数理解析研究所講究録
第1995巻 2016年 75-81

抽象的Cauchy問題に対する splitting methodの誤差解析
Error analysis of splitting methods for abstract Cauchy problems

佐々木 多希子 *†
Takiko Sasaki

東京大学大学院 数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 導入

X を Hilbert 空間, A を X 上での m-dissipative 作用素とする. 本論文では $u_0 \in D(A)$ に対して, 抽象的半線形発展方程式:

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + F(u), & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える. ここで $F : D(A) \to D(A)$ は非線形関数とする. (1.1) を満たす例として, 非線形 Schrödinger 方程式, 複素 Ginzburg–Landau 方程式などを挙げられる.

本論文では, "splitting method" と呼ばれる (1.1) の時間離散数値解法の誤差解析について考察する. Splitting method は, (1.1) の解 u を数値的に求める手法の一つである. Splitting method の一般的なアイデアは (1.1) の解 $u(t) = S(t)u_0$ を, A によって生成される縮小半群 $\Phi_A(t)$ と, $\partial_t w = F(w)$ の解作用素 $\Phi_F(t)$ で近似することである. 例えば,

$$\Psi(t) = \Phi_A(t)\Phi_F(t), \tag{1.2}$$

$$\Psi(t) = \Phi_F(t)\Phi_A(t), \tag{1.3}$$

$$\Psi(t) = \Phi_A(t/2)\Phi_F(t)\Phi_A(t/2) \tag{1.4}$$

を考えられる. 特に, $\Psi(t) = \Phi_A(t/2)\Phi_F(t)\Phi_A(t/2)$ とおくと, 十分小さい Δt に対して,

$$\|S(n\Delta t)u_0 - \Psi(\Delta t)^n u_0\| \le C\Delta t^2 \tag{1.5}$$

---

*tsasaki@ms.u-tokyo.ac.jp
†本研究は東京理科大学の太田雅人氏との共同研究に基づく.

が成り立つことが数値的に知られている．$\Psi(t)$ は Strang formula と呼ばれている．さらに分解を複雑化することで，より高精度な近似も可能になることが知られている．

Splitting method は，$S(t)u_0$ そのものについては解きにくいが，$\Phi_A(t)u_0$，$\Phi_F(t)u_0$ に分ければ解きやすくなる場合に有用である．また離散化の対象である方程式の一部の性質を引き継ぐことが知られいて，多くの微分方程式で使われている．

現在に至るまで，様々な方程式の splitting method の誤差解析が成されてきた．常微分方程式の splitting method の誤差解析は，例えば Hairer *et al.*[4] にまとめられている．また，例えば Besse *et al.* [1] and Lubich [5] により，非線形 Schrödinger 方程式の splitting method に対して誤差解析が成された．

しかし，抽象的半線形発展方程式 (1.1) の splitting method の誤差解析は未解決な部分も多い．最近，Borgna *et al.* [2] が，(1.1) の Strang formula も含む，様々なタイプの splitting method が 1 次収束することを示したが，2 次収束までは示していなかった．

また，splitting method は，方程式を二つに分割する場合が多い．例えば，非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + i|u|^{p-1}u, & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

の splitting method は，$\partial_t v = i\Delta v$，$\partial_t v = i|v|^{p-1}v$ を繰り返し解くことで求められる．$\partial_t v = i\Delta v$ は線形な方程式なので，簡単に近似解を求めることができるし，$\partial_t v = i|v|^{p-1}v$ は厳密解を求めることができるので，簡単な計算を繰り返すことで，非線形偏微分方程式の近似解を求めることができることが，splitting method の長点である．また，(1.6) の解 u は，$\|u\|_{L^2}$ を保存するが，$\partial_t v = i\Delta v$，$\partial_t v = i|v|^{p-1}v$ を解く際に，この保存性が保たれるため，それを組み合わせてできる splitting method もこの保存則を再現する．

一方で，方程式によっては，3 つ以上に分割をした方が計算が簡単になる場合もある．例えば，$i|u|^{p-1}u - |u|^{q-1}u$ を非線形項として持つ非線形 Schrödinger 方程式の場合，二つに分割すると，$\partial_t v = i|v|^{p-1}v - |v|^{q-1}u$ を解く必要があるが，この方程式の厳密解を求めることは難しい．近似的にこの方程式を解いても良いのだが，離散化の対象である Schrödinger 方程式の性質を再現するように解くためには，汎用解法では難しい場合が多い．片や，$\partial_t v = i|v|^{p-1}$，$\partial_t v = -|v|^{q-1}v$ はそれぞれ厳密解を求めることができるので，非線形項を 2 つに分割し，トータル 3 つに分割をすると，計算が容易で，かつ離散化の対象である方程式の性質を保つことができる．

しかしながら，3 つ以上に分割した splitting method も提案はされているが，近似解が収束する保証は理論的には与えられていなかった．

そこで本論文では，抽象的半線形発展方程式 (1.1) に対する，ある Strang type の splitting method の誤差解析を行い，それが 2 次収束することを示した．またこの splitting method は，方程式を三つに分割する場合も含まれている．構成は次の通りである．

2 主結果

$F_1, F_2 : D(A) \to D(A)$ に対し,

$$F(v) = F_1(v) + F_2(v) \qquad (v \in D(A)).$$

とおく. $u_0 \in D(A)$ に対し,

$$\begin{cases} u_t = Au + F_1(u) + F_2(u), & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

及び対応する積分方程式

$$u(t) = \Phi_A(t)u_0 + \int_0^t \Phi_A(t-s)F(u(s))ds, \quad t \in [0,T] \tag{2.2}$$

を考える.

$i = 1,2$ に対し, $F_i : D(A) \to D(A)$ が以下の条件を満たすことを仮定する.

(F0) $F_i(0) = 0$,

(F1) $\|F_i'(v)w\|_{D(A)} \le L(\|v\|_{D(A)})\|w\|_{D(A)}$ for $v, w \in D(A)$,

(F2) $F_i(v) \in D(A^2)$ かつ $\|F_i(v)\|_{D(A^2)} \le L_2(\|v\|_{D(A)})\|v\|_{D(A^2)}$ for $v, w \in D(A^2)$,

(F3) $F_i(v) \in D(A^2)$ かつ $\|F_i(v) - F_i(w)\|_{D(A^2)} \le L_3(\max\{\|v\|_{D(A^2)}, \|w\|_{D(A^2)}\})\|v - w\|_{D(A^2)}$
for $v, w \in D(A^2)$,

(F4) $\|F_i'(v)w\|_X \le L_4(\|v\|_{D(A)})\|w\|_X$ for $v, w \in D(A)$,

(F5) $\|F_i''(v)(w,w)\|_X \le L_5(\|v\|_{D(A)})\|w\|_X\|w\|_{D(A)}$ for $v, w \in D(A)$.

ここで, $L, L_2, \cdots, L_5 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は非減少関数で,

$$\|v\|_{D(A)} = \|v\|_X + \|Av\|_X \quad \text{for} \quad v \in D(A),$$
$$\|v\|_{D(A^2)} = \|v\|_{D(A)} + \|A^2 v\|_X \quad \text{for} \quad v \in D(A^2).$$

とする. 次に述べるような (2.2) の時間局所解の一意存在定理が知られている:

命題 2.1. (F0)–(F1) が満たされていると仮定する. 任意の $u_0 \in D(A)$ に対して, ある正定数 $T_{\max}(u_0) \in (0,\infty]$ が存在し, 次を満たす (2.2) の解が一意的に存在する:

$$u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A)) \cap C^1([0, T_{\max}(u_0)), X)$$

かつ u は次の (i) または (ii) を満たす:

(i) $T_{\max}(u_0) = \infty$,

(ii) $T_{\max}(u_0) < \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t \uparrow T_{\max}(u_0)} \|u(t)\|_{D(A)} = \infty$.

さらに，$u_0 \in D(A^2)$ に対し，u は次を満たす：

$$u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A^2)) \cap C^1([0, T_{\max}(u_0)), D(A)).$$

命題 2.1 の証明は，例えば [3] Section 4.3 に記載されている．

数値解法について述べるために，次の常微分方程式を考える．$w_{i,0} \in D(A)$ $(i = 1, 2)$ に対して，初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t w_i = F_i(w_i), & t \in [0, T], \\ w_i(0) = w_{i,0}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

及び対応する積分方程式

$$w_i(t) = w_{i,0} + \int_0^t F_i(w_i(s))ds, \quad t \in [0, T]. \tag{2.3}$$

を考える．(2.3) の解を $w_i(t) = \Phi_{F_i}(t)w_{i,0}$ $(i = 1, 2)$ とかく．次の splitting method を考える：

$$\Psi(t)u_0 = \Phi_A(t/2)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_{F_2}(t)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)u_0. \tag{2.4}$$

このとき，主結果は次のように述べられる．

定理 2.2. (F0)–(F5) が成立していることを仮定する．$u_0 \in D(A^2)$, $T \in (0, T_{\max}(u_0))$ に対し，

$$m_0 = 8 \max_{t \in [0,T]} \|S(t)u_0\|_{D(A)}$$

と定める．このとき，$T, m_0, \|u_0\|_{D(A^2)}$ のみに依存するある正定数 h_0 が存在し，$nh \le T$ を満たす $h \in (0, h_0]$, $n \in \mathbb{N}$ に対し，次を満たす：

$$\|(\Psi(h))^n u_0\|_{D(A)} \le m_0, \quad \|(\Psi(h))^n u_0\|_{D(A^2)} \le e^{\gamma_1 nh}\|u_0\|_{D(A^2)}, \tag{2.5}$$

$$\|S(nh)u_0 - (\Psi(h))^n u_0\|_{D(A)} \le \kappa_1 h\|u_0\|_{D(A^2)}, \tag{2.6}$$

$$\|S(nh)u_0 - (\Psi(h))^n u_0\|_X \le \kappa_2 h^2\|u_0\|_{D(A^2)}, \tag{2.7}$$

ここで γ_1 は m_0 のみに依存する正定数であり，κ_1, κ_2 は T, m_0 のみに依存する正定数である．

3 定理 2.2 の証明の方針

定理 2.2 は，

1. 局所的な収束定理を示す．

2. 1 を用いて大域的な収束定理を示す．

の 2 段階に分かれている．本論文では次のような局所収束定理の証明の方針について述べる．

命題 3.1. (F0)–(F5) が成り立つことを仮定する．$v_0 \in D(A^2)$，$\|v_0\|_{D(A)} \leq M$ とする．このとき，ある M のみに依存する正定数 K_1, K_2, τ が存在し，$h \in [0, \tau]$ に対し，

$$\|S(h)v_0 - \Psi(h)v_0\|_{D(A)} \leq K_1 \|v_0\|_{D(A^2)} h^2,$$
$$\|S(h)v_0 - \Psi(h)v_0\|_X \leq K_2 \|v_0\|_{D(A^2)} h^3$$

が成り立つ．

命題 3.1 の証明はテイラー展開に基づく．誤差を評価するために，離散化の対象である方程式と近似解を比較するため，それぞれを以下のように書き直す．

$$u(t) = S(t)v_0, \quad v(t) = \Psi(t)v_0. \tag{3.1}$$

とおく．まず，$u(t)$ は次のよう書ける．

$$u(t) = \Phi_A(t)v_0 + \int_0^t \Phi_A(t-s)F(u(s))ds.$$

次に $v(t)$ について考察する．(2.3) に注意すると，

$$\begin{aligned}
\Phi_{F_1}(t/2)\underbrace{\Phi_{F_2}(t)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0}_{=w_0(t)} &= w_0(t) + \int_0^{t/2} F_1(\Phi_{F_1}(s)w_0(t))ds \\
&= w_0(t) + \frac{1}{2}\int_0^t F_1(\Phi_{F_1}(s/2)w_0(t))ds, \\
\Phi_{F_2}(t)\underbrace{\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0}_{=w_1(t)} &= w_1(t) + \int_0^t F_2(\Phi_{F_2(s)}w_1(t))ds,
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0 &= \Phi_A(t/2)v_0 + \int_0^{t/2} F_1(\Phi_{F_1}(s)\Phi_A(t/2)v_0)ds \\
&= \Phi_A(t/2)v_0 + \frac{1}{2}\int_0^t F_1(\Phi_{F_1}(s/2)\Phi_A(t/2)v_0)ds.
\end{aligned}$$

したがって，$v(t)$ は次のように書き直すことができる：

$$\begin{aligned}
v(t) &= \Phi_A(t/2)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_{F_2}(t)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0, \\
&= \Phi_A(t)v_0 + \boldsymbol{G}_1(t) + \boldsymbol{G}_2(t) + \boldsymbol{G}_3(t).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_1(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_A(t/2)F_1(\Phi_{F_1}(s/2)\Phi_A(t/2)v_0)ds, \\
\boldsymbol{G}_2(t) &= \int_0^t \Phi_A(t/2)F_2(\Phi_{F_2}(s)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0)ds, \\
\boldsymbol{G}_3(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_A(t/2)F_1(\Phi_{F_1}(s/2)\Phi_{F_2}(t)\Phi_{F_1}(t/2)\Phi_A(t/2)v_0)ds.
\end{aligned}$$

したがって,

$$u(t) - v(t) = \int_0^t \Phi_A(t-s)\,[F(u(s)) - F(v(s))]\,ds + R(t). \tag{3.3}$$

ただし,

$$R(t) = \int_0^t \Phi_A(t-s)F(v(s))ds - [\boldsymbol{G}_1(t) + \boldsymbol{G}_2(t) + \boldsymbol{G}_3(t)].$$

(3.3), Gronwall の補題より, $\|R(t)\|_{D(A)}, \|R(t)\|_X$ がそれぞれ 2 次, 3 次収束することを示せれば, 命題 3.1 が示される. $\|R(t)\|_{D(A)}$ の 2 次収束性は比較的簡単な評価で示せる. $\|R(t)\|_X$ の 3 次収束性の証明には次の補題が重要な役割を果たす：

補題 3.2. $w \in C^1([0,T], D(A)) \cap C([0,T], D(A^2))$ とする. このとき, $t \in [0,T]$ に対し,

$$\begin{aligned}&\left\| \int_0^t [\Phi_A(t-s)w(s) - \Phi_A(t/2)w(s)]ds \right\|_X \\ &\quad \le t^3 \left\{ \|w\|_{C^1([0,T],D(A))} + \|w\|_{C([0,T],D(A^2))} \right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成り立つ.

補題 3.2, テイラー展開を用いると $\|R(t)\|_X$ の 3 次収束性が示される.

4 数値例

(2.7) が成り立つことを数値的に確かめる. 次の Damped nonlinear Schrödinger equation を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u - i|u|^2 u - 2|u|^4 u, & t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

ただし, $A = i\partial_x^2$, $D(A) = H^2(\mathbb{R})$ とする.

数値計算を簡単にするため, $x \in [0,1]$ とし, Dirichlet 境界条件を課す. また, 初期値は $u_0(x) = \sin(\pi x)$ とする. $\Phi_A(t)$ は Crank-Nicolson 法で解く. さらに, $F_1(v) = -i|v|^2 v$, $F_2(v) = -|v|^4 v$ とおく. $\Phi_{F_1}(h)v_0$, $\Phi_{F_2}(h)v_0$ は次で与えれらる：

$$\Phi_{F_1}(h)v_0 = \exp\left[-i|v_0|^2 h\right] v_0, \qquad \Phi_{F_2}(h)v_0 = (1 + 8|v_0|^4 h)^{-1/4} v_0.$$

(4.1) は厳密解を求めることが難しいため, (2.7) の十分条件である次を確かめる: ある正定数 C が存在して,

$$e^{(D)}(h) \le Ch^2 \tag{4.2}$$

が成り立つ. ここで,

$$e^{(D)}(h) = \sup_{0 \le t_n \le T} \|\Psi(h)^n u_0 - \Psi(h/2)^{2n} u_0\|_Y$$

である．計算結果を Figure 1 に示す．横軸は $\log h$，縦軸は $\log e^{(D)}(h)$ とし，$Y = L^2, L^\infty, H^1$ とおく．全ての場合において，(4.2) が成り立つことが数値的に分かる．

さらに，(4.1) の解 u は次の性質を持つ：

$$\frac{d}{dt}\int |u|^2 dx \leq 0. \tag{4.3}$$

Figure 2 より，(2.4) は (4.3) を再現することが数値的に分かる．

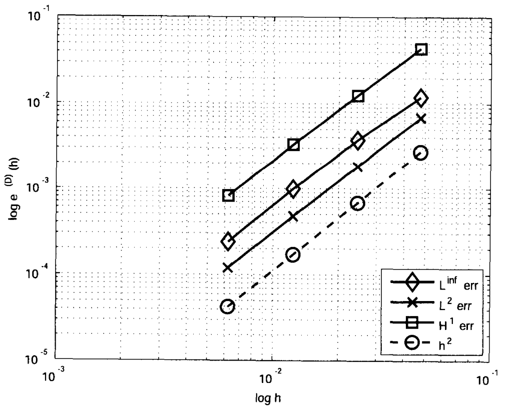

Figure 1. Convergence rate of the scheme (2.4) for (4.1).

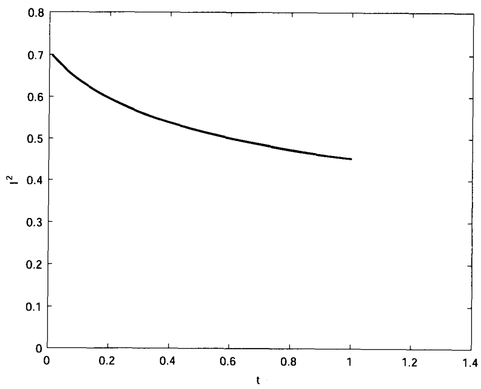

Figure 2. The dissipation property of the scheme (2.4) for (4.1).

References

[1] C. Besse, B. Bidegaray and S. Descombes: *Order estimates in the time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Numer. Anal., **40**, 26-40, (2002).

[2] J. P. Borgna, *et al.*: *General splitting methods for abstract semilinear evolution equations.*, Commun. Math. Sci., **13**, 83–101, (2015).

[3] T. Cazenave and A. Haraux: *An introduction to semilinear evolution equations*, **13**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1998).

[4] E. Hairer, *et al.*: *Geometric numerical integration (2nd ed.)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2006).

[5] C. Lubich: *On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations*, Math. Comput., **77**, 2141-2153, (2008).

[6] T. Matsuo and Y. Miyatake: *Structure-Preserving Numerical Methods for Differential Equations*, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, **22**, (2012), no. 3, 213–251.