数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 162-167

REMARKS ON THE LENGTHS OF MAXIMAL GREEN SEQUENCES FOR TYPE $\widetilde{A}_{n,1}$-QUIVERS

加瀬遼一 (奈良女子大学理学部)
RYOICHI KASE (FACULTY OF SCIENCE, NARA WOMEN'S UNUVERSITY)

1. Introduction

有限次元多元環における傾理論とは傾加群と呼ばれる加群に関する理論である. 傾加群は道多元環上の鏡映関手を与える加群の一般化として Brenner-Butler の共著論文 [3] で導入された加群である. 彼らは傾加群の自己準同型環の加群圏と元の多元環の加群圏の間にある関係を見つけだした. Happel によってこの関係は加群圏の導来圏の同値に拡張され [5], 現在では与えられた有限次元多元環に対して、その傾加群の分類は重要な問題の一つとして位置づけられている. この分類問題に対する一つのアプローチが Riedtmann-Schofield によって導入された傾変異理論である [11]. 傾変異とは与えられた傾加群から直既約因子を一つ取り替えて新しい傾加群を作る操作であり, 現在では様々なアプローチによってこの傾変異の理論の研究がなされている. 他方, Happel-Unger は basic な傾加群全体の上にある半順序を定め, その Hasse-quiver をとることにより傾変異の情報が完全に復元されることを示した [6],[7]. 傾変異を考える上で問題となるのが任意の直既約因子に関して常に傾変異が出来るとは限らないことである. 足立-伊山-Reiten は台 τ-傾加群なる傾加群を含む加群のクラスを導入しその上の変異理論を展開することで上記問題を解決した. また道多元環の場合には台 τ-傾加群は Ingalls- Thomas が導入した台傾加群と一致する.

この台傾加群の変異は B.Keller によって導入された quiver の green 変異と呼ばれる概念と密接な関係があることが知られている. 実際に非輪状な quiver Q に関する green 変異のなす quiver と Q の道多元環における台傾加群の変異のなす quiver が一致する. T. Brüstle, G. Dupont and M. Pérotin は green 変異の極大列の長さに関して次の予想を立てた.

Conjecture 1 ([4]). *green 変異の極大列の長さとして取れ得る値は整数上の区間となる.*

本稿では A_n 型及び $\widetilde{A}_{n,1}$ 型の quiver に関してこの予想が成り立つことを報告する.

2. Green 変異, 極大 green 変異列

この節では green 変異及び 極大 green 変異列を導入する. 定義や用語等は [4] を参照している.

Definition 2.1. Q を有限連結なクイバーとする.
(1) Q が **cluster quiver** であるとは, Q が loop 及び 2-cycle を持たないときをいう.
(2) Q を cluster quiver, $F \subset Q_0$ とする. F の任意の 2 点間に辺が存在しないとき (Q, F) を **ice quiver** と呼び, F の点を **frozen vertex** と呼ぶ.

ice quiver (Q, F) の変異は次で定義される.

Definition 2.2. (Q, F) を ice quiver, $k \in Q_0 \setminus F$ とする. このとき ice quiver $\mu_k(Q, F) = (\mu_k Q, F)$ を以下の手順で定める.

1) 矢の組 $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ 毎に新しい矢 $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} j$ を付け加える.
2) k を端点に持つ矢の向きを全て逆にする.
3) 2-cycle を可能な限り取り除く, また F の 2 点間に辺が出来たらそれも取り除く.

このとき, $\mu_k(Q,F)$ を (Q,F) の k に関する **変異** と呼ぶ.

Definition 2.3. (Q,F), (Q',F) を $Q_0 = Q'_0$ を満たす ice quiver とする.

(1) (Q,F) と (Q',F) が **変異同値** であるとは non-frozen vetex の有限列 $(k_1,\dots,k_l)$ が存在して $(Q',F) = (\mu_{k_l}\cdots\mu_{k_1}(Q,F))$ が成り立つときをいう. また $\mathrm{Mut}(Q,F)$ で (Q,F) の変異同値類を表す.
(2) (Q,F) と (Q',F) が ice quiver として同型であるとは, ある quiver としての同型射 $\varphi: Q \to Q'$ で frozen vertex を固定するものが存在するときをいう.

green 変異を定義するために framed quiver 及び green vertex を導入しておく.

Definition 2.4. Q を cluster quiver, $Q'_0 = \{c(i) \mid i \in Q_0\}$ を Q_0 のコピーとする. このとき Q に関する **framed quiver** $\widehat{Q}$ を以下で定める.

- $\widehat{Q}_0 := Q_0 \sqcup Q'_0$.
- $\widehat{Q}_1 := Q_1 \sqcup \{i \to c(i) \mid i \in Q_0\}$.

このとき, $(\widehat{Q}, Q'_0)$ は ice quiver であり, $\mathrm{Mut}(\widehat{Q}) := \mathrm{Mut}(\widehat{Q}, Q'_0)$ とおく.

Definition & Theorem 2.5 ([4],[10]). $R \in \mathrm{Mut}(\widehat{Q})$, i を non-frozen vertex とする.

(1) i が **green vertex** であるとは i から frozen vertex への矢が存在するときをいう.
(2) i が **red vertex** であるとは frozen vertex から i への矢が存在するときをいう.

このとき

$$R_0 \setminus Q'_0 = \{\text{green vertex}\} \sqcup \{\text{red vertex}\}$$

が成り立つ.

Definition 2.6. Q を cluster quiver とする.

(1) $R \in \mathrm{Mut}(\widehat{Q})$ の green vertex に関する変異を R の **green 変異** と呼ぶ.
(2) Q の **green 変異列** とは Q_0 の列 $\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_l)$ であって各 k に対して i_k が $\mu_{i_{k-1}}\cdots\mu_{i_1}\widehat{Q}$ の green vertex になるものをいう. 特に $\mu_{i_l}\cdots\mu_{i_1}\widehat{Q}$ に green vertex が存在しないとき, $\mathbf{i}$ を **極大 green 変異列** と呼びその長さを $l(\mathbf{i}) := l$ で表す.

以降 $\mathbf{grren}(Q)$ で Q の極大 green 変異列のなす集合を表し, $l \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbf{grren}_l(Q) := \{\mathbf{i} \in \mathbf{green}(Q) \mid l(\mathbf{i}) = l\}$ とおく.

最後に oriented exchange graph を定義してこの節を終える.

Definition 2.7. Q の **oriented exchange graph** $\overrightarrow{E}(Q)$ とは以下で定まる quiver である.

- $\overrightarrow{E}(Q)_0 := \mathrm{Mut}(\widehat{Q})/\simeq$.
- $[R'] = [\mu_k R]$ となるような R の green vertex k が存在するとき $[R]$ から $[R']$ へ矢を描く.

Example 2.8. Let $Q = 1 \to 2$ and $Q'_0 = \{c(1) = 3, c(2) = 4\}$. このとき oriented exchange graph は Figure 1 で与えられる.

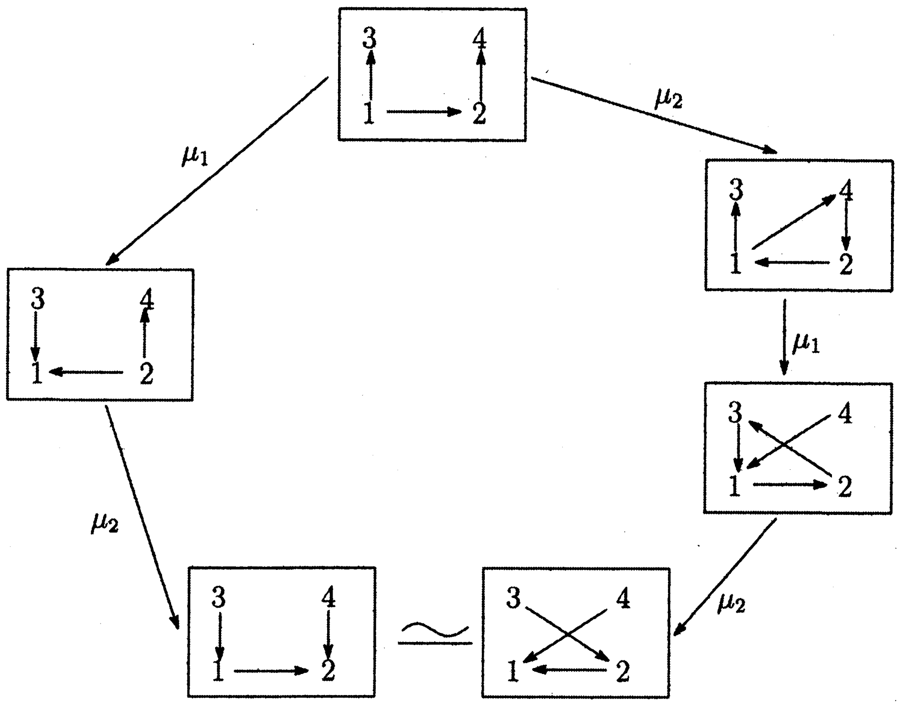

FIGURE 1. An oriented exchange graph of type A_2

3. 台傾加群

以下 k を代数閉体, Q を有限非輪状 quiver とし道多元環 $\Lambda := kQ$ を考える. つまり Λ は以下の基底及び積で定義される有限次元多元環である.

- 基底は Q 上の path 全体. 但し頂点を長さ 0 の path と思う.
- w, w' を path とする. もし w の終点と w' の始点が一致していれば ww' を w の終点と w' の始点をくっつけた新しい path と定め, そうでなければ0 とする.

本稿では $\mathrm{mod}\,\Lambda$ で有限次元右 Λ 加群のなす圏を表すことにする. 注意として $\mathrm{mod}\,\Lambda$ は Krull-Schmidt となる, つまり任意の加群 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対して順番と同型を除いて一意的な直既約分解

$$M \simeq M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$$

が成り立つ. このとき, $|M| := m$ とおき $M_1, \ldots, M_m$ が互いに非同型なとき M を 基本的と呼ぶ.

Definition 3.1. $T \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ とする.

(1) $T \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ が傾加群であるとは以下の条件が成り立つときをいう.
  (i) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) = 0$.
  (ii) $|T| = |\Lambda|$.

(2) T が台傾加群であるとは, ある冪等元 $e \in \Lambda$ が存在して T が $\Lambda/(e)$ 加群として傾加群となるときをいう.

定義より傾加群は台傾加群である. 以下 s-tilt Λ で基本的な台傾加群の同型類全体を表す. s-tilt Λ には半順序集合としての構造が入ることが知られている.

Definition-Theorem 3.2 ([1],[6],[8]). $T \geq T' \Leftrightarrow \mathrm{Fac}\,T \supset \mathrm{Fac}\,T'$ と定めると $\geq$ は s-tilt Λ 上の半順序を誘導する.

Example 3.3. $Q = 1 \to 2$ とする. $P(i) = e_i\Lambda$, $S(i)$ で i に対応する単純加群を表すことにすれば $P(2) = S(2)$ であり, $\mathsf{s\text{-}tilt}(\Lambda)$ は Figure 2 で与えられる.

$$\begin{tikzcd}
& P(1) \oplus S(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S(2) \arrow[ddr] & & P(1) \oplus S(1) \arrow[d] \\
& & S(1) \arrow[dl] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2. The Hasse quiver of the poset of support tilting modules over a path algebra of type A_2

Example 2.8 と Example 3.3 を比べると 2 つの quiver が一致していることが分かる. 実際に以下の定理が知られている.

Theorem 3.4 ([4],[10]). Q を有限非輪状な *quiver* とし, $\Lambda = kQ$ とおく. このとき

$$\overrightarrow{E}(Q) \simeq \overrightarrow{\mathsf{s\text{-}tilt}}\Lambda$$

が成り立つ. ここで $\overrightarrow{\mathsf{s\text{-}tilt}}\Lambda$ は $\mathsf{s\text{-}tilt}(\Lambda)$ の *Hasse quiver* である.

4. 主結果

主結果は以下の通りである.

Theorem 4.1. [K]

(1) Q を A_n 型 *quiver* とする. このとき,

$$\{l \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{green}_l(Q) \neq \emptyset\} = [n, \frac{n(n+1)}{2}]$$

が成り立つ.

(2) Q を $\widetilde{A}_{n,1}$ 型 *quiver* とする. このとき,

$$\{l \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{green}_l(Q) \neq \emptyset\} = [n+1, \frac{n(n+3)}{2}]$$

が成り立つ.

5. 証明の概略

以下では主結果の証明の概略を述べる. まずは G. Jasso による以下の定理を準備しておく.

Theorem 5.1 ([9]). $\mathrm{Ext}_\Lambda(U, U) = 0$ を満たす基本的な Λ-加群 U に対し, $\mathsf{s\text{-}tilt}_U(\Lambda) := \{T \in \mathsf{s\text{-}tilt}(\Lambda) \mid U \in \mathsf{add}\, T\}$ とおき, T_U を U の *Bongartz* 補因子 ($\Leftrightarrow$ $\mathsf{s\text{-}tilt}_U(\Lambda)$ の最大元, 存在については [1] 参照) とする. このとき $\Gamma_U := \mathrm{End}_\Lambda(T_U)/\langle e_U \rangle$ は ある有限次元道多元環と同型であり $|\Gamma| = |\Lambda| - |U|$ 及び $\mathsf{s\tau\text{-}tilt}_U(\Lambda) \simeq \mathsf{s\tau\text{-}tilt}(\Gamma_U)$ が成り立つ. ここで e_U は射影 $\mathrm{End}_\Lambda(T_U)$-加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(T_U, U)$ に対応する冪等元である.

5.1. A_n 型 **の場合.** A_n 型の道多元環の直既約加群は次の Gabriel の定理により分類されている.

Theorem 5.2. [Gabriel] Q を *Dynkin* 型の *quiver* とする. このとき

$$\underline{\dim} : M \mapsto (\dim Me_i)_{i\in Q_0}$$

により $\operatorname{ind}\Lambda$ と付随する *Dynkin* 図形の正ルートが一対一に対応する.

Gabriel の定理により以下が従う.

- $\#\operatorname{ind}\Lambda = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 忠実な直既約加群 X が同型を除いて唯一存在する.

特に

$$\{l \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{green}_l(Q) \neq \emptyset\} \subset [n, \frac{n(n+1)}{2}]$$

である. X に Theorem 5.1 を適用すると次の同型が得られる.

$$\mathsf{s\text{-}tilt}_X(\Lambda) \simeq \mathsf{s\text{-}tilt}(k(1 \leftarrow \cdots \leftarrow i-1)) \times \mathsf{s\text{-}tilt}(k(i+1 \rightarrow \cdots \rightarrow n)).$$

今 T_1 を $\mathsf{s\text{-}tilt}_X(\Lambda)$ の最大元, T_2 を最小元とすれば Λ, T_1, T_2, 0 を通る長さ $\frac{n(n+1)}{2}$ の path が $\overrightarrow{\mathsf{s\text{-}tilt}}(\Lambda)$ 上に存在することが確かめられる. ここで $n = \#Q_0$ に関する帰納法を用いることで

$$\{l \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{green}_l(Q) \neq \emptyset\} \supset [n, \frac{n(n+1)}{2}]$$

が示される.

5.2. $\widetilde{A}_{n,1}$ **型の場合.** Q を次の quiver とする. Thorem 5.1 を適用すると

$$\mathsf{s\text{-}tilt}_{e_i\Lambda}(\Lambda) \simeq \mathsf{s\text{-}tilt}(k(Q \setminus \{i\})) \quad (*)$$

が得られる. ここで $Q\setminus\{i\}$ は A_n 型の quiver であることに注意しておく. T_i を $\mathsf{s\text{-}tilt}_{e_i\Lambda}(\Lambda)$ の最小元とすれば Λ が $\mathsf{s\text{-}tilt}_{e_i\Lambda}(\Lambda)$ の最大元であること及び A_n 型の場合の結果から任意の $l' \in [n, \frac{n(n+1)}{2}]$ に対して Λ から T_i への長さ l' の path が存在することが従う. また T_i から 0 への path が唯一存在してその長さは $n-i+1$ であることも確かめられる. 特に任意の $l \in [n+n-i+1, \frac{n(n+1)}{2}+n-i+1]$ に対して, Λ から 0 への 長さ l の path が存在することが従う. i を 1 から n まで動かせば次が得られる.

$$\{l \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{green}_l(Q) \neq \emptyset\} \supset [n, \frac{n(n+3)}{2}].$$

逆の包含関係も直接の計算で示すことができる.

References

[1] T. Adachi, O. Iyama and I. Reiten, τ-tilting theory. *Compos. Math.* **150**, no. 3, 415–452 (2014).

[2] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press (1995).

[3] S. Brenner and M.C.R. Butler, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp.103-169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, Berlin-New York (1980).

[4] T. Brüstle, G. Dupont and M. Pérotin, On maximal green sequences. *Int. Math. Res. Not. IMRN 2014*, no. 16, 4547-4586.

[5] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[6] D. Happel and L. Unger, On a partial order of tilting modules. *Algebr. Represent. Theory* **8**, no. 2, 147–156 (2005).
[7] D. Happel and L. Unger, On the quiver of tilting modules. *J. Algebra* **284**, no. 2, 857–868 (2005).
[8] C. Ingalls and H. Thomas, Noncrossing partitions and representations of quivers. *Compos. Math.* **145**, no. 6, 1533-1562 (2009).
[9] G. Jasso, Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs. *Int. Math. Res. Not. IMRN 2015*, no. 16, 7190-7237.
[10] B. Keller, On cluster theory and quantum dilogarithm identities. arXiv:1102.4148v4, 2011
[11] C. Riedtmanna and A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.* **66**, no. 1, 70–78 (1991).