオニックな指標公式を得る.

l を正整数とし, L がランク l だと仮定する. B 上の全順序 $\leq$ を考え, $B=\{\beta_1<\cdots<\beta_l\}$ と書く. L の双線型形式のグラム行列を $A=((\beta_i,\beta_j))_{i,j}\in\mathrm{Mat}(l;\mathbb{C})$ とおく. λ は $\mathfrak{h}$ に属するので, $\lambda=j_1\beta_1+\cdots+j_l\beta_l$ $(j_1,\ldots,j_l\in\mathbb{C})$ と書ける. $\boldsymbol{j}=(j_1,\ldots,j_l)$ とおく.

定理 3.2. [K2] 一般化された主部分空間 $W_L(B;\lambda)$ の指標 $\chi_{W_L(B;\lambda)}$ に対して, 次の公式が成り立つ:

$$\chi_{W_L(B;\lambda)}(x_1,\ldots,x_l;q)=\sum_{i_1,\ldots,i_l\geq 0}\frac{q^{\frac{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot A\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})^T}{2}}}{(q)_{i_1}\cdots(q)_{i_l}}x_1^{i_1}\cdots x_l^{i_l}.$$

ただし $\boldsymbol{i}=(i_1,\ldots,i_l)$ である.

Proof. 定理 3.1 と等式

$$\mathrm{wt}(e^{\alpha+\lambda})=\frac{(\alpha+\lambda,\alpha+\lambda)}{2}=\frac{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot A\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})^T}{2},\quad(\alpha=i_1\beta_1+\cdots+i_l\beta_l)$$

より従う. □

ここで, $k\geq 0$ に対して, $(q)_k=(q;q)_k=(1-q)\cdots(1-q^k)$ であり, $(a;q)_k=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1})$ は q-Pochhammer 記号である. $1/(q)_k$ は, 自然数の高々 k 個の分割の個数の母関数と一致するので, この公式は, ある種の分割の個数の母関数の足し上げのみによって記述されている. このように, (無限和) − (無限和) という差ではなく, 足し上げのみによって記述されている指標公式を, フェルミオニックな指標公式という. フェルミオニックな指標公式は, 組合せ論的な指標公式とも言われる. 上記の結果は, [MP] の結果の一般化である.

4 A_1° に付随する一般化された主部分空間

A_1 型のルート格子とウェイト格子 $A_1=\mathbb{Z}\theta$, $A_1^\circ=\mathbb{Z}\theta/2$, $(\theta,\theta)=2$ を考える. 次の式で定まる擬 2-コサイクル $\varepsilon:A_1^\circ\times A_1^\circ\to\mathbb{C}^\times$ を考える:

$$\varepsilon(k\theta/2,l\theta/2)=\begin{cases}-1 & (k,l)\equiv(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\pmod 4,\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

格子擬 GVA $V_{A_1^\circ}:=V_{A_1^\circ}^\varepsilon$ を考える. このとき, 部分擬 GVA $(V_{A_1^\circ})^{A_1}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(V_{A_1^\circ})^{k\theta}\subset V_{A_1^\circ}$ は格子頂点代数 V_{A_1} と同型であり, 擬 GVA としての部分 V_{A_1}-加群 $(V_{A_1^\circ})^{A_1+\theta/2}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(V_{A_1^\circ})^{(k+1/2)\theta}\subset V_{A_1^\circ}$ は, 頂点代数としての V_{A_1}-加群 $V_{A_1+\theta/2}$ と同型である. よって, V_{A_1}-加群として, 同型 $V_{A_1^\circ}\cong V_{A_1}\oplus V_{A_1+\theta/2}$ が成り立つ.

基底 $B = \{\theta/2\}$ と元 $\lambda = \theta/2 \in A_1^\circ$ を考え, 一般化された主部分空間 $W = W_{A_1^\circ}(B)$, $M = W_{A_1^\circ}(B;\theta/2)$ を考える. $W^{(0)} = W \cap V_{A_1}$, $W^{(1)} = W \cap V_{A_1+\theta/2}$, $M^{(0)} = M \cap V_{A_1}$, $M^{(1)} = M \cap V_{A_1+\theta/2}$ とおくと, $W^{(0)}$ は W の極大頂点部分代数であり, $W^{(0)}, W^{(1)}, M^{(0)}, M^{(1)}$ は 頂点代数 $W^{(0)}$ 上の加群である. なお, $W^{(0)}$ は V_{A_1} の主部分空間 $W_{A_1}(\{\theta\})$ を含むが, それと一致はしない.

補題 4.1. $W^{(0)}, W^{(1)}, M^{(0)}, M^{(1)}$ の指標は, ヴィラソロ極小模型 $L(-3/5,0)$ 上の既約表現の指標と一致する:

$$
\begin{aligned}
\chi(W^{(0)};1,q)q^{-c/24} &= Z(L(-3/5,-1/20),\tau),\\
\chi(W^{(1)};1,q)q^{-c/24} &= Z(L(-3/5,1/5),\tau),\\
\chi(M^{(0)};1,q)q^{-c/24+h-1/4} &= Z(L(-3/5,3/4),\tau),\\
\chi(M^{(1)};1,q)q^{-c/24+h-1/4} &= Z(L(-3/5,0),\tau).
\end{aligned}
$$

ここで, τ は複素上半平面の点であり, $q = e^{2\pi i\tau}$, $c = 3/5$, $h = 1/20$ である.

Proof. 定理 3.2 とフェルミオニック和公式 [KKMM] より, 補題が成り立つ. □

$L(-3/5,0)$ 上の既約表現の指標は Zhu 理論よりモジュラー不変性を持つので, $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, $M^{(0)}$, $M^{(1)}$ の指標のモジュラー不変性が得られたことになる.

5 中間頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$

本節では, モジュラー不変性を持つ頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ とその部分 VOA V_{E_7} の間の分岐則を, 前節の $W^{(0)}$ を用いて記述する.

E_8 型のルート格子 E_8 を考え, その $\mathbb{Z}$-双線型形式を $(\cdot,\cdot)$ と表す. 図 1 のように, E_8 の単純ルート $\alpha_1,\ldots,\alpha_8$ を考え, 最高ルートを θ とおく.

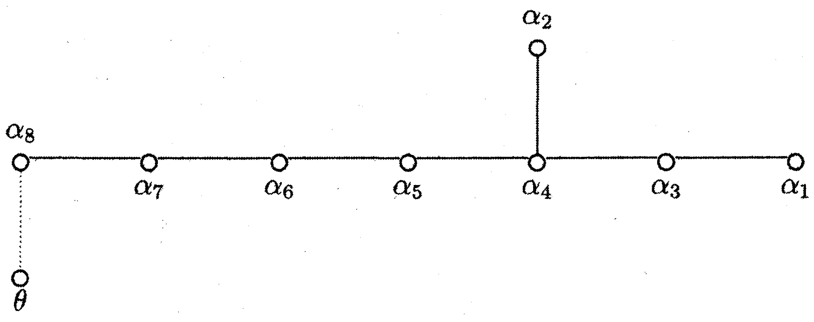

図 1: E_8 のディンキン図

VOA V_{E_7} を含む頂点代数

$$V_{E_{7+1/2}} = \langle e^{\alpha_8}, e^{\pm\alpha_1}, \dots, e^{\pm\alpha_7}, \alpha_1, \dots, \alpha_7\rangle_{\mathrm{VA}} \subset V_{E_8}$$

（中間頂点代数 [K1]）と巡回 $V_{E_{7+1/2}}$-加群

$$V_{E_{7+1/2}+\alpha_8} = V_{E_{7+1/2}} \cdot e^{\alpha_8}$$

を考える. $c = 7 + 3/5$, $h = 4/5$ とおき, $V_{E_{7+1/2}}$ と $V_{E_{7+1/2}+\alpha_8}$ の正規化された指標を,

$$Z(V_{E_{7+1/2}+t\alpha_8}) = q^{th-c/24}\sum_{n=0}^{\infty}(V_{E_{7+1/2}+t\alpha_8})_{n+t}q^n, \quad (t = 0, 1),$$

と定める. すると, これは VOA V_{E_7} と $L(-3/5, 0)$ の表現の指標の多項式の形で表され, モジュラー不変性を持つことが分かる [K1].

E_7 型, A_1 型の部分格子 $E_7 = \langle\alpha_1, \dots, \alpha_7\rangle \subset E_8$ と $A_1 = \langle\theta\rangle \subset E_8$ を考える. E_7 の双対格子 E_7° を考え, 基本ウェイトを $\varpi_1, \dots, \varpi_7$ とおく. また, A_1 の双対格子 A_1° を考え, 基本ウェイト $\theta/2$ を考える. 格子頂点代数 V_{E_7} と V_{A_1} を考え, その単純カレント拡大擬 GVA $V_{E_7^\circ} = V_{E_7} \oplus V_{E_7+\varpi_7}$, $V_{A_1^\circ} = V_{A_1} \oplus V_{A_1+\theta/2}$ を考える [DL]. $V_{A_1^\circ}$ は前節の $V_{A_1^\circ}$ と同一視する. テンソル積擬 GVA $V_{E_7^\circ} \otimes V_{A_1^\circ}$ の部分擬 GVA $V_{E_7} \otimes V_{A_1} \oplus V_{E_7+\varpi_7} \otimes V_{A_1+\theta/2}$ は頂点代数であり, V_{E_8} と同型である. 同型

$$\phi : V_{E_8} \cong V_{E_7} \otimes V_{A_1} \oplus V_{E_7+\varpi_7} \otimes V_{A_1+\theta/2}$$

を固定する. 前節の頂点代数 $W^{(0)} \subset V_{A_1}$ とその表現 $W^{(0)}, W^{(1)}, M^{(0)}, M^{(1)} \subset V_{A_1^\circ}$ を考える. 補題 4.1 と [K1] の結果より, 次の定理が得られる.

定理 5.1. 同型 ϕ は, $V_{E_7} \otimes W^{(0)}$-加群としての同型

$$V_{E_{7+1/2}} \cong V_{E_7} \otimes W^{(0)} \oplus V_{E_7+\omega_7} \otimes W^{(1)}, \tag{1}$$

$$V_{E_{7+1/2}+\alpha_8} \cong V_{E_7} \otimes M^{(0)} \oplus V_{E_7+\omega_7} \otimes M^{(1)} \tag{2}$$

を引き起こす.

こうして, 共形構造を持たない頂点代数 $V_{E_{7+1/2}}$ と, その部分 VOA $V_{E_7} \subset V_{E_{7+1/2}}$ の組の分岐則を, GPS W の極大頂点部分代数 $W^{(0)}$ とその上の表現を用いて表したことになる.

参考文献

[BK] B. Bakalov, and V. G. Kac, *Generalized vertex algebras*, Proceedings of the 6-th International Workshop "Lie Theory and Its Applications in Physics", Varna, Bulgaria (2006), 3–25.

[DL] C. Dong, and J. Lepowsky, *Generalized vertex algebras and relative vertex operators*, Springer, 1993.

[EM] S. Eilenberg, and S. Mac Lane, *On the groups $H(\Pi, n)$, II: Methods of computation,* Annals of Mathematics (1954), 49–139.

[K1] K. Kawasetsu, *The intermediate vertex subalgebras of the lattice vertex operator algebras,* Lett. Math. Phys. **104.2** (2014), 157–178.

[K2] K. Kawasetsu, *The free generalized vertex algebras and generalized principal subspaces,* J. Alg. **444, 15** (2015), 20–51.

[KKMM] R. Kedem, T. R. Klassen, B. M. McCoy, E. Melzer, *Fermionic sum representations for conformal field theory characters*, Phys. Lett. B vol. **307** issue 1-2 (1993), 68-76.

[MP] A. Milas, M. Penn, *Lattice vertex algebras and combinatorial bases: general case and $\mathcal{W}$-algebras,* New York J. Math. **18** (2012), 621–650.

[SF] A. V. Stoyanovskii, B. L. Feigin, *Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells,* Funct. Anal. Appl. **28**, no. 1 (1994), 55–72.

[Z] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras,* J. AMS (1996), 237–302.