

## Existence and nonexistence of limit cycles for Liénard-type equations with mean curvature operator

藤本 皓大

大阪府立大学 大学院工学研究科

Kōdai Fujimoto

Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

### 1 序文

本論文では, Liénard 型の非線形常微分方程式

$$(\varphi(\dot{x}))' + f(x)\varphi(\dot{x}) + g(x) = 0, \quad \dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt} \quad (1.1)$$

に対するリミットサイクルの存在性・非存在性について考える. ただし, 関数  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (-\sigma, \sigma)$  ( $0 < \sigma \leq \infty$ ) は連続かつ狭義単調増加な奇関数とする. また, 関数  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  上連続な偶関数,  $g(x)$  は  $\mathbb{R}$  上連続な奇関数で *signum condition*

$$xg(x) > 0 \quad (x \neq 0) \quad (1.2)$$

を満たすものとする. さらに, 初期値に対する解の一意存在性を保証するため, 関数  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  は十分に滑らかであるとする. 区間  $I$  上で関数  $x(t)$  が方程式 (1.1) の解であるとは,  $I$  上で  $x(t)$ ,  $\varphi(\dot{x}(t))$  が微分可能かつ方程式 (1.1) を満たすことをいう. 特に,  $I = \mathbb{R}$  のとき  $x(t)$  は大域解であるという.

リミットサイクルは 1880 年代に Poincaré によって導入された概念であり, 常微分方程式の理論のみならず物理学, 化学, 生物学など幅広い分野において重要な役割を果たしている (例えば, [1-6, 8-13, 15-25] を参照). ここで, 方程式 (1.1) は  $\varphi(x) = x$  のとき Liénard 方程式となり, リミットサイクルを持つ方程式の典型例である Van der Pol 方程式

$$\ddot{x} + (x^2 - \delta^2)\dot{x} + x = 0 \quad (\delta > 0) \quad (1.3)$$

を含むことに注意する. なお, Van der Pol 方程式は  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  ( $\mu > 0$ ) という形式でも表現される. 実際,  $x(t) = \delta y(t)$  とすれば, 方程式 (1.3) は方程式

$$\ddot{y} + \delta^2(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (1.4)$$

に同値変形される.

**注意 1.1.** 任意の  $\delta > 0$  に対して方程式 (1.4) はただ一つリミットサイクルを持ち,  $\delta \rightarrow 0$  のとき, そのリミットサイクルは原点を中心とする半径 2 の円に近付くことが知られている ([8, 18] を参照). したがって,  $\delta \rightarrow 0$  のとき, 方程式 (1.3) のリミットサイクルの大きさは小さくなることがわかる.

方程式 (1.1) に対するリミットサイクルの存在性を示すためには,  $t \rightarrow \infty$  での方程式 (1.1) の解の漸近挙動を調べることが必要である. したがって, 方程式 (1.1) の解の大域存在性が重要な役割を果たす. しかし, 方程式 (1.1) は必ずしも大域解をもつとは限らない. 実際,  $f(x) = 0, g(x) = \varphi(x)$  のとき, 初期値問題

$$(\varphi(\dot{x}))' + \varphi(x) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \quad (1.5)$$

が大域解を持つための必要十分条件が, 次の定理で与えられている ([7] を参照). ただし,  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  とする.

**定理 A.** 初期値問題 (1.5) が大域解を持つための必要十分条件は

$$\int_0^{x_0} \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{\varphi(x_1)} \varphi^{-1}(\xi) d\xi < \int_0^{\sigma} \varphi^{-1}(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

である. ただし,  $\varphi^{-1}$  は  $\varphi$  の逆関数とする.

**注意 1.2.** 定理 A より, 不等式 (1.6) の右辺が発散するならば, 任意の  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  に対して, 初期値問題 (1.5) の解は大域解となる.

関数  $\varphi(x)$  を  $\varphi_C(x) = x/\sqrt{1+x^2}$  ( $\sigma = 1$ ) とする. このとき, 方程式 (1.1) は方程式

$$(\varphi_C(\dot{x}))' + f(x)\varphi_C(\dot{x}) + g(x) = 0 \quad (1.7)$$

となり, 初期値問題 (1.5) は

$$(\varphi_C(\dot{x}))' + \varphi_C(x) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \quad (1.8)$$

となる. ここで, 方程式 (1.7), (1.8) は平均曲率作用素と呼ばれる ([14] を参照). 簡略化のため  $x_1 = 0$  とすると, 定理 A より, 初期値問題 (1.8) が大域解を持つための必要十分条件は  $|x_0| < \sqrt{3}$  となる (詳細は [7, Example 4.2] を参照). つまり, 初期値が小さいとき, 初期値問題 (1.8) は大域解を持ちやすいといえる.

Van der Pol 型の方程式

$$(\varphi_C(\dot{x}))' + (x^2 - \delta^2)\varphi_C(\dot{x}) + x = 0 \quad (1.9)$$

について考える. 前述のとおり, 方程式 (1.9) のリミットサイクルの大きさは定数  $\delta$  によって決定される. したがって,  $\delta$  が十分小さければ方程式 (1.9) はリミットサイクルを持つと予想される. 本研究の目的は, この予想を裏付けるため, 方程式 (1.7) に対するリミットサイクルの存在に関する定理を与えることである. 簡略化のため

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad \Phi_C(x) = \int_0^x \varphi_C^{-1}(\xi) d\xi$$

と定義し,  $G^{-1}(x)$  と  $\Phi_C^{-1}(x)$  はそれぞれ  $G(x) \operatorname{sgn} x$  と  $\Phi_C(x) \operatorname{sgn} x$  の逆関数とする.

定理 1.1. 条件 (1.2) を仮定する. 定数  $\delta > 0$  が存在して

$$(|x| - \delta)f(x) > 0 \quad (|x| \neq \delta), \quad (1.10)$$

$$f(x) \geq (x^2 - \delta^2) \quad (|x| > \delta), \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{g(x)}{f(x)} \right) > 0 \quad (|x| \neq \delta), \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dx} g(x) > 0 \quad (|x| > \delta), \quad (1.13)$$

$$\mu_\delta > \delta, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{12} a_\delta (\mu_\delta + 3\delta)(\mu_\delta - \delta)^2 + G(\mu_\delta) \geq 1 \quad (1.15)$$

が成り立つならば, 方程式 (1.7) は少なくとも一つリミットサイクルを持つ. ただし,  $\mu_\delta = G^{-1}(1 + 2F(\delta))$ ,  $a_\delta = \Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(\delta))$  である.

定理 1.2. 条件 (1.2) を仮定する. 定数  $\delta > 0$  が存在して

$$f(x) \leq (x^2 - \delta^2) \quad (|x| < \delta), \quad (1.16)$$

$$g(x) \geq x \quad (0 < x < \delta), \quad (1.17)$$

$$1 - \frac{3\pi}{32} \delta^4 \sqrt{4 - \delta^2} \leq G(\delta) \leq 1 \quad (1.18)$$

が成り立つならば, 方程式 (1.7) はリミットサイクルを持たない.

注意 1.3. 関数  $g(x)$  は条件 (1.2) を満たす奇関数であるから,  $G(x)$  は偶関数かつ  $x \neq 0$  ならば正である. また, 条件 (1.10) より  $F(\delta) = -F(-\delta) < 0$  となる. さらに,  $\varphi_C^{-1}(x) = x/\sqrt{1-x^2}$ ,  $\Phi_C(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ ,  $\Phi_C^{-1}(x) = \sqrt{|2x-x^2|} \operatorname{sgn} x$ ,  $\Phi_C(1) = 1$  である.

## 2 準備

方程式 (1.7) と同値な方程式系

$$\dot{x} = \varphi_C^{-1}(y), \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x) \quad (2.1)$$

について考える. 条件 (1.2) より, 系 (2.1) の原点はただ一つの平衡点である.

方程式系 (2.1) の正の半解軌跡の, 相平面に対する射影を正の半解軌道と呼ぶ. 点  $P \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$  を出発する方程式系 (2.1) の正の半解軌道を  $\gamma_{(2.1)}^+(P)$  と書く. 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(P)$  についても同様に定義する. さらに,  $\gamma_{(2.1)}(P) = \gamma_{(2.1)}^+(P) \cup \gamma_{(2.1)}^-(P)$  を方程式系 (2.1) の解軌道と呼ぶ.

解軌道  $\gamma_{(2.1)}(x_0, y_0)$  に対応する方程式系 (2.1) の解を  $(x(t), y(t))$  とする. ただし,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$  である. 方程式系 (2.1) は自励系であるから,  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  としても一般性を損なわない. いま, 定数  $t_1 > 0$  が存在して

$$\lim_{t \rightarrow t_1} |x(t)| = \infty, \quad |y(t)| < 1 \quad (0 \leq t < t_1), \quad \lim_{t \rightarrow t_1} |y(t)| < 1$$

となると仮定する. このとき, 方程式系 (2.1) の第一式から

$$|\dot{x}(t)| = |\varphi_C^{-1}(y(t))| < \varphi_C^{-1}(1) = \infty \quad (0 \leq t < t_1), \quad \lim_{t \rightarrow t_1} |\dot{x}(t)| < \infty$$

を得る. したがって

$$\infty = \left| \lim_{t \rightarrow t_1} x(t) - x_0 \right| = \left| \int_0^{t_1} \dot{x}(s) ds \right| \leq \int_0^{t_1} |\dot{x}(s)| ds \leq t_1 \sup_{0 \leq t < t_1} |\dot{x}(t)| < \infty$$

となり, 矛盾が生じる. ゆえに, 相平面上で解軌道  $\gamma_{(2.1)}(x_0, y_0)$  が直線  $y = 1$  または  $y = -1$  と交わらない限り,  $x(t)$  は有限時間で発散しない.

初期値  $(x_0, y_0)$  は  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  を満たし, 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(x_0, y_0)$  は  $x$  軸および直線  $y = 1$  または  $y = -1$  とは交わらないとする. このとき, 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(x_0, y_0)$  は  $x$  についての関数となり, 初期条件  $\bar{y}(x_0) = y_0$  を満たす方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)y + g(x)}{\varphi_C^{-1}(y)} \quad (2.2)$$

の解  $\bar{y}(x)$  とみなせる. なお, 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(x_0, y_0)$  が  $x = x_1$  において  $x$  軸と交わるとき,  $\bar{y}(x_1) = 0$  と定義する.

定理の証明に用いるため,  $f(x) = 0$  の場合について考える. このとき, 方程式系 (2.1) と方程式 (2.2) はそれぞれ方程式系

$$\dot{x} = \varphi_C^{-1}(y), \quad \dot{y} = -g(x) \quad (2.3)$$

と方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{\varphi_C^{-1}(y)} \quad (2.4)$$

になる. 区間  $I$  上で定義され,  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  を満たす方程式系 (2.3) の解  $(x(t), y(t))$  が,  $I$  上で

$$G(x(t)) + \Phi_C(y(t)) = G(x_0) + \Phi_C(y_0) \quad (2.5)$$

を満たすことが証明できる. さらに,  $\tilde{y}(x_0) = y_0$  を満たす方程式系 (2.4) の解  $\tilde{y}(x)$  が

$$G(x) + \Phi_C(\tilde{y}(x)) = G(x_0) + \Phi_C(y_0) \quad (2.6)$$

を満たすことも示される.

注意 2.1. 関数  $\varphi_C(x), g(x)$  は奇関数であるから, 方程式系 (2.3) の任意の解軌道は原点,  $x$  軸,  $y$  軸について対称である.

補題 2.1. 条件 (1.2) と

$$\int_0^\infty g(\xi) d\xi = \infty \quad (2.7)$$

を仮定し,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  とする. 解軌道  $\gamma_{(2.3)}(x_0, y_0)$  が閉軌道となるための必要十分条件は  $G(x_0) + \Phi_C(y_0) < 1$  である.

証明. 条件 (1.2) と (2.7) より,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  に対して

$$\alpha = \alpha(x_0, y_0) = \begin{cases} 0, & G(x_0) + \Phi_C(y_0) < 1, \\ G^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - 1), & G(x_0) + \Phi_C(y_0) \geq 1, \end{cases}$$

$$\beta = \beta(x_0, y_0) = G^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0))$$

と定義できる. このとき,  $0 \leq \alpha < \beta < \infty$  かつ  $\alpha < \xi < \beta$  に対して  $0 < G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi) < 1$  であるので,

$$T = T(x_0, y_0) = \int_\alpha^\beta \frac{d\xi}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)))}$$

が定義できる. ここで,  $\alpha, \beta$ , および  $T$  の意味については後述の注意 2.2 を参照せよ.

はじめに, 任意の  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  に対して  $T(x_0, y_0)$  が有限であることを示す. いま,  $\xi \uparrow \beta$  とすると  $G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi) \rightarrow 0$  であるから, l'Hôpital の原理より

$$\lim_{\xi \uparrow \beta} \frac{G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)}{\beta - \xi} = g(\beta) > 0$$

を得る. したがって, 定数  $c > 0$  と  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して,  $\beta - \varepsilon_0 < \xi < \beta$  に対して

$$\frac{G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)}{\beta - \xi} \geq c$$

となる. 関数  $\varphi_C^{-1}(x)$  と  $\Phi_C^{-1}(x)$  が  $\beta - \varepsilon_0 < \xi < \beta$  に対して単調増加であることから

$$\int_{\beta - \varepsilon_0}^\beta \frac{d\xi}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)))} \leq \int_{\beta - \varepsilon_0}^\beta \frac{d\xi}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(c(\beta - \xi)))} = \frac{\Phi_C^{-1}(c\varepsilon_0)}{c}$$

を得る. さらに, 関数  $G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)$  は  $\alpha < \xi < \beta - \varepsilon_0$  に対して連続, 正値かつ単調減少であるから

$$\int_\alpha^{\beta - \varepsilon_0} \frac{d\xi}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)))} < \infty$$

となる. よって,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  に対して  $0 \leq T(x_0, y_0) < \infty$  を得る.

次に,  $G(x_0) + \Phi_C(y_0) < 1$  ならば解軌道  $\gamma_{(2.3)}(x_0, y_0)$  が閉軌道であることを示す. 注意 2.1 より,  $(x_0, y_0) \in [0, \infty) \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  としても一般性を損なわない. このとき,  $T(x_0, y_0)$  が有限であることより, 関数

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\xi)))} \quad (2.8)$$

が  $\alpha \leq x \leq \beta$  で定義できる. 関数  $t(x)$  は  $\alpha < x < \beta$  に対して微分可能であるから,  $\alpha < x < \beta$  に対して

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{1}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(x)))} > 0$$

を得る. したがって,  $t(x)$  は  $\alpha \leq x \leq \beta$  に対して単調増加であり,  $t(\alpha) \leq t \leq t(\beta)$  で定義された  $t(x)$  の逆関数  $x(t)$  が存在する. このとき,  $x(t)$  も微分可能であり,  $t(\alpha) < t < t(\beta)$  に対して  $\varphi_C(\dot{x}(t)) = \Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(x(t))) > 0$  を満たす. いま,  $y(t) = \varphi_C(\dot{x}(t))$  と置く. このとき,  $y(t)$  は  $t(\alpha) < t < t(\beta)$  で微分可能であり,  $(x(t), y(t))$  は方程式 (2.5) を満たす. 方程式 (2.5) の両辺を微分すると  $g(x(t))\dot{x}(t) + \varphi_C^{-1}(y(t))\dot{y}(t) = 0$  となるので,  $(x(t), y(t))$  は  $t(\alpha) < t < t(\beta)$  で方程式系 (2.3) を満たす. ここで,  $T = t(\beta) - t(\alpha)$  であり,  $t(\alpha) < t < t(\beta)$  に対して  $x(t)$  は正値かつ単調増加,  $y(t)$  は正値かつ単調減少であることに注意する. したがって

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow t(\alpha)} x(t) &= \alpha = 0, & \lim_{t \downarrow t(\alpha)} y(t) &= \Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0)) < 1, \\ \lim_{t \uparrow t(\beta)} x(t) &= \beta < \infty, & \lim_{t \uparrow t(\beta)} y(t) &= \Phi_C^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - G(\beta)) = 0 \end{aligned}$$

となる. 関数  $u(t)$  を  $\mathbb{R}$  上で定義された  $4T$  周期の関数

$$\begin{cases} -x(2t(\alpha) - t), & t(\beta) - 2T < t < t(\beta) - T, \\ x(t), & t(\beta) - T < t < t(\beta), \\ x(2t(\beta) - t), & t(\beta) < t < t(\beta) + T, \\ -x(t - 2T), & t(\beta) + T < t < t(\beta) + 2T \end{cases}$$

とし,  $v(t) = \varphi_C(\dot{u}(t))$  と置く. このとき,  $(u(t), v(t))$  は  $\mathbb{R}$  上で定義され,  $(u(0), v(0)) = (x_0, y_0)$  を満たす方程式系 (2.3) の一意な解である ([7] を参照). したがって,  $(u(t), v(t))$  は方程式系 (2.3) の周期解である. すなわち, 解軌道  $\gamma_{(2.3)}(x_0, y_0)$  は閉軌道である.

最後に,  $G(x_0) + \Phi_C(y_0) \geq 1$  ならば解軌道  $\gamma_{(2.3)}(x_0, y_0)$  が閉軌道でないことを示す. 前段落と同様に,  $(x_0, y_0) \in [0, \infty) \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  とする. 関数  $t(x)$  を  $\alpha \leq x \leq \beta$  に対して (2.8) で定義すると,  $(x(t), y(t))$  は  $t(\alpha) < t < t(\beta)$  で定義された方程式系 (2.3) の解である. ただし,  $x(t)$  は  $t(x)$  の逆関数であり,  $y(t) = \varphi_C(\dot{x}(t))$  である. したがって

$$\lim_{t \downarrow t(\alpha)} x(t) = \alpha = G^{-1}(G(x_0) + \Phi_C(y_0) - 1) \geq 0, \quad \lim_{t \downarrow t(\alpha)} y(t) = 1$$

を得る. いま,  $x(t(\beta) - T) = \alpha$  かつ  $y(t(\beta) - T) = 1$  と定義すると,  $x(t)$  および  $y(t)$  は  $t = t(\beta) - T$  で連続であるが, 方程式系 (2.3) を満たさない. ゆえに,  $(x(t), y(t))$  は方程式系 (2.3) の大域解ではない. すなわち, 解軌道  $\gamma_{(2.3)}(x_0, y_0)$  は閉軌道でない. 以上より, 補題 2.1 は示された.  $\square$

**注意 2.2.** 相平面上で  $(x_0, y_0)$  が第 1 象限にある場合,  $\alpha$  は負の半解軌道  $\gamma_{(2.3)}^-(x_0, y_0)$  と正の  $y$  軸または直線  $y = 1$  との交点の  $x$  座標を表している. 一方,  $\beta$  は正の半解軌道  $\gamma_{(2.3)}^+(x_0, y_0)$  と正の  $x$  軸との交点の  $x$  座標を表している. さらに,  $T$  は,  $(x_0, y_0)$  を初期値とする方程式系 (2.3) の解が,  $x$  軸,  $y$  軸, または直線  $y = 1$  と交わらないような  $t$  の区間の長さを表している.

**注意 2.3.** 条件 (1.13) が成り立つならば条件 (2.7) が成立する. したがって, 補題 2.1 における条件 (2.7) は, 条件 (1.13) に取り換えることができる.

### 3 定理の証明

定理 1.1 を証明するため, 方程式系 (2.1) の解の漸近挙動について考える. 本節では, まず, 方程式系 (2.1) の原点がリペラーであることを示す. 方程式系 (2.1) の原点がリペラーであるとは, 原点の近傍  $U$  が存在し, 任意の点  $P \in U$  に対して正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(P)$  が  $U$  の外に出て, かつ任意の点  $Q \in U^c$  に対して正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(Q)$  が  $U$  の中に入らないことをいう. ここで,  $U^c$  は  $U$  の補集合である. 原点がリペラーであるならば,  $U^c$  は正の不変集合であることに注意する. Lyapunov 関数

$$V(x, y) = G(x) + \Phi_C(y)$$

を用いて, 次の補題を示す.

**補題 3.1.** 条件 (1.2) を仮定する. さらに, 条件 (1.10) を満たす定数  $\delta > 0$  が存在するならば, 方程式系 (2.1) の原点はリペラーである.

**証明.** Lyapunov 関数  $V(x, y)$  に対して

$$\dot{V}_{(2.1)}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \varphi_C^{-1}(y) + \frac{\partial V}{\partial y} (-f(x)y - g(x))$$

と定義し, 集合  $R$  を  $R = \{(x, y) : |x| < \delta, |y| < 1\}$  とする. このとき, 条件 (1.10) より  $|x| < \delta$  に対して  $f(x) < 0$  であることから,  $(x, y) \in R$  かつ  $y \neq 0$  ならば

$$\dot{V}_{(2.1)}(x, y) = -f(x)y\varphi_C^{-1}(y) > 0 \tag{3.1}$$

となる. したがって,  $\varepsilon_0 > 0$  を十分小さくとれば

$$U_1 = \{(x, y) : 0 < V(x, y) < \varepsilon_0\} \subset R$$

とできる. 式 (3.1) より, 任意の点  $Q \in R \setminus U_1$  に対して正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(Q)$  は  $U_1$  に入らない.

任意の点  $P \in U_1$  に対して, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(P)$  が  $U_1$  の外に出ることを示す. ある点  $P_0 = (x_0, y_0)$  が存在して, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(P_0)$  が  $U_1$  内に留まると仮定する. このとき, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(P_0)$  に対応する方程式 (2.1) の解を  $(x(t), y(t))$  とすると,  $t \geq 0$  に対して  $V(x(t), y(t)) < \varepsilon_0$  である. 式 (3.1) より,  $(x(t), y(t))$  は集合

$$U_2 = \{(x, y) : V(x, y) < V(x_0, y_0)\}$$

に入らない. 集合  $U_2$  は原点を含む開集合であるから, 正の定数  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  が存在して

$$\{(x, y) : |x| < 2\varepsilon_1, |y| < 2\varepsilon_1\} \subset U_2$$

となる. 方程式系 (2.1) のベクトル場より,  $(x(t), y(t))$  は原点のまわりを時計回りに周回する. したがって, 数列  $\{\sigma_n\}$  と  $\{\tau_n\}$  が存在して  $x(\sigma_n) = \varepsilon_1, y(\sigma_n) > 2\varepsilon_1, x(\tau_n) > 2\varepsilon_1, y(\tau_n) = \varepsilon_1$  かつ  $\sigma_n < t < \tau_n$  に対して

$$\varepsilon_1 < x(t) < G^{-1}(\varepsilon_0), \quad \varepsilon_1 < y(t) < \Phi_C^{-1}(\varepsilon_0)$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 < x(\tau_n) - x(\sigma_n) &= \int_{\sigma_n}^{\tau_n} \dot{x}(t) dt = \int_{\sigma_n}^{\tau_n} \varphi_C^{-1}(y(t)) dt \\ &\leq \varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(\varepsilon_0))(\tau_n - \sigma_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る. さらに,  $t \geq \tau_n$  に対して

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - V(x_0, y_0) &> V(x(t), y(t)) - V(x_0, y_0) = \int_0^t \dot{V}_{(2.1)}(x(s), y(s)) ds \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{1_k}^{\tau_k} \dot{V}_{(2.1)}(x(s), y(s)) ds \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{1_k}^{\tau_k} -f(x(s))y(s)\varphi_C^{-1}(y(s)) ds \\ &\geq m\varphi_C^{-1}(\varepsilon_1)\varepsilon_1 \sum_{k=1}^n (\tau_k - \sigma_k) \end{aligned}$$

となる. ただし,  $m = \min\{-f(x) : \varepsilon_1 \leq x \leq G^{-1}(\varepsilon_0)\} > 0$  である. 式 (3.2) から,  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\varepsilon_0 - V(x_0, y_0) > \frac{m\varphi_C^{-1}(\varepsilon_1)\varepsilon_1^2}{\varphi_C^{-1}(\Phi_C^{-1}(\varepsilon_0))} n \rightarrow \infty$$

となり, 矛盾が生じる. 以上より, 補題 3.1 は示された.  $\square$

次に, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  の漸近挙動について, 次の補題を与える.

補題 3.2. 条件 (1.2) を仮定する. 定数  $\delta > 0$  が存在して, 条件 (1.10), (1.12)-(1.14) が成り立つならば, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は上半平面で直線  $y = 1$  と交わることなく, 正の  $x$  軸と交わる.

証明. 条件 (1.14) より  $a_\delta > 0$  であり, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, 0)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_1(x)$  と置く.

はじめに,  $-\delta < x \leq 0$  に対して  $\bar{y}_1(x) < 1$  であることを示す. 定数  $x_0$  が存在して,  $-\delta < x_0 \leq 0$  かつ

$$\bar{y}_1(x) < 1 \quad (-\delta < x < x_0), \quad \lim_{x \uparrow x_0} \bar{y}_1(x) = 1 \quad (3.3)$$

であると仮定する. このとき,  $-\delta < x < x_0$  に対して

$$\frac{d}{dx} V(x, \bar{y}_1(x)) = -f(x)\bar{y}_1(x)$$

となる. よって, 条件 (1.10), (3.3) より

$$\begin{aligned} V(x_0, 1) - V(-\delta, 0) &= \int_{-\delta}^{x_0} \frac{d}{dx} V(x, \bar{y}_1(x)) dx = \int_{-\delta}^{x_0} -f(x)\bar{y}_1(x) dx \\ &\leq \int_{-\delta}^{x_0} -f(x) dx \leq \int_{-\delta}^0 -f(x) dx = -F(\delta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る. したがって,  $V(-\delta, 0) = G(\delta)$  より

$$V(x_0, 1) \leq -F(\delta) + G(\delta)$$

である. また, 条件 (1.14) と注意 1.3 から,  $-F(\delta) + G(\delta) < 1$  である. 以上より

$$1 \leq G(x_0) + 1 = V(x_0, 1) < 1$$

となり, 矛盾が生じる.

ここで,  $f(\delta) = 0$  かつ  $g(0) = 0$  であるから

$$-\frac{g(0)}{f(0)} = 0, \quad \lim_{x \uparrow \delta} -\frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

を得る. 条件 (1.12) より  $-g(x)/f(x)$  は  $0 < x < \delta$  に対して単調増加である. したがって, 特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と直線  $y = 1 - \varepsilon$  は  $0 < x < \delta$  でただ一つ交点を持つ. ただし,  $\varepsilon$  は  $0 < \varepsilon < 1$  を満たす定数とする. この交点の  $x$  座標を  $b_\varepsilon$  と置き, 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(b_\varepsilon, 1 - \varepsilon)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_2(x)$  と置く. このとき,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすれば  $1 - \Phi_C(1 - \varepsilon) \rightarrow 0$  かつ  $G(b_\varepsilon)$  は正の定数に収束することから, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  を取れば

$$G(b_\varepsilon) + \Phi_C(1 - \varepsilon) > 1 \quad (3.5)$$

とできる.

次に,  $-\delta \leq x \leq b_\varepsilon$  に対して  $0 < \bar{y}_2(x) < 1$  となることを示す. 方程式系 (2.1) のベクトル場より

$$0 < \bar{y}_2(x) < 1 - \varepsilon < 1 \quad (0 < x < b_\varepsilon), \quad \bar{y}_2(b_\varepsilon) = 1 - \varepsilon \quad (3.6)$$

となるので, 条件 (1.10) と  $0 < b_\varepsilon < \delta$  より

$$\begin{aligned} V(b_\varepsilon, 1 - \varepsilon) - V(0, \bar{y}_2(0)) &= \int_0^{b_\varepsilon} \frac{d}{dx} V(x, \bar{y}_2(x)) dx = \int_0^{b_\varepsilon} -f(x) \bar{y}_2(x) dx \\ &< \int_0^{b_\varepsilon} -f(x) dx < \int_0^\delta -f(x) dx = -F(\delta) \end{aligned}$$

を得る. したがって

$$\Phi_C(\bar{y}_2(0)) = V(0, \bar{y}_2(0)) > F(\delta) + V(b_\varepsilon, 1 - \varepsilon) = F(\delta) + G(b_\varepsilon) + \Phi_C(1 - \varepsilon)$$

である. 式 (3.4) と同様に

$$V(0, \bar{y}_1(0)) - V(-\delta, 0) \leq -F(\delta)$$

が成り立つので,  $\Phi_C(\bar{y}_1(0)) \leq -F(\delta) + G(\delta)$  となる. よって, 条件 (1.14), 不等式 (3.5) とあわせて

$$\begin{aligned} \Phi_C(\bar{y}_2(0)) - \Phi_C(\bar{y}_1(0)) &> (F(\delta) + G(b_\varepsilon) + \Phi_C(1 - \varepsilon)) - (-F(\delta) + G(\delta)) \\ &= 2F(\delta) - G(\delta) + G(b_\varepsilon) + \Phi_C(1 - \varepsilon) \\ &> 2F(\delta) - G(\delta) + 1 = G(\mu_\delta) - G(\delta) > 0 \end{aligned}$$

を得る. すなわち,  $\bar{y}_1(0) < \bar{y}_2(0)$  である. したがって, 方程式 (2.2) の解の一意性から,  $-\delta \leq x \leq 0$  に対して  $0 \leq \bar{y}_1(x) < \bar{y}_2(x)$  となる. 以上より,  $-\delta < x < b_\varepsilon$  に対して  $\bar{y}_2(x)$  が単調増加であることと  $\bar{y}_2(b_\varepsilon) = 1 - \varepsilon < 1$  から,  $-\delta \leq x \leq b_\varepsilon$  に対して  $0 < \bar{y}_2(x) < 1$  となる.

さらに,  $\bar{y}_2(-\delta) > a_\delta$  であることを示す. 条件 (1.10), (3.6) より

$$\begin{aligned} V(b_\varepsilon, 1 - \varepsilon) - V(-\delta, \bar{y}_2(-\delta)) &= \int_{-\delta}^{b_\varepsilon} \frac{d}{dx} V(x, \bar{y}_2(x)) dx = \int_{-\delta}^{b_\varepsilon} -f(x) \bar{y}_2(x) dx \\ &< \int_{-\delta}^{b_\varepsilon} -f(x) dx < \int_{-\delta}^\delta -f(x) dx = -2F(\delta) \end{aligned}$$

であり, 不等式 (3.5) から

$$\begin{aligned} \Phi_C(\bar{y}_2(-\delta)) &= V(-\delta, \bar{y}_2(-\delta)) - G(-\delta) > 2F(\delta) + V(b_\varepsilon, 1 - \varepsilon) - G(\delta) \\ &= 2F(\delta) - G(\delta) + G(b_\varepsilon) + \Phi_C(1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$> 2F(\delta) - G(\delta) + 1 = G(\mu_\delta) - G(\delta)$$

を得る. したがって,  $\bar{y}_2(-\delta) > \Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(\delta)) = a_\delta$  である. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_3(x)$  と置く. このとき,  $\bar{y}_3(-\delta) = a_\delta < \bar{y}_2(-\delta)$  であるから, 方程式 (2.2) の解の一意性より  $-\delta \leq x \leq b_\varepsilon$  に対して  $\bar{y}_3(x) < \bar{y}_2(x)$  となる. したがって,  $\bar{y}_3(x)$  は正の  $y$  軸と交わった後, 特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と交わる. よって, 方程式系 (2.1) のベクトル場より, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は相平面の上半平面にある限り, 直線  $y = 1$  と交わらない (図 1 を参照).

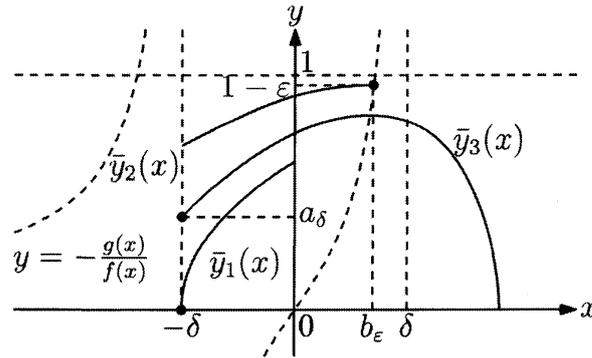


図 1: 方程式 (2.2) の解  $\bar{y}_1(x)$ ,  $\bar{y}_2(x)$ ,  $\bar{y}_3(x)$ .

最後に, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  が正の  $x$  軸と交わることを示す. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  が正の  $x$  軸と交わらないと仮定する. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  に対応する方程式系 (2.1) の解を  $(x(t), y(t))$  と置くと,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $x(t) \rightarrow \infty$  である. したがって, 定数  $t_1 \geq 0$  が存在して  $t \geq t_1$  に対して  $x(t) \geq \delta$  となる. 条件 (1.10) より

$$\dot{V}_{(2.1)}(x(t), y(t)) = -f(x(t))y(t)\varphi_C^{-1}(y(t)) < 0$$

であるから,  $t \geq t_1$  に対して

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x(t_1), y(t_1)) < \infty$$

となる. 一方,  $t \rightarrow \infty$  とすると

$$V(x(t), y(t)) = G(x(t)) + \Phi_C(y(t)) \geq G(x(t)) \rightarrow \infty$$

であるから, 矛盾が生じる. □

補題を用いて, 定理の証明を行う.

**定理 1.1 の証明.** Poincaré-Bendixson の定理を用いるため, 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(-\delta, a_\delta)$  について考える. 補題 3.2 より, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は  $x$  軸と交点を持つ. この交点の  $x$  座標を  $x_1$  と置く. 一方, 条件 (1.12) より, 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(-\delta, a_\delta)$  は次のいずれかと交わる:

- (i) 負の  $x$  軸上の線分  $\{(x, y) : -x_1 \leq x < -\delta, y = 0\}$ ,
- (ii) 直線  $x = -x_1$  上の線分  $\{(x, y) : x = -x_1, 0 < y \leq -g(-x_1)/f(-x_1)\}$ ,
- (iii) 特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  上の弧  $\{(x, y) : -x_1 < x < -\delta, y = -g(x)/f(x)\}$ .

はじめに, (i) は起こらないことを示す. 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(\delta, a_\delta)$  と  $\gamma_{(2.3)}^-(\delta, a_\delta)$  について考える. 式 (2.6) と補題 3.1 より, 負の半解軌道  $\gamma_{(2.3)}^-(\delta, a_\delta)$  は  $x = -\mu_\delta$  において負の  $x$  軸と交わる. ここで,  $\mu_\delta = G^{-1}(G(-\delta) + \Phi_C(a_\delta))$  であることに注意する. 定数  $x_2 < 0$  が存在して, 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(\delta, a_\delta)$  と負の  $x$  軸上の線分  $\{(x, y) : -x_1 \leq x < -\delta, y = 0\}$  が  $x = x_2$  で交わると仮定する. このとき,  $|x_1| \geq |x_2|$  である. 負の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(\delta, a_\delta)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_1(x)$ , 負の半解軌道  $\gamma_{(2.3)}^-(\delta, a_\delta)$  に対応する方程式 (2.4) の解を  $\tilde{y}_2(x)$  と置く. このとき

$$\frac{d\tilde{y}_2(x)}{dx} = -\frac{g(x)}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))} > -\frac{f(x)\tilde{y}_2(x) + g(x)}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))}$$

かつ  $\tilde{y}_2(-\delta) = \bar{y}_1(-\delta)$  であるから,  $x_2 < -\mu_\delta$  および

$$\bar{y}_1(x) > \tilde{y}_2(x) \quad (-\mu_\delta < x < -\delta)$$

を得る. また, 式 (2.6) より

$$\tilde{y}_2(x) = \Phi_C^{-1}(G(\delta) + \Phi_C(a_\delta) - G(x)) = \Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(x))$$

である. さらに, 方程式

$$\frac{d}{dx}\tilde{y}_2(x) = -\frac{g(x)}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))}$$

の右辺が微分可能であり, 条件 (1.13) および

$$\frac{d}{d\xi}\varphi_C^{-1}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{1-\xi^2})^3}$$

であることから

$$\frac{d^2}{dx^2}\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))} \left( \frac{d}{dx}g(x) \right) - \frac{g^2(x)}{\tilde{y}_2^3(x)} < 0$$

が成り立つ. したがって,  $-\mu_\delta \leq x \leq -\delta$  に対して  $\tilde{y}_2(x)$  は上に凸であるから

$$\Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(x)) = \tilde{y}_2(x) \geq \frac{a_\delta}{\mu_\delta - \delta}(x + \mu_\delta) > 0 \quad (3.7)$$

となる. 条件 (1.10), (1.11), (1.14), (1.15) および式 (3.7) より

$$V(x_1, 0) - V(x_2, 0) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{d}{dx}V(x, \bar{y}_1(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_2}^{-\mu_\delta} -f(x)\bar{y}_1(x) dx + \int_{-\mu_\delta}^{-\delta} -f(x)\bar{y}_1(x) dx + \int_{-\delta}^{x_1} -f(x)\bar{y}_1(x) dx \\
&< \int_{-\mu_\delta}^{-\delta} -f(x)\tilde{y}_2(x) dx + \int_{-\delta}^{x_1} -f(x) dx \\
&< \int_{-\mu_\delta}^{-\delta} -f(x)\Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(x)) dx + \int_{-\delta}^{\delta} -f(x) dx \\
&= - \int_{-\mu_\delta}^{-\delta} f(x)\Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(x)) dx - 2F(\delta) \\
&= - \int_{\delta}^{\mu_\delta} f(x)\Phi_C^{-1}(G(\mu_\delta) - G(x)) dx + 1 - G(\mu_\delta) \\
&\leq - \int_{\delta}^{\mu_\delta} (x^2 - \delta^2) \frac{a_\delta}{\mu_\delta - \delta} (x + \mu_\delta) dx + 1 - G(\mu_\delta) \\
&= - \frac{1}{12} a_\delta (\mu_\delta + 3\delta) (\mu_\delta - \delta)^2 + 1 - G(\mu_\delta) \leq 0
\end{aligned}$$

が成立する. よって,  $G(x_1) < G(x_2)$  すなわち  $|x_1| < |x_2|$  である. これは  $|x_1| \geq |x_2|$  であることに矛盾するため, (i) は起こらないことが示された.

次に, (ii) の場合について考える. 上半平面における解軌道  $\gamma_{(2.1)}(-\delta, a_\delta)$ , 下半平面における解軌道  $\gamma_{(2.1)}(\delta, -a_\delta)$  および直線  $x = x_1, x = -x_1$  によって囲まれる領域を  $R_1$  とする (図2を参照). 補題3.1より, 原点の近傍  $U \subset R_1$  であって  $R_1 \setminus U$  が閉かつ正常点のみを含む正の不変集合となるものが存在する. 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(-\delta, a_\delta)$  は周期軌道ではないので, Poincaré-Bendixson の定理から, 方程式 (1.7) は少なくとも一つリミットサイクルを持つ ([5]を参照).

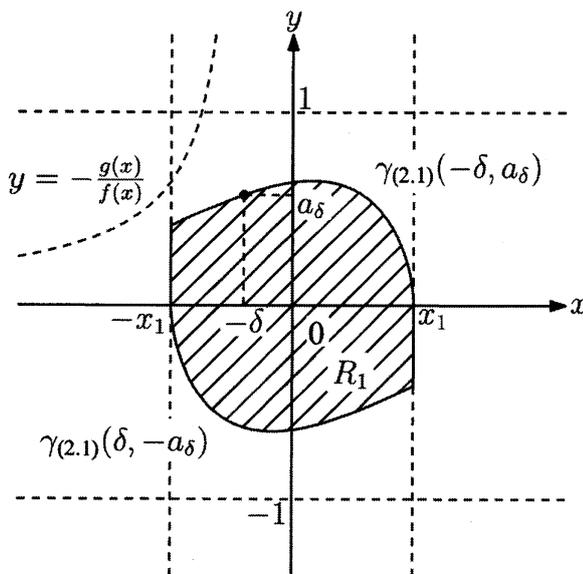


図2: (ii) の場合における領域  $R_1$  の構成.

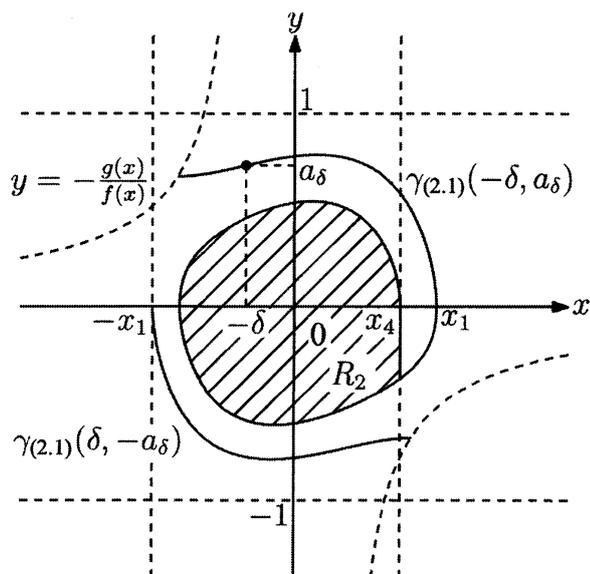


図3: (iii) の場合における領域  $R_2$  の構成.

最後に, (iii) の場合について考える. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  と正の  $x$  軸の交点は  $(x_1, 0)$  であることに注意しておく. 第 4 象限における正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(x_1, 0)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_3(x)$  と置く.

正の不変集合  $\gamma_{(2.1)}^+(x_1, 0)$  は第 4 象限において特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と交わらないことを示す. 第 4 象限において  $\bar{y}_3(x)$  が特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と交わると仮定する. この交点の  $x$  座標を  $x_3$  と置く. このとき, 条件 (1.12) より

$$\left. \frac{d}{dx} \bar{y}_3(x) \right|_{x=x_3} \geq \left. \frac{d}{dx} \left( -\frac{g(x)}{f(x)} \right) \right|_{x=x_3} > 0$$

となる. 一方,  $(x_3, \bar{y}_3(x_3))$  は特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  上の点であることから

$$\left. \frac{d}{dx} \bar{y}_3(x) \right|_{x=x_3} = -\frac{f(x_3)\bar{y}_3(x_3) + g(x_3)}{\varphi_C^{-1}(\bar{y}_3(x_3))} = 0$$

であり, 矛盾する. したがって, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は第 4 象限において特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と交わらない.

解軌道  $\gamma_{(2.1)}(-\delta, a_\delta)$  と  $\gamma_{(2.1)}(\delta, -a_\delta)$  は原点について対称であり, 方程式系 (2.1) の解の一意性から交点を持たない. したがって, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は第 4 象限, 第 3 象限を通過して負の  $x$  軸上の線分  $\{(x, y) : -x_1 < x < 0, y = 0\}$  と交わる. 前述と同様にして, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  は自分自身および第 2 象限における特性曲線  $y = -g(x)/f(x)$  と交わらないことが示されるので, 第 2 象限, 第 1 象限を通り, 第 4 象限に到達する. このとき, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, a_\delta)$  と正の  $x$  軸の交点の  $x$  座標を  $x_4 < x_1$  と置く. 解軌道  $\gamma_{(2.1)}(-\delta, a_\delta)$  および直線  $x = x_4$  によって囲まれる領域を  $R_2$  とする (図 3 を参照). このとき, (ii) の証明と同様に, 方程式 (1.7) が少なくとも一つリミットサイクルを持つことが証明される. 以上より, 定理 1.1 は示された.  $\square$

**定理 1.2 の証明.** 方程式 (1.7) がリミットサイクルを持つと仮定する. 方程式系 (2.1) のベクトル場より, リミットサイクルは原点のまわりを時計回りに周回する. ここで

$$V(x, y) = G(x) + \Phi_C(y), \quad R = \{(x, y) : |x| < \delta, |y| < 1\}$$

であることに注意しておく.

リミットサイクルが直線  $x = -\delta$  と交わることを示す. リミットサイクルが  $x = -\delta$  と交わらないと仮定すると, リミットサイクルは原点对称であることから, 領域  $R$  内に含まれる. リミットサイクルに対応する方程式系 (2.1) の解を  $(x(t), y(t))$  と置く. このとき, 条件 (1.16) より,  $(x, y) \in R$  かつ  $y \neq 0$  のとき

$$\dot{V}_{(2.1)}(x, y) = -f(x)y\varphi_C^{-1}(y) > 0$$

となる. これより, 補題 3.1 と同様にして矛盾が導かれる. したがって, リミットサイクルは第 4 象限において直線  $x = -\delta$  と交わる. その後, リミットサイクルは正の  $y$  軸と交わるので, 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, 0)$  も正の  $y$  軸と交わる.

正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, 0)$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_1(x)$ , 正の半解軌道  $\gamma_{(2.3)}^+(-\delta, 0)$  に対応する方程式 (2.4) の解を  $\tilde{y}_2(x)$  と置く. このとき,  $-\delta < x < 0$  に対して  $\bar{y}_1(x) \geq \tilde{y}_2(x)$  となることを示す. 正の定数  $x_1$  が存在して  $-\delta < x_1 < 0$  かつ  $\bar{y}_1(x_1) < \tilde{y}_2(x_1)$  であると仮定する. このとき, 条件 (1.16) より,  $-\delta < x \leq x_1$  に対して

$$\frac{d\tilde{y}_2(x)}{dx} = -\frac{g(x)}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))} < -\frac{f(x)\tilde{y}_2(x) + g(x)}{\varphi_C^{-1}(\tilde{y}_2(x))}$$

となる. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^-(x_1, \tilde{y}_2(x_1))$  に対応する方程式 (2.2) の解を  $\bar{y}_3(x)$  と置くと,  $\bar{y}_3(x_1) = \tilde{y}_2(x_1)$  であるから, 定数  $x_2$  が存在して  $-\delta < x_2 < x_1$  かつ  $\bar{y}_3(x_2) = 0$  となる. 方程式系 (2.1) の解の一意性より,  $-x_2 < x \leq x_1$  に対して  $\bar{y}_1(x) \geq \bar{y}_3(x)$  となるから,  $\bar{y}_1(x_1) \geq \tilde{y}_2(x_1)$  を得る. したがって, 矛盾が生じる. 以上より,  $-\delta < x < 0$  に対して  $\bar{y}_1(x) \geq \tilde{y}_2(x) = \Phi_C^{-1}(G(\delta) - G(x)) > 0$  が成立する.

条件 (1.17) より,  $0 < x < \delta$  に対して

$$G(\delta) - G(x) = \int_x^\delta g(\xi) d\xi \geq \int_x^\delta \xi d\xi = \frac{\delta^2}{2} - \frac{x^2}{2} > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \Phi_C^{-1}(G(\delta) - G(x)) &\geq \Phi_C^{-1}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(\delta^2 - x^2)(4 - \delta^2 + x^2)} \\ &> \frac{\sqrt{4 - \delta^2}}{2}\sqrt{\delta^2 - x^2} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 条件 (1.16), (1.18) より

$$\begin{aligned} V(0, \bar{y}_1(0)) - V(-\delta, 0) &= \int_{-\delta}^0 \frac{d}{dx} V(x, \bar{y}_1(x)) dx = \int_{-\delta}^0 -f(x)\bar{y}_1(x) dx \\ &\geq \int_{-\delta}^0 -f(x)\tilde{y}_2(x) dx = \int_0^\delta -f(x)\tilde{y}_2(x) dx \\ &= \int_0^\delta -f(x)\Phi_C^{-1}(G(\delta) - G(x)) dx \\ &> \int_0^\delta \frac{\sqrt{4 - \delta^2}}{2}\sqrt{\delta^2 - x^2}(x^2 - \delta^2) dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - \delta^2} \int_0^\delta (\sqrt{\delta^2 - x^2})^3 dx = \frac{3\pi}{32}\delta^4\sqrt{4 - \delta^2} \\ &\geq 1 - G(\delta) \geq 0 \end{aligned}$$

となる. 正の半解軌道  $\gamma_{(2.1)}^+(-\delta, 0)$  が  $y$  と交わることから,  $0 < \bar{y}_1(0) < 1$  を得る. 条件 (1.16), (1.18), および  $V(-\delta, 0) = G(\delta)$  から

$$\begin{aligned} 1 &> \Phi_C(\bar{y}_1(0)) = V(0, \bar{y}_1(0)) \\ &\geq G(\delta) + \int_0^\delta -f(x)\Phi_C^{-1}(G(\delta) - G(x)) dx \geq 1 \end{aligned}$$

となり, 矛盾が生じる. 以上より定理 1.2 は示された.  $\square$

## 4 例

本節では, 方程式 (1.7) の特別な場合について考える. 定数  $\delta_0 > 0$  に対して  $f(x) = x^2 - \delta_0^2$  かつ  $g(x) = x$  とする. このとき, 方程式 (1.7) は方程式

$$(\varphi_C(\dot{x}))' + (x^2 - \delta_0^2)\varphi_C(\dot{x}) + x = 0 \quad (4.1)$$

となり, 方程式系 (2.1) は方程式系

$$\dot{x} = \varphi_C^{-1}(y), \quad \dot{y} = -(x^2 - \delta_0^2)y - x \quad (4.2)$$

となる. 定理 1.1 および 定理 1.2 から, 次の例を得た.

**例 4.1.** 定数  $\delta_0$  は  $\delta_0 \leq 0.41$  を満たすとする. このとき, 方程式 (4.1) は少なくとも一つリミットサイクルを持つ (図 4 を参照).

**証明.** 定数  $\delta$  を  $\delta = \delta_0$  とする. 条件 (1.2) および (1.10)-(1.13) が成り立つことは容易に示される. いま

$$\mu_\delta = \sqrt{2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^3\right)} \geq \sqrt{2 \left(1 - \frac{4}{3}(0.41)^3\right)} > 1.347 > \delta$$

であることから, 条件 (1.14) が成立することもわかる. 同様にして

$$\begin{aligned} a_\delta &= \sqrt{2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^3 - \frac{1}{2}\delta^2\right) - \left(1 - \frac{4}{3}\delta^3 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2} > 0.984, \\ (\mu_\delta - \delta)^2 &= \left(\sqrt{2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^3\right)} - \delta\right)^2 > 0.879, \\ G(\mu_\delta) &= 1 - \frac{4}{3}\delta^3 > 0.908 \end{aligned}$$

であるので

$$\frac{1}{12}a_\delta(\mu_\delta + 3\delta)(\mu_\delta - \delta)^2 + G(\mu_\delta) > \frac{1}{12}a_\delta\mu_\delta(\mu_\delta - \delta)^2 + G(\mu_\delta) > 1.005 > 1$$

となり, 条件 (1.15) が成り立つ. 以上より, 定理 1.1 から方程式 (4.1) はリミットサイクルを持つ.  $\square$

**例 4.2.** 定数  $\delta_0$  は  $\delta_0 \geq 1$  を満たすとする. このとき, 方程式 (4.1) はリミットサイクルを持たない (図 5 を参照).

**証明.** 定数  $\delta$  を  $\delta = 1 \leq \delta_0$  とする. 条件 (1.2), (1.17) が成り立つことは容易に示される. いま,  $|x| < \delta$  に対して

$$f(x) = x^2 - \delta_0^2 \leq x^2 - 1 = x^2 - \delta^2$$

であることから, 条件 (1.16) も成立する. さらに

$$1 - \frac{3\pi}{32} \delta^4 \sqrt{4 - \delta^2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}\pi}{32} < \frac{1}{2} = G(\delta)$$

となるので, 条件 (1.18) が成り立つ. したがって, 定理 1.2 より方程式 (4.1) はリミットサイクルを持たない.  $\square$

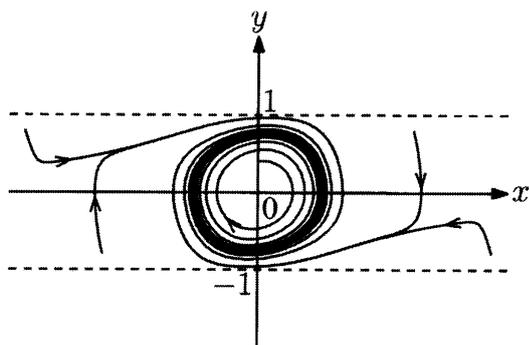


図 4: 方程式系 (4.2) の解軌道  
( $\delta_0 = 0.41$ ).

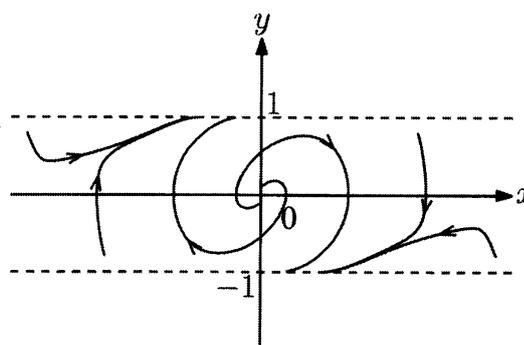


図 5: 方程式系 (4.2) の解軌道  
( $\delta_0 = 1$ ).

## 参考文献

- [1] D. Audin and A. Dahan, Writing the history of dynamical systems and chaos: Longue durée and revolution, disciplines and cultures, *Historia Mathematica*, **29** (2002), 273–339.
- [2] T. Carletti and G. Villari, A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **307** (2005), 763–773.
- [3] T. Carletti, L. Rosati, and G. Villari, Qualitative analysis of the phase portrait for a class of planar vector fields via the comparison method, *Nonlinear Anal.*, **67** (2007), 39–51.
- [4] L. Ciambellotti, Uniqueness of limit cycles for Liénard systems. A generalizations of Massera's theorem, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **7** (2009), 405–410.
- [5] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [6] R. Fitzhugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes, *Biophys. J.*, **1** (1961), 445–466.
- [7] K. Fujimoto and N. Yamaoka, Global existence and nonexistence of solutions for second-order nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **411** (2014), 707–718.
- [8] J. Guckenheimer, Dynamics of the Van der Pol equation, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **27** (1980), 983–989.
- [9] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York, 1964.

- [10] X. C. Huang and L. Zhu, Limit cycles in a general Kolmogorov model, *Nonlinear Anal.*, **60** (2005), 1393–1414.
- [11] P. Jebelean and J. Mawhin, Periodic solutions of forced dissipative  $p$ -Liénard equations with singularities, *Vietnam J. Math.*, **32** (2004), 97–103.
- [12] A. Liénard, Etude des oscillations entretenues, *Revue générale de l'électricité*, **23** (1928), 901–912 and 946–954.
- [13] R. Manásevich and S. Sędziwy,  $p$ -Laplacian and Liénard-type equation, *Rocky Mountain J. Math.*, **27** (1997), 611–617.
- [14] F. Morgan, *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*, Academic Press, fourth edition, 2009.
- [15] C. Murase and S. Sakanoue, Unstable and stable limit cycle in the Oregonator model for the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Progr. Theoret. Phys.*, **69** (1983), 742–755.
- [16] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axons, *Ploc. IRL*, **50** (1960), 2061–2070.
- [17] K. Odani, On the limit cycle of the Liénard equation, *Arch. Math.*, **36** (2000), 25–31.
- [18] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, third edition, 2000.
- [19] J. Sugie, Some criteria of existence of limit cycles for a planar system of Liénard type, *Nonlinear Anal.*, **21** (1993), 803–814.
- [20] J. Sugie, A. Kono, and A. Yamaguchi, Existence of limit cycles for Liénard-type systems with  $p$ -Laplacian, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **14** (2007), 91–110.
- [21] P. J. Torres, Nondegeneracy of the periodically forced Liénard differential equation with  $\phi$ -Laplacian, *Commun. Contemp. Math.*, **13** (2011), 283–292.
- [22] G. Villari, Periodic solutions of Liénard's equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **86** (1982), 379–386.
- [23] G. Villari, On the existence of periodic solutions for Liénard's equation, *Nonlinear Anal.*, **7** (1983), 71–78.
- [24] Y. Yuan, H. Chen, C. Du, and Y. Yuan, The limit cycles of a general Kolmogorov system, *J. Math. Anal. Appl.*, **392** (2012), 225–237.
- [25] Y. Zhou, C. Wang, and D. Blackmore, The uniqueness of limit cycles for Liénard system, *J. Math. Anal. Appl.*, **304** (2005), 473–489.