数理解析研究所講究録
第1993巻 2016年 26-36

Converse theorems on exponential stability for nonautonomous half-linear differential systems

岡山理科大学・理学部 鬼塚 政一
Masakazu Onitsuka
Okayama University of Science
Department of Applied Mathematics

1 序文

2次元非線形系

$$\begin{cases} x' = a_{11}(t)x + a_{12}(t)\phi_{p^*}(y), \\ y' = a_{21}(t)\phi_p(x) + a_{22}(t)y \end{cases} \tag{HS}$$

を考える．ただし，変数係数 $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{21}(t)$ 及び $a_{22}(t)$ は区間 $I = [0, \infty)$ 上で連続関数とする．また，p と p^* は関係式 $(p-1)(p^*-1) = 1$ を満足する正の値とする．さらに，$q = p$ もしくは $q = p^*$ に対して，実数値関数 $\phi_q(z)$ を

$$\phi_q(z) = \begin{cases} |z|^{q-2}z & \text{if } z \neq 0, \\ 0 & \text{if } z = 0, \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

と定義する．このとき，関数 ϕ_{p^*} は関数 ϕ_p の逆関数になることに注意する．加えて，p と p^* の定め方から，p と p^* は共に1よりも大きな値である．さて，関数 ϕ_p の定義より，$\phi_p(0) = 0 = \phi_{p^*}(0)$ であるから，方程式系 (HS) は $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ を解にもつ．本研究では，この解のことを**零解**と呼ぶ．

もし，$a_{11}(t) \equiv 0$ かつ $a_{12}(t) \equiv 1$ であるとき，方程式系 (HS) の従属変数 y を消去することにより，(HS) は2階非線形微分方程式

$$(\phi_p(x'))' - a_{22}(t)\phi_p(x') - a_{21}(t)\phi_p(x) = 0 \tag{H}$$

に同値変換される．関数 ϕ_p の性質から，もし，$x(t)$ が方程式 (H) の解であれば，その定数倍 $cx(t)$ もまた解になる．ところが，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ が方程式 (H) の解であるからと言って，$x_1(t) + x_2(t)$ もまた方程式 (H) の解になるとは限らない．すなわち，線形微分方程式の解空間が有する性質である同次性と加法性の2つの内，方程式 (H) の解空間は前者のみを満足する．この理由から，方程式 (H) は**半分線形微分方程式** (*half-linear differential equation*) と呼ばれる (例えば，[2, 3, 10, 11, 12, 14] を参照せよ)．加えて，本

本研究は日本学術振興会若手研究 (B) 課題番号 23740115 の助成を受けたものである．

研究では，方程式系 (HS) を**半分線形微分方程式系** (*half-linear differential system*) もしくは，単に**半分線形系** (*half-linear system*) と呼ぶ ([3, 10, 11] で扱われる)．関数 ϕ_p の性質から，半分線形系 (HS) は原点でのヤコビアンが定義できない．ところが，初期値に関する解の存在性や一意性及び時間大域的存在性は保証されることが知られている (例えば，[2, 9] を参照せよ)．ただし，本研究では特に，初期値に関する解の一意性を必要とすることなく議論の展開が可能であることに注意しておく．

さて，もし $p=2$ の場合，半分線形系 (HS) は 2 次元線形系

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \tag{LS}$$

になる．ただし，$\mathbf{x}$ は 2 次元ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x, y)$ であり，係数 $A(t)$ は 2×2 行列とする．良く知られている事実として，線形系 (LS) の零解が一様漸近安定 (uniformly asymptotically stable) であることと指数安定 (exponentially stable) であることは同値である ([8, 10, 15, 16] を参照のこと)．これら 2 つの安定性の厳密な定義については，第 2 節で述べるが，これらの定義より，零解が指数安定ならば，それは一様漸近安定であることが直ちに成立することに注意しておく．一方，一般の非線形系においてはこの命題の逆が成立するとは限らない (第 2 節で具体例を挙げる)．本研究の最初の目的は半分線形系 (HS) において，一様漸近安定性と指数安定性の間にどのような関係が成立するかを明らかにすることであった．Onitsuka and Soeda [10, p.3, Theorem 1.1] によって，この疑問に対する答えが得られたので以下に報告する．

定理 1.1. 半分線形系 (HS) の零解が一様漸近安定性であるならば，その零解は指数漸近安定である．

この定理から，線形系 (LS) の様に，半分線形系 (HS) においても零解が一様漸近安定であることと指数安定であることは同値であることが判明する．

ここで，さらなる疑問が生じる．線形系 (LS) においては，局所理論と大域理論の間に同値関係が成立することが知られており，例えば，指数安定性と大域的指数安定性 (厳密な定義は第 3 節で述べる) の同値関係が成立するが，半分線形系 (HS) においてもこの事実が成り立つのか？もちろん，一般の非線形系に対してこの事は成立しない (第 3 節で具体例を挙げる)．ところが，半分線形系 (HS) に対して，以下の定理を得る ([10, p.16, Theorem 4.1] を参照)．定理の説明のため，2 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ と $p > 1$ に対して，ノルム $\|(x, y)\|_p$ を $\sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$ と定義し，時刻 $t = t_0$ で点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通る半分線形系 (HS) の解を $(x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ と書くことにする．

定理 1.2. 半分線形系 (HS) の零解が一様漸近安定性であるならば，ある数 $\lambda > 0$ と $\beta > 0$ が存在し，$t_0 \in I$ かつ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ならば，$t \geq t_0$ に対して

$$\|(x(t; t_0, x_0, y_0), \phi_{p^*}(y(t; t_0, x_0, y_0)))\|_p \leq \beta e^{-\lambda(t-t_0)} \|(x_0, \phi_{p^*}(y_0))\|_p$$

である．ただし，$\beta > 0$ は $\|(x_0, \phi_{p^*}(y_0))\|_p$ の大きさとは無関係に選べることに注意する．

ここで得られる結論は，厳密には大域的指数安定の定義と異なるものであるが，もしも，$p=2$ に限れば，定理 1.2 の結論は大域的指数安定の定義と一致する．このため，定理 1.2 の主張は線形系の理論をそのまま含んでいることに注意する．

さて，これまで半分線形系 (HS) の一様漸近安定性，指数安定性及び大域的指数安定性の関係性について述べたが，これらの安定性には多くの良い事実が知られている．その中でも重要な位置づけとなるのが，ある性質をもった実数値関数の存在を保証できる点である．例えば，n 次元非線形系

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \qquad (NS)$$

を考える．ただし，$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ は $I \times \mathbb{R}^n$ 上で連続関数であり，条件 $\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たすとする．このとき，非線形系 (NS) は零解をもつ．$\alpha > 0$ に対して，集合 S^n_α を $S^n_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < \alpha\}$ と定める．また，関数 $a(r)$ が $r \in I$ について連続かつ単調増加であり，$a(0) = 0$ を満たすとき，a を **CIP 関数**と呼ぶことにする．もしも，$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ に関して局所リプシッツ条件を満たし，非線形系 (NS) の零解が一様漸近安定であるならば，以下の条件を満足する $I \times S^n_\alpha$ 上で定義された連続な実数値関数 $V(t,\mathbf{x})$ が存在する:

(i) $a(\|\mathbf{x}\|) \le V(t,\mathbf{x}) \le b(\|\mathbf{x}\|)$;

(ii) $\dot{V}_{(NS)}(t,\mathbf{x}) \le -c(\|\mathbf{x}\|)$.

ただし，関数 a, b 及び c は CIP 関数であり，関数 $\dot{V}_{(NS)}(t,\mathbf{x})$ を方程式系 (NS) の**解に沿った右側微分**と呼び

$$\dot{V}_{(NS)}(t,\mathbf{x}) = \limsup_{h\to 0+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t+h;t,\mathbf{x})) - V(t,\mathbf{x})}{h}$$

と定義する (解に沿った右側微分については，[1, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 16] を見よ)．上記の主張 (i) と (ii) を満足する連続な実数値関数は一般に**厳密リヤプノフ関数**と呼ばれ，もし，条件 (ii) の代わりに $\dot{V}_{(NS)}(t,\mathbf{x}) \le 0$ を満足するとき，単に**リヤプノフ関数**と呼ばれる．また，上述のような安定性からリヤプノフ関数を保証する定理は**安定性における逆定理** (*converse theorem on stability*) と呼ばれる．多くの安定性に関する文献においては，上記の条件 (i) と (ii) を満足するリヤプノフ関数が構成できた場合に一様漸近安定性を導出する順定理が知られているが，特に，逆定理においては，摂動系の解の性質を考究する際に重要な役割を果たすことが知られている (例えば，[5, 15, 16] を見よ)．

以下に提示する定理は，上述の結果よりも具体的な CIP 関数で評価されるリヤプノフ関数の存在を示す指数安定性における逆定理である ([1, 8, 10] を見よ)．

定理 A. 任意の $\alpha > 0$ に対して，ある $L(\alpha) > 0$ が存在し，任意の $(t,\mathbf{x}), (t,\mathbf{y}) \in I \times S^n_\alpha$ に対して

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \le L(\alpha)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

であると仮定する．ただし，$L(\alpha)$ は $t \in I$ とは無関係に選べる値である．このとき，非線形系 (NS) の零解が大域的指数安定であるならば，ある3つの正の数 $\beta_1(\alpha)$, $\beta_2(\alpha)$, β_3 及び $I \times S_\alpha^n$ 上で定義されたリヤプノフ関数 $V(t, \mathbf{x})$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\beta_1(\alpha)\|\mathbf{x}\|^2 \le V(t, \mathbf{x}) \le \beta_2(\alpha)\|\mathbf{x}\|^2$;

(ii) $\dot{V}_{(NS)}(t, \mathbf{x}) \le -\beta_3\|\mathbf{x}\|^2$.

ただし，α は大域的指数安定の定義に登場する値である (定義は第3節で述べる).

また，定理 A とは別の評価による逆定理も知られている ([15, 16] を見よ).

定理 B. 関数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ に関して局所リプシッツ条件を満たすと仮定する．非線形系 (NS) の零解が大域的指数安定であるならば，$I \times S_\alpha^n$ 上で定義された実数値関数 $V(t, \mathbf{x})$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\|\mathbf{x}\| \le V(t, \mathbf{x}) \le \beta(\alpha)\|\mathbf{x}\|$;

(ii) $\dot{V}_{(NS)}(t, \mathbf{x}) \le -k\lambda V(t, \mathbf{x})$. ただし，$0 < k < 1$;

(iii) ある数 $L(t, \alpha) > 0$ が存在し，任意の $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in I \times S_\alpha$ に対して，$|V(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{y})| \le L(t, \alpha)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

ただし，α, β 及び λ は大域的指数安定の定義に登場する値である．

線形系 (LS) に限れば，以下の逆定理が成り立つ．

定理 C. 線形系 (LS) のすべての変数係数が I 上で有界と仮定する．このとき，線形系 (LS) の零解が大域的指数安定であるならば，ある3つの正の値 β_1, β_2 及び β_3 と $I \times \mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $V(t, \mathbf{x})$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\beta_1\|\mathbf{x}\|^2 \le V(t, \mathbf{x}) \le \beta_2\|\mathbf{x}\|^2$;

(ii) $\dot{V}_{(LS)}(t, \mathbf{x}) \le -\beta_3\|\mathbf{x}\|^2$.

ただし，β_1 と β_2 は $\|\mathbf{x}\|$ の大きさとは無関係に選べることに注意する．

定理 D. 線形系 (LS) の零解が大域的指数安定であるならば，$I \times \mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $V(t, \mathbf{x})$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\|\mathbf{x}\| \le V(t, \mathbf{x}) \le \beta\|\mathbf{x}\|$;

(ii) $\dot{V}_{(LS)}(t, \mathbf{x}) \le -\lambda V(t, \mathbf{x})$;

(iii) 任意の $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in I \times \mathbb{R}^n$ に対して，$|V(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{y})| \le \beta\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

ただし，β と λ は大域的指数安定の定義に登場する値である．

先にも述べたように，本研究で対象とする半分線形系 (HS) は原点でのヤコビアンを定義できないため，定理 A や定理 B で仮定されるリプシッツ条件を満足しない．また，非線形系であるため，定理 C や定理 D もまた適用できない．そこで，本研究では，半分線形系 (HS) に対する指数安定性における逆定理を確立することを最終目的とした．Onitsuka and Soeda [10] によって得られた成果は以下の 2 つの逆定理である．

定理 1.3. 半分線形系 (HS) のすべての変数係数が I 上で有界とし，ある数 $\lambda > 0$ と $\beta > 0$ が選べ，$t \geq t_0 \geq 0$ に対して

$$\|(x(t;t_0,x_0,y_0),\phi_{p^*}(y(t;t_0,x_0,y_0)))\|_p \leq \beta e^{-\lambda(t-t_0)}\|(x_0,\phi_{p^*}(y_0))\|_p$$

を満たすと仮定する．ただし，$(x(t;t_0,x_0,y_0),y(t;t_0,x_0,y_0))$ は半分線形系 (HS) の解である．このとき，ある 3 つの正の値 β_1, β_2 及び β_3 と $I \times \mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $V(t,x,y)$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\beta_1\|(x,\phi_{p^*}(y))\|_p{}^p \leq V(t,x,y) \leq \beta_2\|(x,\phi_{p^*}(y))\|_p{}^p$;

(ii) $\dot{V}_{(HS)}(t,x,y) \leq -\beta_3\|(x,\phi_{p^*}(y))\|_p{}^p$.

定理 1.4. ある数 $\lambda > 0$ と $\beta > 0$ が選べ，$t \geq t_0 \geq 0$ に対して

$$\|(x(t;t_0,x_0,y_0),\phi_{p^*}(y(t;t_0,x_0,y_0)))\|_p \leq \beta e^{-\lambda(t-t_0)}\|(x_0,\phi_{p^*}(y_0))\|_p$$

を満たすと仮定する．ただし，$(x(t;t_0,x_0,y_0),y(t;t_0,x_0,y_0))$ は半分線形系 (HS) の解である．このとき，$I \times \mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $V(t,x,y)$ が存在し，以下の条件を満足する:

(i) $\|(x,\phi_{p^*}(y))\|_p \leq V(t,x,y) \leq \beta\|(x,\phi_{p^*}(y))\|_p$;

(ii) $\dot{V}_{(HS)}(t,x,y) \leq -\lambda V(t,x,y)$.

本節で紹介した定理 1.1, 1.2, 1.3 及び 1.4 の証明は参考文献 [10] に譲ることにする．第 2 節では，一様漸近安定及び指数安定の定義を与え，これら 2 つの定義の違いを表す例を紹介する．微分方程式の安定性の定義には数多くの分類が存在し，それらの間には包含関係が成立するものや線形系，自励系，周期系などに限定すれば同値関係が得られる場合がある．しかしながら，一般の非自励非線形系では明確な違いが導出される．その際，多くの場合でスカラーの非線形微分方程式が違いを明確にする例として挙げられるが，2 次元系以上の高次元系における具体例は乏しい．そこで，本研究では，零解が一様漸近安定であるが指数安定でない 2 次元非線形系の具体例を挙げる．加えて，第 3 節では，大域的指数安定の定義を与えると共に，零解が指数安定であるが大域的指数安定でない具体的な 2 次元非線形系を考察する．

2 一様漸近安定性と指数安定性

本論に入る前に，方程式系 (NS) の零解に関するいくつかの安定性の定義を与える．零解が一様吸収的 (*uniformly attractive*) であるとは，ある数 $\delta_0 > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $T(\varepsilon) > 0$ が選べ，$t_0 \in I$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_0$ ならば，すべての $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ において，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ であるときを言う．零解が一様安定 (*uniformly stable*) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$t_0 \in I$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ ならば，すべての $t \geq t_0$ において，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ であるときを言う．零解が一様漸近安定 (*uniformly asymptotically stable*) であるとは，零解が一様吸収的かつ一様安定であるときを言う．零解が指数安定 (*exponentially stable*) であるとは，ある数 $\lambda > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 $\delta(\varepsilon) > 0$ が選べ，$t_0 \in I$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ ならば，すべての $t \geq t_0$ において，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}$ であるときを言う．例えば，[1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16] を参照せよ．

第1節で述べたように，線形系 (LS) 及び半分線形系 (HS) に限れば，一様漸近安定性と指数安定性は同値である．ところが，一般の非線形系においてこの事実は成り立たない．例えば，$x' = -x^3$ の零解は一様漸近安定であるが指数安定でないことが知られている ([6, p. 85], [7, p. 190], [16, p. 49] を見よ)．この方程式のように，2つの安定性の違いを示す例の殆どはスカラー方程式で示されることが多い．しかしながら，上述の事実が1次元の方程式で成り立つからといって，2次元方程式系においても同様に成り立つと断言するのは論理が飛躍しているようにも感じられる．2次元非線形系においても上述の様な零解が一様漸近安定であるが指数安定でない例が存在するのか？本節では具体的な2次元非線形系を考察し，この問いに肯定的な答えを与える．

2次元非線形系

$$\begin{cases} x' = \phi_{p^*}(y) - \dfrac{x}{p}\left(\dfrac{|x|^p}{p} + \dfrac{|y|^{p^*}}{p^*}\right)^2, \\ y' = -\phi_p(x) - \dfrac{y}{p^*}\left(\dfrac{|x|^p}{p} + \dfrac{|y|^{p^*}}{p^*}\right)^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える．このとき，方程式系 (2.1) の零解は一様漸近安定であるが指数安定でない．以後，この事実を示す．まず，方程式系 (2.1) の零解は一様漸近安定であることを示すため，よく知られたリヤプノフの定理を以下に紹介する．

定理 E. 方程式系 (NS) に対して，集合 $I \times S_\alpha^n$ 上で定義された連続微分可能な実数値関数 $V(t, \mathbf{x})$ が次の性質をもつとする:

(i) $a(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{x}\|)$;

(ii) $\dot{V}_{(NS)} \leq -c(\|\mathbf{x}\|)$.

このとき，方程式系 (NS) の零解は一様漸近安定である．ただし，関数 a, b 及び c は CIP 関数とする．

さて，方程式系 (2.1) に対する $I \times S_1^2$ 上で定義されたリヤプノフ関数

$$V(t,x,y) = \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^{p^*}}{p^*} \tag{2.2}$$

を考える．ただし，S_1^2 は第 1 節で与えた集合である．また，$\underline{p}$ と $\overline{p}$ を

$$\underline{p} = \min\{p, p^*\} \quad 及び \quad \overline{p} = \max\{p, p^*\}$$

と定める．いま，$(x,y) \in S_1^2$ より，$I \times S_1^2$ 上において

$$V(t,x,y) \le \frac{|x|^{\underline{p}}}{\underline{p}} + \frac{|y|^{\underline{p}}}{\underline{p}} = \frac{1}{\underline{p}}\left(\|(x,y)\|_{\underline{p}}\right)^{\underline{p}}$$

かつ

$$V(t,x,y) \ge \frac{|x|^{\overline{p}}}{\overline{p}} + \frac{|y|^{\overline{p}}}{\overline{p}} = \frac{1}{\overline{p}}\left(\|(x,y)\|_{\overline{p}}\right)^{\overline{p}}$$

を得る．ここで，ノルムの性質を考慮すれば，$(x,y) \in S_1^2$ 上で

$$c_1\|(x,y)\| \le \|(x,y)\|_{\overline{p}} \quad かつ \quad \|(x,y)\|_{\underline{p}} \le c_2\|(x,y)\|$$

を満たす正の値 c_1 と c_2 を選べる．よって，$I \times S_1^2$ 上において，不等式

$$\frac{1}{\overline{p}}\left(c_1\|(x,y)\|\right)^{\overline{p}} \le V(t,x,y) \le \frac{1}{\underline{p}}\left(c_2\|(x,y)\|\right)^{\underline{p}} \tag{2.3}$$

が成立する．この不等式より，方程式系 (2.1) の解に沿った微分は $I \times S_1^2$ 上において

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(2.1)}(t,x,y) &= -\frac{|x|^p}{p}\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^{p^*}}{p^*}\right)^2 - \frac{|y|^{p^*}}{p^*}\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^{p^*}}{p^*}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^{p^*}}{p^*}\right)^3 = -V^3(t,x,y) \le -\frac{1}{\overline{p}^3}\left(c_1\|(x,y)\|\right)^{3\overline{p}} \qquad (2.4)\end{aligned}$$

と評価できる．よって，(2.1) と定めた関数 $V(t,x,y)$ はリヤプノフの定理 E の条件を満足するから，方程式系 (2.1) の零解は一様漸近安定である．

次に，方程式系 (2.1) の零解は指数安定でないことを示す．いま，集合 $\tilde{S}_\alpha$ を

$$\tilde{S}_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^{p^*}}{p^*} < \alpha\right\}$$

と定めれば，ある数 $0 < \alpha_0 < 1$ が選べ，$\tilde{S}_{\alpha_0} \subset S_1^2$ を満足する．関数 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ を点 $(t_0, (\xi, \eta)) \in I \times \tilde{S}_{\alpha_0}$ から開始する方程式系 (2.1) の解とするとき，不等式 (2.4) より，$t \ge t_0$ において

$$\frac{d}{dt}V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \dot{V}_{(2.1)}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \le 0$$

を満たすから，$t \geq t_0$ に対して，$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in \tilde{S}_{\alpha_0} \subset S_1^2$ である．したがって，点 $(t_0, (\xi, \eta)) \in I \times \tilde{S}_{\alpha_0}$ から開始する方程式系 (2.1) の解を $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ とするとき，関数 $V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は $t \geq t_0$ において常に存在し，単調非増加である．また，$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は $t \geq t_0$ において，1 階スカラー方程式 $V' = -V^3$ の解になる．

さて，時刻 $t_0 \in I$ で点 $v_0 \in I$ を通るスカラー方程式 $V' = -V^3$ の解は

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2{v_0}^2(t - t_0)}}$$

であるから，$v_0 = V(t_0, \xi, \eta) < \alpha_0$ を満たすとき，$t \geq t_0$ に対して

$$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \frac{V(t_0, \xi, \eta)}{\sqrt{1 + 2V^2(t_0, \xi, \eta)(t - t_0)}} \tag{2.5}$$

と表せる．

さて，指数安定の定義の否定命題を数列で表現すれば，任意の $0 < \Lambda < 1$ に対して，ある数 $\varepsilon_0(\Lambda) > 0$ と 2 つの数列 $\{\tau_n\} : \tau_n \in I$, $\{t_n\} : t_n \geq \tau_n$ 及び点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\} : \lim_{n\to\infty} \|(\xi_n, \eta_n)\| = 0$ が存在し，$\|\mathbf{x}(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)\| > \varepsilon_0(\Lambda) e^{\Lambda(t_n - \tau_n)}$ である．いま

$$\varepsilon_0(\Lambda) = \frac{1}{c_2}\left(\underline{p}\Lambda e^{1-\Lambda}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}, \quad \tau_n = n, \quad t_n = 2n, \quad \xi_n = \left(\frac{p}{\sqrt{n^2+1}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \eta_n = 0$$

と定める．ただし，c_2 は不等式 (2.3) を満たす正の値である．初期時刻を $\tau_n \in I$，初期値を $(\xi_n, \eta_n) \in \mathbb{R}^2$ とする方程式系 (2.1) の解 $(x_n(t), y_n(t))$ を考えれば

$$\lim_{n\to\infty} \|(\xi_n, \eta_n)\| = 0$$

であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が選べ，$n \geq n_0$ に対して，$(\xi_n, \eta_n) \in \tilde{S}_{\alpha_0}$ である．よって，不等式 (2.3) と等式 (2.5) より，$n \geq n_0$ において

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{p}}\left(c_2\|(x_n(t_n), y_n(t_n))\|\right)^{\underline{p}} e^{\Lambda(t_n-\tau_n)} &\geq \frac{e^{\Lambda(t_n-\tau_n)}}{\sqrt{2(t_n-\tau_n) + V^{-2}(\tau_n, \xi_n, 0)}} \\ &= \frac{e^{\Lambda n}}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{e^{\Lambda n}}{n+1} \geq \Lambda e^{1-\Lambda}\end{aligned}$$

を満たす．したがって，$n \geq n_0$ に対して

$$\|(x_n(t_n), y_n(t_n))\| e^{\Lambda(t_n-\tau_n)} \geq \frac{1}{c_2}\left(\underline{p}\Lambda e^{1-\Lambda}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}} = \varepsilon_0(\Lambda)$$

を満足する．よって，方程式系 (2.1) の零解は指数安定でない．

上述の様に，2 次元系においても非線形系であれば，一様漸近安定性と指数安定性の間に隔たりがあることが明確となった．このような事実があるのにも拘らず，半分線形系 (HS) に限れば，線形系と同様に一様漸近安定性と指数安定性は同値であることが定理 1.1 によって明らかになった．

3 指数安定性と大域的指数安定性

方程式系 (NS) の零解が大域的指数安定 (*globally exponentially stable*) であるとは，ある数 $\lambda > 0$ が存在し，任意の $\alpha > 0$ に対して，$\beta(\alpha) > 0$ が選べ，$t_0 \in I$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$ ならば，すべての $t \geq t_0$ において，$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \beta(\alpha) e^{-\lambda(t-t_0)} \|\mathbf{x}_0\|$ であるときを言う (例えば，[1, 8, 10, 15, 16] を参照せよ).

第1節で述べたように，線形系 (LS) 及び半分線形系 (HS) に限れば，指数安定性と大域的指数安定性は同値である．ところが，一般の非線形系においてこの事実は成り立たない．例えば，$x' = x(x-1)$ の零解は指数安定性であるが大域的指数安定性でないことが知られている ([10, 13] を見よ)．本節では，2次元非線形系においても零解が指数安定であるが大域的指数安定でない具体的な例を与える．

2次元非線形系

$$\begin{cases} x' = \phi_{p^*}(y) + \dfrac{x}{p}\left(\dfrac{|x|^p}{p} + \dfrac{|y|^{p^*}}{p^*} - 1\right), \\ y' = -\phi_p(x) + \dfrac{y}{p^*}\left(\dfrac{|x|^p}{p} + \dfrac{|y|^{p^*}}{p^*} - 1\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える．このとき，方程式系 (3.1) の零解は指数安定であるが大域的指数安定でない．実際にこの事実を示す．まず，$I \times \mathbb{R}^2$ 上で定義されたリヤプノフ関数 (2.2) を考える．このとき，方程式系 (3.1) の解に沿った微分は，$I \times \mathbb{R}^2$ 上で

$$\dot{V}_{(3.1)}(t, x, y) = V(t, x, y)(V(t, x, y) - 1) \tag{3.2}$$

となる．いま，関数 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ を点 $(t_0, (\xi, \eta)) \in I \times \mathbb{R}^2$ を通過する方程式系 (3.1) の解とするとき，$\dot{V}_{(3.1)}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = dV(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))/dt$ の関係が成立し，$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は任意の $t \geq t_0$ において，スカラー方程式 $V' = V(V-1)$ を満足する．このスカラー方程式の初期条件 $v(t_0) = v_0$ を満たす解は

$$v(t) = \frac{v_0}{v_0 - (v_0 - 1)e^{t-t_0}}$$

で与えられるから，$v_0 = V(t_0, \xi, \eta)$ を満たすとき，$t \geq t_0$ に対して

$$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \frac{V(t_0, \xi, \eta)}{V(t_0, \xi, \eta) - (V(t_0, \xi, \eta) - 1)e^{t-t_0}} \tag{3.3}$$

である．明らかに，$V(t_0, \xi, \eta) = 0$ のとき，(3.3) より，$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \equiv 0$ を満足し，$V(t_0, \xi, \eta) = 1$ のとき，(3.3) より，$V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \equiv 1$ を満足する．よって，スカラー方程式 $V' = V(V-1)$ の解の一意性から，以下の事実が成立する．

(i) $V(t_0, x_0, y_0) > 1$ を満たす任意の $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ から始まる方程式系 (3.1) の解 $(x(t), y(t))$ は $t \geq t_0$ に対して，$V(t, x(t), y(t)) > 1$ を満足する．

(ii) $0 < V(t_0, x_0, y_0) < 1$ を満たす任意の $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ から始まる方程式系 (3.1) の解 $(x(t), y(t))$ は $t \geq t_0$ に対して，$0 < V(t, x(t), y(t)) < 1$ を満足する．

主張 (i) より，明らかに，方程式系 (3.1) の零解は大域的指数安定ではない．$V(t_0, x_0, y_0) > 1$ を満足する初期値を選べば，零解にすら漸近しない．次に，方程式系 (3.1) の零解が指数安定であることを示す．いま，第 2 節で定義した集合 $\tilde{S}_\alpha$ を思い出すと，ある数 $0 < \alpha_0 < 1$ が存在し，$\tilde{S}_{\alpha_0} \subset S_1^2$ である．ただし，S_1^2 は第 1 節で与えた集合とする．点 $(t_0, (\xi, \eta)) \in I \times \tilde{S}_{\alpha_0}$ を通過する方程式系 (3.1) の解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ を考える．このとき，$0 < V(t_0, \xi, \eta) < \alpha_0 < 1$ より，上記の (ii) の条件を満たすので，$t \geq t_0$ に対して，$0 < V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) < 1$ である．よって，(3.2) を考慮すれば，$t \geq t_0$ において，$dV(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))/dt < 0$ であるから，$t \geq t_0$ に対して，$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in \tilde{S}_{\alpha_0} \subset S_1^2$ を満足する．この事実と (2.3) 及び (3.3) を用いれば，$t \geq t_0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{p}}(c_1\|(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\|)^{\overline{p}} \leq V(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) &= \frac{V(t_0, \xi, \eta)e^{-(t-t_0)}}{1 - V(t_0, \xi, \eta)(1 - e^{-(t-t_0)})} \\
&< \frac{V(t_0, \xi, \eta)e^{-(t-t_0)}}{1 - V(t_0, \xi, \eta)} < \frac{V(t_0, \xi, \eta)e^{-(t-t_0)}}{1 - \alpha_0} \\
&\leq \frac{(c_2\|(\xi, \eta)\|)^{\underline{p}}}{\underline{p}(1 - \alpha_0)} e^{-(t-t_0)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すなわち，$(t_0, (\xi, \eta)) \in I \times \tilde{S}_{\alpha_0}$ から開始する方程式系 (3.1) の解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は $t \geq t_0$ において

$$
\|(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\| < \frac{1}{c_1} \sqrt[\overline{p}]{\frac{\overline{p}\,(c_2\|(\xi, \eta)\|)^{\underline{p}}}{\underline{p}(1 - \alpha_0)}} e^{-(t-t_0)/\overline{p}} \tag{3.4}
$$

を満足する．

さて，ある $0 < \alpha_1 \leq \alpha_0$ が存在し，$S_{\alpha_1}^2 \subset \tilde{S}_{\alpha_0}$ である．いま，$\lambda = 1/\overline{p}$ と定める．任意の

$$
0 < \varepsilon < \frac{1}{c_1} \sqrt[\overline{p}]{\frac{\overline{p}\,(c_2\alpha_1)^{\underline{p}}}{\underline{p}(1 - \alpha_0)}}
$$

に対して

$$
\delta(\varepsilon) = \frac{1}{c_2} \sqrt[\underline{p}]{\frac{\underline{p}(1 - \alpha_0)(c_1\varepsilon)^{\overline{p}}}{\overline{p}}}
$$

と定めれば，$\delta(\varepsilon) < \alpha_1$ を満たす．このとき，$t_0 \in I$ で $\|(x_0, y_0)\| < \delta(\varepsilon)$ を満足する方程式系 (3.1) の解 $(x(t), y(t))$ を考える．不等式 (3.4) より，すべての $t \geq t_0$ において，$\|(x(t), y(t))\| < \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}$ が成り立つので，方程式系 (3.1) の零解は指数安定である．

上述の様に，2 次元系においても非線形系であれば，指数安定性と大域的指数安定性の間に隔たりがあることが明確となった．このような事実があるのにも拘らず，半分線形系 (HS) に限れば，線形系の理論を含む定理 1.2 の事実が明らかになった．

参考文献

[1] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, 2nd ed., Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[2] O. Došlý and P. Řehák, *Half-linear Differential Equations*, North–Holland Mathematics Studies 202, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[3] Á. Elbert, Asymptotic behaviour of autonomous half-linear differential systems on the plane, Studia Sci. Math. Hungar. **19** (1984), no. 2–4, pp. 447–464.

[4] A. Halanay, *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, London, 1966.

[5] J.K. Hale *Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics 11, Wiley-Interscience, New York, London, Sydney, 1969.

[6] S. Lefschetz, *Differential equations: Geometric theory*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics 6, Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, New York, London, 1963.

[7] J.L. Massera, Contributions to stability theory, Ann. of Math. **64**, (1956), no. 2, pp. 182–206.

[8] A.N. Michel, L. Hou and D. Liu, *Stability of dynamical systems: Continuous, discontinuous, and discrete systems*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.

[9] J.D. Mirzov, *Asymptotic properties of solutions of systems of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations*, Folia Facultatis Scientiarium Naturalium Universitatis Masarykianae Brunensis, Mathematica, 14, Masaryk University, Brno, 2004.

[10] M. Onitsuka and T. Soeda, Uniform asymptotic stability implies exponential stability for nonautonomous half-linear differential systems, Adv. Difference Equ. **2015**, 2015:158, 24pp.

[11] M. Onitsuka and J. Sugie, Uniform global asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **141** (2011), no. 5, pp. 1083–1101.

[12] P. Řehák, De Haan type increasing solutions of half-linear differential equations, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), no. 1, pp.236–243.

[13] G. Sansone and R. Conti, *Non-linear differential equations*, Revised ed., Translated from the Italian by Ainsley H. Diamond, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 67, A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York, 1964.

[14] J. Sugie and M. Onitsuka, Growth conditions for uniform asymptotic stability of damped oscillators, Nonlinear Anal. **98** (2014), pp.83–103.

[15] T. Yoshizawa, *Stability theory by Liapunov's second method*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966.

[16] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Applied Mathematical Sciences 14, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1975.