

法を用いた最適形状設計問題のアプローチによる 自由境界問題の数値解析

塩田青玄¹, マハラニ・アハサニ・ウンミ^{1,2}, 木村正人¹, 畔上秀幸³, 大塚厚二⁴

¹ 金沢大学大学院自然科学研究科, ² バンドン工科大学
³ 名古屋大学情報科学研究科, ⁴ 広島国際学院大学総合教育センター

Shogen Shioda¹, Maharani Ahsani Ummi^{1,2}, Masato Kimura¹,
Hideyuki Azegami³, Koji Ohtsuka⁴

¹Kanazawa University, ²Bandung Institute of Technology
³Nagoya University, ⁴Hiroshima Kokusai Gakuin University

1 はじめに

最適形状設計 (Optimal Shape Design) は, 今日では工業・産業において, 効率化や製品開発のための重要なツールとして欠かせないものになっており, 多くの手法・アルゴリズムが提案されてきている. 当然, それらは様々な数学的手法に基づいたものであり, そのための数学理論の発展が欠かせない. 実際, 最適形状設計の重要なステップである形状感度解析 (Shape Sensitivity Analysis, コスト関数の形状微分) については, すでに多くの数学的研究がなされている [14].

しかし, 具体的な形状の変形に関するステップについては, あまり多くの数学的研究がないのが実状である. 実際の産業界での事例では, 計算機能力の向上に大きく依存した形で, 複雑かつ大規模な数値計算は多く行われている. しかし, その基礎となる数学理論は脆弱であるため, 経験や試行錯誤によりカバーされている部分が多く, 最適形状設計の発展の障害になっている. 数学的理論研究が進みづらい理由の 1 つは, 具体的な事例に現れる問題は複雑なため, 数学的に厳密な取り扱いが難しいことが挙げられる. また, 最適形状の存在や解析解が具体的にわからない場合が多いことも障害の一つである.

本研究では, あるポテンシャル逆問題に関連して現れる自由境界問題を取り上げ, それに対する形状最適化手法を用いた数値計算例を紹介する. この問題は, 特別な場合に厳密解が全て求められており, 数学的に明快な研究対象である. また, 形状変形の手法として, 畔上らによって提唱された力法 (Traction Method) [1, 2] を用い, その数学的定式化を示した後, 数値計算によりその有効性を示す. 力法は, 近年, 問題に応じて様々な工夫や一般化が考えられており, それらを総称して H^1 勾配法と呼ばれる [3].

また, 本研究で取り上げる最適形状問題のコスト関数は領域の境界積分により定義されるため, 境界の曲率がコスト関数の形状微分に現れる. これは, 数値計算の取り扱いの困難さから, 既存の研究では多くの場合に避けられて来たコスト関数である. 今回の研究では, 法を用いることで, そのような境界積分によるコスト関数を自然に取り扱うことに成功している.

本論文の構成は以下のようなものである. 次節で, 自由境界問題とその最適形状設計問題としての取り扱いを説明する. 第 3 節では, コスト関数の形状微分公式を導き, それに基づいて力法の定式化を第 4 節で行う. 第 5 節で, いくつかの数値計算例を紹介し, 本手法の有効性を示す.

2 自由境界問題と形状最適化

次のような平面内の自由境界問題を考える. $\mu \in L^2(\mathbb{R}^2)$ は有界な台を持つ与えられた関数とする. また p, q は \mathbb{R}^2 上で定義された滑らかな関数とする. このとき, 次を満たすような (u, Ω) の組を求める自由境界問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{in } \Omega \\ u = p & \text{on } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = q & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (2.1)$$

ただし, ここで Ω は $\text{supp}(\mu) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ を満たす有界な Lipschitz 領域で, n はその境界 Γ 上の外向き単位法線ベクトルを表す. 以降, 本稿では $\Gamma = \partial\Omega$ とおく.

この (2.1) やその類似の問題は, [6, 13] などでも取り扱われている求積曲面 (Quadrature Surface) の数学理論や, 電磁鋳造法 [5, 11], プラズマ閉じ込め問題 [7, 8] などの工学的な問題に関連して現れることが知られている.

この自由境界問題 (2.1) に対し, 次のような形状最適化によるアプローチを考える. $\beta > 0$ を固定し, 式 (2.1) を Robin 境界条件を用いて次のように書き換える.

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{in } \Omega \\ u = p & \text{on } \Gamma \\ \beta u + \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{q} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (2.2)$$

但し, $\tilde{q}(x) := \beta p(x) + q(x)$ とする. 明らかに (2.2) と (2.1) は同値である.

ここで, 与えられた Ω に対し, $u_\Omega \in H^1(\Omega)$ を次の Robin 境界問題の弱解とする.

$$u_\Omega : \begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{in } \Omega \\ \beta u + \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{q} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで G を次のように定義する.

$$G := \{ \Omega \mid \Omega \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ 上の有界な Lipschitz 領域, } \text{supp}(\mu) \subset \Omega, \}$$

任意の $\Omega \in G$ に対し, u_Ω は次の弱形式の解として, 一意的に存在する.

$$u_\Omega \in H^1(\Omega) : \quad a_\Omega(u, v) = l_\Omega(v) \quad (\forall v \in H^1(\Omega)),$$

$$a_\Omega(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \beta \int_\Gamma uv \, ds, \quad l_\Omega(v) := \int_\Omega \mu v \, dx + \int_\Gamma \tilde{q} v \, ds.$$

もし, Γ 上で $u_\Omega = p$ となれば, そのときの (u_Ω, Ω) が問題 (2.1) の解となる. そこで $\Omega \in G$ に対し, そのコスト関数を以下のように定義する.

$$J(\Omega) := \frac{1}{2} \int_\Gamma |u_\Omega - p|^2 \, ds \quad (\Omega \in G). \quad (2.4)$$

コスト関数 $J(\Omega)$ を最小にするような最適形状 $\Omega \in G$ を求める形状最適化問題を考える. ここで, もし $J(\Omega) = 0$ となる最適形状 Ω が求めれば, そのときの (u_Ω, Ω) が自由境界問題 (2.1) の解を与えることがわかる.

3 コスト関数の変分公式

この節では、 $J(\Omega)$ の $\Omega = \Omega_0 \in G$ での変分を考える。そのためにある種のラグランジュの未定乗数法を用いる。ベクトル場 $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ に対して、 $\Omega(t)$ を次のように定義する。

$$\Omega(t) := \{x + tV(x) \mid x \in \Omega_0\} \quad (0 \leq t < t_0) \quad (3.1)$$

十分小さな $t > 0$ に対し $\Omega(t) \in G$ である。また、 $\Gamma_0 = \partial\Omega_0, \Gamma(t) = \partial\Omega(t)$ とおく。すると $\Omega(t)$ または $\Gamma(t)$ 上の積分の変分公式として、次の命題が成り立つ。

命題 3.1. f, g は \mathbb{R}^2 上の関数とし、 Γ_0, V, f, g は十分滑らかとする。このとき、

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x) dx \Big|_{t=0} = \int_{\Gamma_0} (V \cdot n) f ds \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} g(x) ds \Big|_{t=0} = \int_{\Gamma_0} (V \cdot n) \left(g\kappa + \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (3.3)$$

$$= \int_{\Gamma_0} (V \cdot \nabla g + (V_s \cdot \tau) g) ds \quad (3.4)$$

が成り立つ。ただし Γ_0 上で、 κ は符号付き曲率、 τ は反時計回りにとった単位接ベクトルである。また、 $V_s = \frac{dV}{ds}$ は τ 方向の微分を表す。

[証明] (3.2) と (3.3) はよく知られた公式である。証明は [15] などにある。ここで、 $\tau_s = -\kappa n$ であることを用い、 Γ_0 上の部分積分を行うと、(3.3) 式から次のように (3.4) を示すことが出来る。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} (V \cdot n) \left(g\kappa + \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds &= \int_{\Gamma_0} \left(-(gV) \cdot \tau_s + (V \cdot n) \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_0} \left((gV)_s \cdot \tau + (V \cdot n) \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial s} (V \cdot \tau) + g(V_s \cdot \tau) + (V \cdot n) \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_0} \{ V \cdot \nabla g + (V_s \cdot \tau) g \} ds \quad \square \end{aligned}$$

この命題を用いて、前節のコスト関数の変分を計算する。 $\Omega \in G$ と $u, v \in H^1(\Omega)$ に対し、汎関数 J_0, L_M, L を次のように定義する。

$$J_0(\Omega, u) := \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |u - p|^2 ds,$$

$$L_M(\Omega, u, v) := a_{\Omega}(u, v) - l_{\Omega}(v),$$

$$L(\Omega, u, v) := J_0(\Omega, u) + L_M(\Omega, u, v).$$

ここで定義より、任意の $v \in H^1(\Omega)$ に対して、

$$J(\Omega) = J_0(\Omega, u_{\Omega}), \quad L_M(\Omega, u_{\Omega}, v) = 0, \quad L(\Omega, u_{\Omega}, v) = J(\Omega),$$

である。次に $\overline{\Omega(t)} \subset B_R := \{|x| < R\}$ となる十分大きな $R > 0$ を取り、 $v_0, v_1 \in H^1(B_R)$ を任意に選び、 $v(t) = v_0 + tv_1$ とおく。 $u_{\Omega(t)}$ は適当に B_R 上に拡張し、 $u(t)|_{\Omega(t)} = u_{\Omega(t)}$ となる $u(t) = u(\cdot, t) \in H^1(B_R)$ を取る。特に、 $u_0 = u(0) \in H^1(B_R)$ とおく。また、 $\varphi_0(x) := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)|_{t=0}$ ($x \in B_R$) とおく。以下では $\varphi_0 \in H^1(B_R)$ であるものと仮定する。

このとき,

$$J(\Omega(t)) = L(\Omega(t), u_{\Omega(t)}, v(t))$$

であることから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} L(\Omega(t), u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} L(\Omega(t), u_0, v_0) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} L(\Omega_0, u(t), v_0) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} L(\Omega_0, u_0, v(t)) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

が形式的に成り立つ. ここで簡単のために次のようにおく.

$$A_1 := \frac{d}{dt} L(\Omega(t), u_0, v_0) \Big|_{t=0}, \quad A_2 := \frac{d}{dt} L(\Omega_0, u(t), v_0) \Big|_{t=0}, \quad A_3 := \frac{d}{dt} L(\Omega_0, u_0, v(t)) \Big|_{t=0}$$

とおく. 以下では A_1, A_2 の右辺に現われる項は t に関して十分滑らかであると仮定して議論を進める. A_3 については, $L(\Omega_0, u_0, v(t)) = J(\Omega_0)$ なので $A_3 = 0$ である.

次に A_2 について計算する.

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{d}{dt} \{ J_0(\Omega_0, u(t)) + L_M(\Omega_0, u(t), v_0) \} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |u(t) - p|^2 ds + a_{\Omega_0}(u(t), v_0) - l_{\Omega_0}(v_0) \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma_0} \varphi_0(u_0 - p) ds + a_{\Omega_0}(\varphi_0, v_0) \\ &= a_{\Omega_0}(v_0, \varphi_0) - \tilde{l}_{\Omega_0}(\varphi_0). \end{aligned}$$

但し

$$\tilde{l}_{\Omega}(\varphi) := \int_{\Gamma} \varphi(p - u_{\Omega}) ds \quad (\varphi \in H^1(\Omega)),$$

とおいた. ここで v_0 を, $v_0|_{\Omega_0}$ が

$$a_{\Omega_0}(v_0, \varphi) = \tilde{l}_{\Omega_0}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in H^1(\Omega_0))$$

を満たすように選ぶことにする. つまり, v_{Ω} を

$$v_{\Omega} : \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v = -u_{\Omega} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (3.5)$$

の一意的に定まる弱解とするとき, $v_0|_{\Omega_0} = v_{\Omega_0}$ である. このとき $A_2 = 0$ が従う. 問題 (2.3) を主問題, この (3.5) を (2.3) の随伴問題と呼ぶ. また,

$$f := \nabla u_0 \cdot \nabla v_0, \quad g := \frac{1}{2} |u_0 - p|^2 + \beta u_0 v_0 - \bar{q} v_0,$$

とおくと,

$$L(\Omega(t), u_0, v_0) = \int_{\Omega(t)} (f - \mu v_0) dx + \int_{\Gamma(t)} g ds$$

が成り立つ。 f, g が十分滑らかならば、これと命題 3.1 より、 $J(\Omega)$ の変分は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \right|_{t=0} &= A_1 = \left. \frac{d}{dt} L(\Omega(t), u_0, v_0) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (f - \mu_0 v_0) dx \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} g ds \right|_{t=0} \\
 &= \int_{\Gamma_0} (V \cdot n) \left(f + g\kappa + \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \\
 &= \int_{\Gamma_0} \{ (V \cdot n)f + V \cdot \nabla g + (V_s \cdot \tau)g \} ds. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

4 力法

本節では、[1, 2, 3] によって提案された力法 (H^1 勾配法とも呼ばれる) について簡単に解説を行う。

本節では、前節の $\Omega_0, \Gamma_0 = \partial\Omega_0$ を、単に $\Omega, \Gamma = \partial\Omega$ と記す。また、(3.1) によって、 $\Omega(t) \in G$ を定める。 Γ 上において、 V の n 方向成分を $V_n = V \cdot n$ とおく。一般に、あるコスト関数 $J(\Omega)$ に対し、

$$\left. \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \right|_{t=0} = \int_{\Gamma} V_n B_n ds = \int_{\Gamma} V \cdot B ds$$

を満たすように、 V によらず定まる $B_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ を $J(\Omega)$ の (法線方向の) スカラー変分と呼ぶことにする。 B_n は $J(\Omega)$ の形状勾配 (shape gradient) または形状微分 (shape derivative) などと呼ばれる。また Γ 上で $B = B_n n$ となるベクトル場 B を $J(\Omega)$ のベクトル値変分と呼ぶ。(2.4) の $J(\Omega)$ の場合には、前節の結果より

$$\begin{aligned}
 B_n &= f + g\kappa + \frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma \\
 \int_{\Gamma} B \cdot \varphi ds &= \int_{\Gamma} \{ (\varphi \cdot n)f + \varphi \cdot \nabla g + (\varphi_s \cdot \tau)g \} ds \quad (\forall \varphi \in W^{1,\infty}(\Gamma, \mathbb{R}^2)) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

である。

慣用的な形状最適化の手法では、十分小さな $\eta > 0$ と、コスト関数 $J(\Omega)$ のベクトル値変分 $B = B_n n : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^2$ を陽的に用いて、次のように領域境界の変形を行うことが多い。

$$\Gamma_{\text{new}} := \{x - \eta B(x); x \in \Gamma\} \tag{4.2}$$

ところが、今回のような境界積分によって定義されたコスト関数の場合には、変分公式 (3.6) からわかるように、 $\partial\Omega$ の曲率 κ が $J(\Omega)$ のスカラー変分 B_n に陽に含まれてしまい、数値的な扱いを困難し、実際しばしば数値不安定性が起きる。

今回採用する力法の主なアイデアは、領域 Ω を仮想的に弾性体のように取り扱い、 $J(\Omega)$ の変分公式で与えられる境界上での外力を用いて小さな変形を繰り返すことである。

力法を用いて問題 (2.1) を解くために、 D を $\bar{D} \subset \Omega$ となる Lipschitz 領域とし、次の人工的な弾性問題を解く。

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma[w] = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{D} \\ \sigma[w]n = -B & \text{on } \Gamma \\ w = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \tag{4.3}$$

ここで $w(x) \in \mathbb{R}^2$ は $\bar{\Omega} \setminus D$ 上の変位である。この問題の弱形式は次のようになる。

$$w \in H^1(\Omega \setminus \bar{D}) : \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \sigma[w] : e[\varphi] dx = \int_{\Gamma} B \cdot \varphi ds \quad (\forall \varphi \in H^1(\Omega \setminus \bar{D}; \mathbb{R}^2), \varphi|_{\partial D} = 0).$$

但し、 $e[u], \sigma[u]$ はそれぞれ変位 u から定まる歪テンソル、応力テンソルで、正の適当な Lamé 定数で関係づけられているとする。

ここで求めた w により次のように領域を变形させるのが、方法の考え方である。

$$\Omega_{\text{new}} = \{x + \eta w(x) \mid x \in \Omega\}$$

これは、(3.1)において、 $\Omega_0 = \Omega, V = w, t = \eta$ としたものなので、コスト関数の変分は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \Big|_{t=0} = \int_{\Gamma} B \cdot w ds = - \int_{\Gamma} (\sigma[w]n) \cdot w ds = - \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \sigma[w] : e[w] dx \leq 0$$

よって $\int_{\Omega \setminus \bar{D}} \sigma[w] : e[w] dx > 0$ で η が十分小さいなら、 $J(\Omega_{\text{new}}) < J(\Omega)$ が従う。また、方法では (4.2) の方法と異なり、 $\bar{\Omega}$ 全体で定義されたベクトル場 w で变形するため、有限要素法で用いる Ω のメッシュ分割の頂点を同時に w を用いて移動することで、 Ω_{new} のメッシュ分割も自動的に得られるという利点がある。

また、方法では $J(\Omega)$ のベクトル値変分 B を (4.3) の境界条件として用いるが、その際に曲率項を含む陽的表現 $B = B_n n$ は使用せず、 B の弱表現 (4.1) を用いることで、曲率項の数値的取り扱いも回避することができる。方法を用いて問題 (2.1) を解く手順をまとめると次のようになる。

1. 初期形状を決めて有限要素メッシュを生成する。
2. 有限要素法を用いて主問題 (2.3) を解き、 u_Ω を求める。
3. 有限要素法を用いて随伴問題 (3.5) を解き、 v_Ω を求める。
4. 有限要素法を用いて人工的な弾性問題 (4.3) を解き、 w を求める。
5. 十分小さい η を用いて $\Omega_{\text{new}} = \{x + \eta w(x); x \in \Omega\}$ により、形状およびその有限要素メッシュもを更新する。
6. Ω が収束するまで 2-5 を繰り返す。

5 数値計算例

本節では、自由境界逆問題 (2.1) の例として、[6, 13] などでも取り扱われている求積曲面 (Quadrature Surface) に関連する次の問題を考察する。

\mathbb{R}^2 内の互いに異なる N 点 $\xi_j \in \mathbb{R}^2$ ($j = 1, \dots, N$) を考える。 ξ_j を台とする Dirac 測度を δ_{ξ_j} で表し、 μ を

$$\mu := \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{\xi_j} \quad (5.4)$$

で定義し、問題 (2.1) を考える。 $\mu \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ であるが、 $-\Delta$ の基本解を用いて、 (2.1) の弱解を定義することができる [6, 9]。 また、 $\epsilon > 0$ に対し、

$$\delta^\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi\epsilon^2} & |x| < \epsilon \\ 0 & |x| \geq \epsilon \end{cases}$$

とおくと、十分小さな ϵ に対し、

$$\mu^\epsilon(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta^\epsilon(x - \xi_j) \quad (5.5)$$

を (5.4) の代わりに用いても、調和関数の性質から、 u の $\text{supp}(\mu^\epsilon)$ での値を少し変更すれば、自由境界問題 (2.1) の解は変わらないことがわかる。

今回は特に、 $N = 2$ で、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$ 、 $\xi_1 = (c, 0)$ 、 $\xi_2 = (-c, 0)$ 、 $c > 0$ 、 $p(x) = 0$ 、 $q(x) = -1$ の場合を取り扱う。この問題については、A. Henrot によって全ての厳密解が等角写像を用いて求められている [6, 9]。それによると、連結な解の形状 Ω は、存在しない場合、一意に存在する場合、2つ存在する場合、の3通りのケースが α/c の値によって起こることがわかっている。詳細な図と解の分類は、[9] を参照のこと。

今回の数値計算には、有限要素法ソフトウェア FreeFem++ [4, 12] を利用した。P2 要素有限要素法による離散化と4節で述べた方法のアルゴリズム、及び FreeFem++ に実装されているアダプティブメッシュ用の関数 `adaptmesh()` を用いた。以下の数値計算ではメッシュを Th として `adaptmesh(Th, 1, hmax=0.02)` により、メッシュの切り直しを行っている。また、 $\epsilon = 0.1$ 、 $\eta = 0.1$ 、

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - \xi_1| < \epsilon\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2; |x - \xi_2| < \epsilon\},$$

として計算した。

図1と図2に $\alpha = 3$ 、 $c = 0.625$ の場合の数値例を挙げる。この場合は、ちょうど2つの厳密解が存在する [9]。 Ω の初期形状は、図1では円盤、図2ではダンベル型領域とした。それぞれ異なる厳密解に収束していることが観察される。対応するそれぞれの厳密解を実線で表示してある。図1では500回に1回、図2では4000回に1回 `adaptmesh()` をかけた。図2で、ダンベル型の解に収束させるためには、十分その形状に近い初期形状から始め、 `adaptmesh()` を行う必要があった。

6 まとめと今後の課題

本論文では、[9, 10] での研究を発展させ、ある自由境界問題に関連して現れる最適形状決定問題の力法の数学的枠組みについて解説を行い、厳密解との比較に基づいた数値計算例を紹介した。本研究では特に、コスト関数が境界積分によって与えられる場合に、その形状感度解析の結果を示し、曲率項が陽に現れないベクトル値型のコスト関数の変分 B の弱表現を導出した。さらに、その弱表現を用いた方法の定式化を行い、実際に有限要素法による数値計算例でその有効性を確かめた。また、適切な初期形状の選択すれば、くびれたダンベル形状などでも数値的に求められることを示した。特にその際、アダプティブメッシュ有限要素法が有効であった。

取り扱った境界積分によるコスト関数は、そのスカラー変分 B_n に曲率項が現れるため、その数値的取り扱いの困難さから、しばしば避けられて来た手法である。今回の結果は、方法の有用性をさらに広げるとともに、形状最適化手法におけるコスト関数の選択を大きく広げたという意味で、応用上の意義が高いものである。

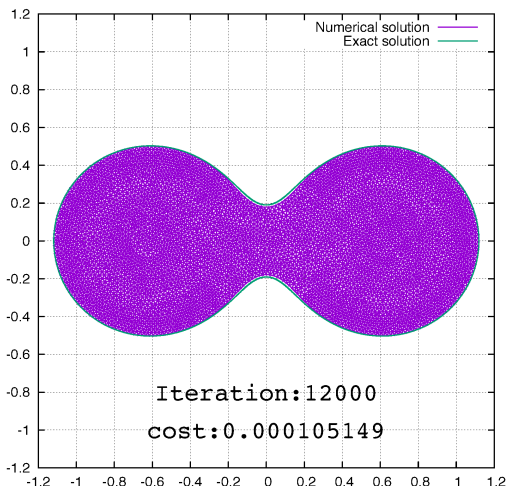
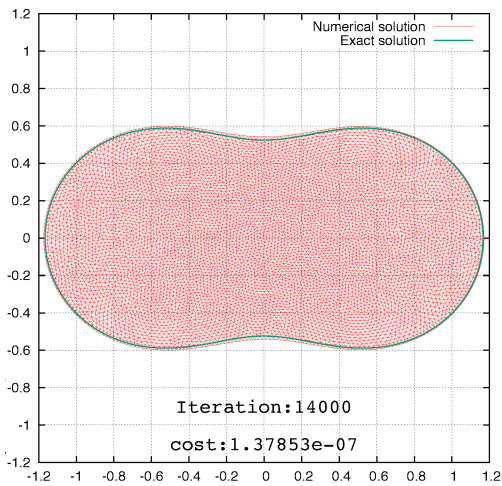
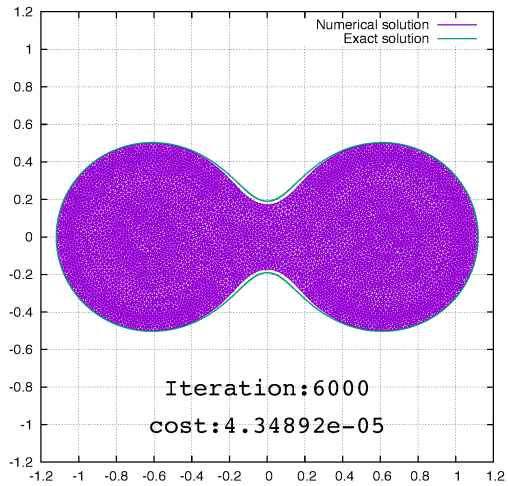
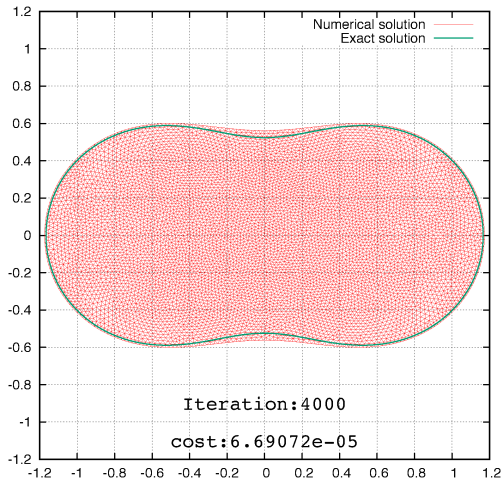
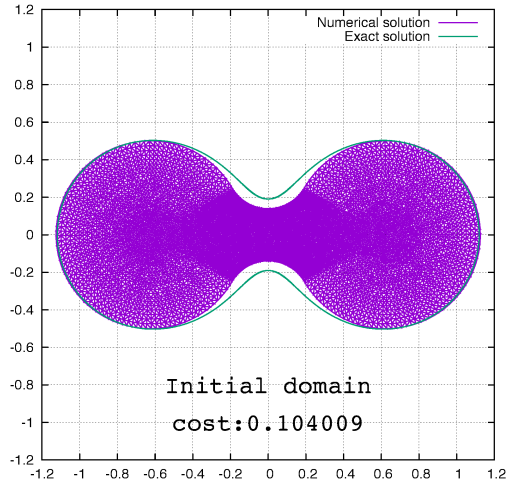
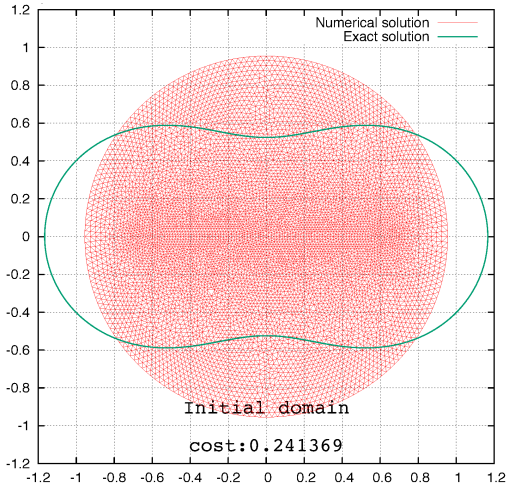


図 1: $\alpha = 3, c = 0.625$ で反復回数 0 回, 4000 回, 14000 回の形状. 実線は厳密解の 1 つ.

図 2: $\alpha = 3, c = 0.625$ で反復回数 0 回, 6000 回, 12000 回の形状. 実線は厳密解の 1 つ.

一方で、今回の議論ではページ数の都合もあり、形状感度解析の部分で微分可能性を仮定して議論を行った部分がある。その数学的正当性の検証については、今後の課題としたい。また、3次元問題への拡張については、現在準備中の論文で発表予定である。本論文は、我々が最終的な目標としている手法の安定性・収束性の数学解析への第一歩であり、今後、この定式化をもとに手法の数学研究が深まることを期待したい。

参考文献

- [1] 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法。日本機械学会論文集 A 編, Vol.60 (1994), pp.1479-1486.
- [2] H. Azegami and K. Takeuchi: A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition. *International Journal of Computational Methods*, Vol.3, No.1 (2006), pp.21-33.
- [3] 畔上秀幸：形状最適化問題の正則化解法。日本応用数学会論文誌, Vol.23, No.2 (2014), pp.83-138.
- [4] F. Hecht: New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.* Vol.20, No.3-4 (2012), pp.251-265.
- [5] A. Henrot and M. Pierre: About existence of equilibria in electromagnetic casting. *Quarterly of Applied Math.*, Vol.49. No.3 (1991), pp.563-575.
- [6] A. Henrot: Subsolutions and supersolutions in a free boundary problem. *Ark. Mat.* Vol.32 (1994) pp.78-98.
- [7] 今井仁司：応用解析における多倍長計算。数学, Vol.55, No.3 (2003), pp.316-325.
- [8] H. Kawarada, T. Sawaguri and H. Imai: An approximate resolution of a free boundary problem appearing in the equilibrium plasma by means of conformal mapping. *Japan J. Appl. Math.*, Vol.6 (1989), pp.331-340.
- [9] A. U. Maharani, M. Kimura, H. Azegami, K. Ohtsuka and I. Armanda: Shape optimization approach to a free boundary problem. *Recent Development in Computational Science*, Vol.6 (2015), pp.42-55.
- [10] A. U. Maharani: Shape optimization approach to a free boundary problem using traction method. Master Thesis, Division of Mathematical and Physical Sciences, Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University (2015).
- [11] T. Morisue, T. Yajima, T. Kume and S. Fujimori: Analysis of electromagnetic force for shaping the free surface of a molten metal in a cold crucible. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.29, No.2 (1993), pp.1562-1565.
- [12] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 – FreeFem++数理思考プログラミング。共立出版 (2014).
- [13] M. Onodera: Geometric flows for quadrature identities. *Math. Ann.* Vol.361 (2015), pp.77-106.

- [14] J. Sokolowski and J.-P. Zolésio: Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis. Springer-Verlag (1992).
- [15] M. Kimura: Geometry of hypersurfaces and moving hypersurfaces in R^m —for the study of moving boundary problems—. Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling (2008), pp.39-93.